

直觉模糊数密度集成算子及其应用

林友谅¹, 李 武^{2†}, 韩庆兰¹

(1. 中南大学 商学院, 长沙 410083; 2. 湖南理工学院 信息与通信工程学院, 湖南 岳阳 414006)

摘 要: 针对有数据分布疏密偏好的直觉模糊问题, 提出基于密度集成算子的集结方法. 首先, 借助差异度和相似度构建距离测度公式, 结合树图思想给出一种简单的直觉模糊数聚类方法; 然后, 讨论决策者偏好与密度权向量的关系, 并在此基础上定义两种新的算子——直觉模糊密度加权平均集成算子和直觉模糊密度混合算术平均集成算子, 后者具有更优良的性质. 最后, 通过算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 多属性决策; 直觉模糊数; 聚类; 密度算子

中图分类号: C934

文献标志码: A

Intuitionistic fuzzy number density aggregation operator and its application

LIN You-liang¹, LI Wu^{2†}, HAN Qing-lan¹

(1. School of Business, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Information and Communication Engineering, Hu'nan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: In view of the intuitionistic fuzzy number problem with the density preference of information distribution, an intuitionistic fuzzy number aggregation method based on density operator is proposed. Firstly, an intuitionistic fuzzy clustering method based on tree graph is presented, and the distance measure formula is constructed by using the difference together with the similarity. Then the relation between the decision maker's preference and the density weighted vector is discussed. The two novel operators are defined, namely, the intuitionistic fuzzy density weighted average (IFDWA_{w,ξ}) operator and the intuitionistic fuzzy density mixed arithmetic mean (IFDHAA_{w,ξ}) operator, and the latter has more excellent properties. Finally, the numerical cases are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: multi-attribute decision making; intuitionistic fuzzy number; cluster; density operator

0 引 言

1986年Atanassov提出直觉模糊集^[1], 该集从隶属度、非隶属度和犹豫度3方面细腻地刻画了现实世界的模糊本质, 引起较为广泛的关注^[2-3]. 文献[4]对直觉模糊关系的构建展开了研究; 文献[5-6]对经典多属性决策方法基于直觉模糊集进行了拓展; 文献[7]分析了直觉模糊集的相异度; 文献[8]提出了新的相似度的计算方法; 文献[9-15]研究了直觉模糊问题的集结算子, 给出了基于直觉模糊环境的基础算子以及相应的集成算子; 文献[16-17]探讨了直觉模糊集的聚类问题. 此外, 还有得分函数和精确函数等研究, 万树平^[3]对直觉模糊多属性决策方法进行综述, 指出了未来的研究方向. 目前颇丰富的研究表明, 直觉模

糊现象和问题很重要. 集结算子是直觉模糊问题研究的重要主题, 不少人提出相应的方法^[9-15], 但往往只考虑决策过程中集结位置的重要性或集结元素自身的重要性, 并没有考虑决策者对数据分布疏密的主观偏好(简称密度偏好). 而密度算子^[18-21]关注密度偏好, 是解决精确信息问题的一种有效办法^[18], 也可以应用于模糊问题^[19,21], 但鲜有文献利用密度算子研究直觉模糊决策问题. 此外, 密度算子不同于其他算子, 本身有其特殊性. 对于直觉模糊问题, 如何集结密度偏好和其他信息, 密度集成算子性质是否优良, 都是直觉模糊信息集结的核心问题. 因此, 针对直觉模糊问题专门研究密度集成算子的应用具有重要意义和价值. 同时, 密度权向量是密度算子应用的基础, 如

收稿日期: 2016-05-31; 修回日期: 2016-08-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473118, 71172101); 湖南省高校创新平台开放基金项目(13K102); 湖南省自然科学基金项目(2015JJ2074); 湖南省科技计划项目(2016TP1021).

作者简介: 林友谅(1979—), 男, 讲师, 博士生, 从事决策分析的研究; 韩庆兰(1954—), 女, 教授, 博士生导师, 从事决策技术、现代成本功能等研究.

[†]通讯作者. E-mail: liwu0817@163.com

何简单有效地聚类也是密度算子应用的关键问题.

基于上述考虑,本文首先给出直觉模糊数的聚类方法,然后分析决策者偏好与密度权向量 ξ 的关系,并在此基础上,提出两种新的直觉模糊数密度集成算子,分析算子的性质,最后结合算例验证集结方法的有效性.

1 直觉模糊数聚类及密度权向量

1.1 预备知识

定义1^[2] 设 X 是一个非空集合,则称

$$A = \{(\mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in X\} \quad (1)$$

为直觉模糊集,其中 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 隶属于 A 的隶属度和非隶属度,即

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1], \quad (2)$$

$$\nu_A : X \rightarrow [0, 1]. \quad (3)$$

且满足条件

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, x \in X. \quad (4)$$

此外

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x), x \in X \quad (5)$$

表示 X 中元素 x 隶属于 A 的犹豫度.

为了方便起见,称 $\tilde{a} = (\mu_a, \nu_a)$ 为直觉模糊数.其中: $\mu_a \in [0, 1], \nu_a \in [0, 1], \mu_a + \nu_a \leq 1$.

文献[2, 9]给出了衡量直觉模糊数大小的一种记分函数法:令 $s(\tilde{a}) = \mu_a - \nu_a$ 为直觉模糊数得分函数, $h(\tilde{a}) = \mu_a + \nu_a$ 为直觉模糊数精确度函数.对于一组直觉模糊数 $\tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$,若得分函数值 $s(\tilde{a}_i)$ 大,则 $\tilde{a}_i$ 大;若得分函数值 $s(\tilde{a}_i)$ 相等,精确度函数值 $h(\tilde{a}_i)$ 大,则 $\tilde{a}_i$ 大.

定义2^[2] 对于两个直觉模糊数 $\tilde{a} = (\mu_a, \nu_a)$ 和 $\tilde{o} = (\mu_o, \nu_o)$, k 为清晰数,有以下基本运算规则:

$$1) \tilde{a} \oplus \tilde{o} = (\mu_a + \mu_o - \mu_a \mu_o, \nu_a \nu_o),$$

$$2) \tilde{a} \otimes \tilde{o} = (\mu_a \mu_o, \nu_a + \nu_o - \nu_a \nu_o),$$

$$3) k\tilde{a} = (1 - (1 - \mu_a)^k, \nu_a^k),$$

$$4) \tilde{a}^k = (\mu_a^k, 1 - (1 - \nu_a)^k).$$

1.2 直觉模糊数聚类

直觉模糊数本身反映一定的犹豫程度,其距离测度也应当表达出一定的犹豫程度.传统的直觉模糊距离公式以实数形式表示,造成信息的损失.文献[7]和文献[8]分别提出直觉模糊集相异度和相似度的测度公式,两者测度之和小于1,因此可借助相异度和相似度的公式构建体现直觉模糊特征的距离测度公式.

下面定义直觉模糊数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{o}$ 的距离测度:

$$d(\tilde{a}, \tilde{o}) = (D(\tilde{a}, \tilde{o}), S(\tilde{a}, \tilde{o})). \quad (6)$$

其中

$$D(\tilde{a}, \tilde{o}) = \sqrt[\rho]{(|\mu_a - \mu_o|^\rho + |\nu_a - \nu_o|^\rho)/2},$$

$$S(\tilde{a}, \tilde{o}) =$$

$$1 - \sqrt[\rho]{(|\mu_a - \mu_o|^\rho + |\nu_a - \nu_o|^\rho + |\pi_a - \pi_o|^\rho)/2},$$

$$1 \leq \rho \leq +\infty,$$

$D(\tilde{a}, \tilde{o})$ 表示直觉模糊相异度^[7], $S(\tilde{a}, \tilde{o})$ 表示直觉模糊相似度^[8].

当 $\rho = 1$ 时,式(6)为曼哈顿距离形式;当 $\rho = 2$ 时,式(6)为欧氏距离形式;当 $\rho = +\infty$ 时,式(6)为切比雪夫距离形式.文献[8]指出,对于特殊情况,采用 $\rho = 1$ 计算距离不合适.显然, $d(\tilde{a}, \tilde{o})$ 为直觉模糊数,与实数距离相比,能够减少信息的损失.

设 $\tilde{A}$ 为由 n 个直觉模糊数组成的数集,结合距离测度和树图聚类的基本思想,给出一种简单有效的聚类方法.

Step 1: 对式(6)选择 $\rho = 2$,建立直觉模糊数的距离测度矩阵

$$D(d_{ij}) = (d_{ij})_{n \times n} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中 d_{ij} 为 $\tilde{a}_i$ 与 $\tilde{a}_j$ 的距离,显然 $d_{ii} = (0, 1)$, $d_{ij} = d_{ji}$.

Step 2: 画最小树.以 $\tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为顶点, d_{ij} 为边长,画连通图 $P = (\tilde{a}_i, d_{ij})$,去掉图 P 中所有回路的最大边至没有任何回路,构成最小树.

Step 3: 聚类.截割水平 λ 表示分类的尺度标准,选择恰当的 λ ,采用文献[2, 9]的记分函数法进行比较.当 $\lambda \geq d_{ij}$ 时,将 d_{ij} 对应的边截断,剩余相连的顶点组成一个数组,形成多个 $\tilde{A}$ 的子类.

与其他聚类方法相比,该方法有如下特点:1)不需事先确定分类数,客观性较强;2)距离测度以直觉模糊数表示,既利用直觉模糊数的相异度,也考虑直觉模糊数的相似度;3)树图法聚类,方法简单,易于理解.

1.3 密度权向量

设 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m$ 为 $\tilde{A}$ 聚类后按元素个数从大到小排序的 m 个直觉模糊数集, $\tilde{A}_j$ 中数据元素个数为 $k_j (1 \leq k_j \leq n - 1)$.当 $j_1 \leq j_2$ 时,满足 $k_{j_1} \geq k_{j_2}$,则称 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m$ 为序化后 $\tilde{A}$ 的一维 m 组聚类^[18].

定义3^[18] 设 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ 为密度权向量,则

$$\xi_j = \beta_j(k_j/n) / \sum_{j=1}^m \beta_j(k_j/n). \quad (8)$$

其中: $\beta_j = (k_j/n)^a, j = 1, 2, \dots, m, a$ 为密度影响指数.

定义4^[18] 设 $T_a(\xi)$ 为 ξ 的“同性”测度, 则

$$T_a(\xi) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \frac{(m-j)\xi_j}{k_j/n} \frac{1}{\sum_{j=1}^m \xi_j(n/k_j)}, \quad (9)$$

其中 ξ_j 为 ξ 的一个元素, 表示数集 $\tilde{A}_j$ 的密度加权值. 文献[18]指出 $T_a(\xi)$ 是 a 的严格递增函数, 但未分析 $T_{-\infty}(\xi)$ 和 $T_{+\infty}(\xi)$ 的取值, 可以证明 $T_{-\infty}(\xi)$ 不一定等于 0, $T_{+\infty}(\xi)$ 不一定等于 1. 下面予以证明.

定理1 $0 \leq T_{-\infty}(\xi) \leq 0.5 \leq T_{+\infty}(\xi) \leq 1$.

证明 因为 $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$, 若 $k_1 = k_m$, 则 $\xi_1 = \xi_m = 1/m, T_a(\xi) = 0.5$, 此时 $T_{-\infty}(\xi) = T_{+\infty}(\xi) = 0.5$. 若 $k_1 > k_m$, 设这 m 个数中等于 k_1 的

数为 p 个, 等于 k_m 的数为 q 个.

先证 $0 \leq T_{-\infty}(\xi) \leq 0.5$. 若 $a \rightarrow -\infty$, 有 $\xi_1 = \xi_{m-q} = 0, \xi_{m-q+1} = \xi_m = 1/q$, 则

$$T_{-\infty}(\xi) = \frac{q-1}{2(m-1)}. \quad (10)$$

(推导略). 由式(10), 若 $q = 1$, 则 $T_{-\infty}(\xi) = 0$; 若 $q = m$, 则 $T_{-\infty}(\xi) = 0.5$. 因为 $T_{-\infty}(\xi)'_{(q)} > 0$, 所以 $0 \leq T_{-\infty}(\xi) \leq 0.5$.

再证 $0.5 \leq T_{+\infty}(\xi) \leq 1$. 若 $a \rightarrow +\infty$, 有 $\xi_1 = \xi_p = 1/p, \xi_{p+1} = \xi_m = 0$, 则

$$T_{+\infty}(\xi) = \frac{2m-p-1}{2(m-1)}. \quad (11)$$

(推导略). 由式(11), 若 $p = 1$, 则 $T_{+\infty}(\xi) = 1$; 若 $p = m$, 则 $T_{+\infty}(\xi) = 0.5$. 因为 $T_{+\infty}(\xi)'_{(p)} < 0$, 所以 $0.5 \leq T_{+\infty}(\xi) \leq 1$. $\square$

表1 “同性”测度的标度表

a 值	$T_a(\xi)$ 值	$T_a(\xi)$ 值的物理意义
$+\infty$	$T_{+\infty}(\xi)$	极度偏好数据分布密度高的属性(或群意见)
$(0, +\infty)$	$(0.5, T_{+\infty}(\xi))$	偏好数据分布密度高的属性(或群意见)
0	0.5	同等偏好各个属性(或群意见)
$(-\infty, 0)$	$(T_{-\infty}(\xi), 0.5)$	偏好数据分布密度低的属性(或群意见)
$-\infty$	$T_{-\infty}(\xi)$	极度偏好数据分布密度低的属性(或群意见)

“同性”测度 $T_a(\xi)$ 表示集结过程中决策者对数据分布疏密的偏好程度(见表1), $T_a(\xi)$ 随 a 的递增严格递增. 当 $a = 0$ 时, 则 $T_a(\xi) = 0.5$, 决策者对各属性的数据分布无疏密偏好; 当 $a > 0$ 时, 则 $T_a(\xi) > 0.5$, 决策者偏好“主体信息”, 偏好专家群的“群体共识”; 当 $a < 0$ 时, 则 $T_a(\xi) < 0.5$, 决策者偏好“个体信息”, 偏好专家群的“个体共识”. “同性”测度可根据决策者对数据分布的疏密偏好事先确定, 也可由密度影响指数 a 计算得出, 然后利用式(8)和(9)可确定密度权向量 ξ .

2 直觉模糊密度集成算子

设 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m$ 为序化后 $\tilde{A}$ 的一维 m 组聚类. 设 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ 为密度权向量, 则 $\xi_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^m \xi_j = 1, j = 1, 2, \dots, m$.

定义5^[2] 设 $\tilde{a}_i = (\mu_{a_i}, \nu_{a_i}) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为一组直觉模糊数, Θ 为直觉模糊数的集合. 如果 $\text{IFWA}_w: \Theta^n \rightarrow \Theta$ 满足

$$\text{IFWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = w_1 \tilde{a}_1 + w_2 \tilde{a}_2 + \dots + w_n \tilde{a}_n,$$

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为 $\tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的权重向量, $w_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, n)$ 且 $\sum_{j=1}^m w_i = 1$, 称函

数 IFWA_w 为直觉模糊加权平均算子.

$$\text{IFWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{a_i})^{w_i}, \prod_{i=1}^n \nu_{a_i}^{w_i}\right).$$

定义6 设 $\text{IFDWA}_\Lambda: \tilde{A}^n \rightarrow \tilde{A}$. 若

$$\text{IFDWA}_{\xi, \Lambda}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^m \xi_j \Lambda(\tilde{A}_j),$$

Λ 为某一信息集结算子, 则称 IFDWA_Λ 为直觉模糊密度加权平均中间算子.

定义7 设 $\text{IFDWA}_{w, \xi}: \tilde{A}^n \rightarrow \tilde{A}$. 若

$$\text{IFDWA}_{w, \xi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^m \xi_j \left[\sum_{i=1}^{k_j} \frac{w_{(i)}}{W_j} \tilde{a}_{(i)} \right]. \quad (12)$$

其中: $\tilde{a}_{(i)}$ 为数据集 $\tilde{A}_j$ 中的第 i 个元素, $\tilde{A}_j = \{\tilde{a}_i | i = 1, 2, \dots, k_j; j = 1, 2, \dots, m\}$, $\sum_{j=1}^m k_j = n; (w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(k_j)})$ 为 $(\tilde{a}_{(1)}, \tilde{a}_{(2)}, \dots, \tilde{a}_{(k_j)})$ 中的元素重要性权重向量, 满足 $\sum_{i=1}^{k_j} w_{(i)} / W_j = 1, w_{(i)} > 0$. 则称 $\text{IFDWA}_{w, \xi}$ 为直觉模糊密度加权平均集成算子.

若 $\tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 在分类时归属 $\tilde{A}_j (j = 1, 2, \dots, m)$, 由于

$$\sum_{j=1}^m \xi_j \left[\sum_{i=1}^{k_j} \frac{w(i)}{W_j} \tilde{a}_{(i)} \right] = \sum_{j=1}^m \frac{\xi_j}{W_j} \left[\sum_{i=1}^{k_j} w(i) \tilde{a}_{(i)} \right],$$

则

$$\text{IFDWA}_{w,\xi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{W_j} w_i \tilde{a}_i. \quad (13)$$

定理2 设 $\tilde{a}_i = (\mu_{a_i}, \nu_{a_i}) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为一组直觉模糊数, 则由 $\text{IFDWA}_{w,\xi}$ 得到的集成值也为直觉模糊数,

$$\text{IFDWA}_{w,\xi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{a_i})^{\xi_j w_i / W_j}, \prod_{i=1}^n \nu_{a_i}^{\xi_j w_i / W_j} \right). \quad (14)$$

证明 下面用数学归纳法证明:

1) 当 $n = 2, m = 2$ 时, 有 $\xi_1 + \xi_2 = 1, w_1 = W_1, w_2 = W_2$. 根据式(13), 有

$$\begin{aligned} \xi_1 w_1 \tilde{a}_1 / W_1 &= (1 - (1 - \mu_{a_1})^{\xi_1}, \nu_{a_1}^{\xi_1}), \\ \xi_2 w_2 \tilde{a}_2 / W_2 &= (1 - (1 - \mu_{a_2})^{\xi_2}, \nu_{a_2}^{\xi_2}), \\ \xi_1 w_1 \tilde{a}_1 / W_1 + \xi_2 w_2 \tilde{a}_2 / W_2 &= \\ (2 - (1 - \mu_{a_1})^{\xi_1} - (1 - \mu_{a_2})^{\xi_2} - \\ (1 - (1 - \mu_{a_1})^{\xi_1})(1 - (1 - \mu_{a_2})^{\xi_2}), \nu_{a_1}^{\xi_1} \nu_{a_2}^{\xi_2}) &= \\ (1 - (1 - \mu_{a_1})^{\xi_1} (1 - \mu_{a_2})^{\xi_2}, \nu_{a_1}^{\xi_1} \nu_{a_2}^{\xi_2}) &= \\ \left(1 - \prod_{i=1}^2 (1 - \mu_{a_i})^{\xi_j w_i / W_j}, \prod_{i=1}^2 \nu_{a_i}^{\xi_j w_i / W_j} \right). \end{aligned}$$

此时, 式(14)成立.

2) 假设 $n = k$ 时, 式(14)成立, 即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\xi_j}{W_j} w_i \tilde{a}_i &= \\ \left(1 - \prod_{i=1}^k (1 - \mu_{a_i})^{\xi_j w_i / W_j}, \prod_{i=1}^k \nu_{a_i}^{\xi_j w_i / W_j} \right). \end{aligned}$$

当 $n = k + 1$ 时, 由定义2的运算法则, 可得式(14)成立, 即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\xi_j}{W_j} w_i \tilde{a}_i &= \\ \left(1 - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \mu_{a_i})^{\xi_j w_i / W_j}, \prod_{i=1}^{k+1} \nu_{a_i}^{\xi_j w_i / W_j} \right). \end{aligned}$$

则式(14)对于任意 n 都成立. $\square$

可以证明 $\text{IFDWA}_{w,\xi}$ 具有幂等性、有界性等性质, 当 $T_a(\xi) = 0.5$ 时, $\text{IFDWA}_{w,\xi}$ 算子无法退化成 IFWA_w 算子(证明略). 下面提出一种直觉模糊密度混合算术平均集成算子.

定义8 设 $\text{IFDHAA}_{w,\xi} : \tilde{A}^n \rightarrow \tilde{A}$. 若

$$\text{IFDHAA}_{w,\xi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{i=1}^n \xi'_j w_i \tilde{a}_i / \sum_{i=1}^n \xi'_i w_i. \quad (15)$$

其中: $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为 $\tilde{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的权重向量, $w_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, n)$ 且 $\sum_{j=1}^n w_i =$

$1, \xi'_i = \xi_j / k_j$ 表示 $\tilde{a}_i$ 所属分类 $\tilde{A}_j$ 对应的密度权系数 ξ_j 与元素数量 k_j 之商. 则称函数 $\text{IFDHAA}_{w,\xi}$ 为直觉模糊密度混合算术平均集成算子. 可以证明 $\text{IFDHAA}_{w,\xi}$ 具有幂等性、有界性等优良性质, 特别地, 当 $T_a(\xi) = 0.5$ 时, $\text{IFDHAA}_{w,\xi}$ 算子退化成 IFWA_w 算子(证明略).

定理3 设 $\tilde{a}_i = (\mu_{a_i}, \nu_{a_i}) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为一组直觉模糊数, 则由 $\text{IFDHAA}_{w,\xi}$ 得到的集成值也为直觉模糊数,

$$\text{IFDHAA}_{w,\xi}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{a_i})^{\frac{\xi'_j w_i}{\sum_{i=1}^n \xi'_i w_i}}, \prod_{i=1}^n \nu_{a_i}^{\frac{\xi'_j w_i}{\sum_{i=1}^n \xi'_i w_i}} \right). \quad (16)$$

证明 同定理2, 首先根据数学归纳法可以证明

$$\sum_{i=1}^n \xi'_j w_i \tilde{a}_i = \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{a_i})^{\xi'_j w_i}, \prod_{i=1}^n \nu_{a_i}^{\xi'_j w_i} \right)$$

成立, 然后再根据定义2可以证明式(16)成立. $\square$

3 应用算例

选用文献[15]的算例, 对直觉模糊数密度集成算子的应用进行说明. 客观属性权重为 $w = (0.15, 0.25, 0.14, 0.16, 0.20, 0.10)^T$, 决策者存在数据分布疏密偏好, 规范化决策数据见表2.

表2 规范化决策矩阵

方案	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
Y_1	(0.5, 0.3)	(0.6, 0.1)	(0.3, 0.4)	(0.8, 0.1)	(0.1, 0.6)	(0.5, 0.4)
Y_2	(0.3, 0.6)	(0.5, 0.2)	(0.1, 0.6)	(0.7, 0.1)	(0.3, 0.6)	(0.4, 0.3)
Y_3	(0.4, 0.4)	(0.8, 0.1)	(0.1, 0.5)	(0.6, 0.2)	(0.4, 0.5)	(0.3, 0.2)
Y_4	(0.4, 0.2)	(0.4, 0.1)	(0.0, 0.9)	(0.8, 0.1)	(0.2, 0.5)	(0.7, 0.1)
Y_5	(0.2, 0.5)	(0.3, 0.6)	(0.3, 0.6)	(0.7, 0.1)	(0.6, 0.2)	(0.5, 0.3)

3.1 应用步骤

以方案 Y_1 为例, 直觉模糊数密度集成算子的具体应用步骤如下.

1) 直觉模糊数聚类. 选择 $\rho = 2$, 建立距离测度矩阵

$$D(d_{ij}) = \begin{bmatrix} (0.00, 1.00) & (0.16, 0.83) & (0.16, 0.83) \\ (0.16, 0.83) & (0.00, 1.00) & (0.30, 0.70) \\ (0.16, 0.83) & (0.30, 0.70) & (0.00, 1.00) \\ (0.26, 0.74) & (0.14, 0.80) & (0.41, 0.56) \\ (0.35, 0.64) & (0.50, 0.50) & (0.20, 0.80) \\ (0.07, 0.90) & (0.22, 0.74) & (0.14, 0.80) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.26, 0.74) & (0.35, 0.64) & (0.07, 0.90) \\ (0.14, 0.80) & (0.50, 0.50) & (0.22, 0.74) \\ (0.41, 0.56) & (0.20, 0.80) & (0.14, 0.80) \\ (0.00, 1.00) & (0.61, 0.38) & (0.30, 0.70) \\ (0.61, 0.38) & (0.00, 1.00) & (0.32, 0.66) \\ (0.30, 0.70) & (0.32, 0.65) & (0.00, 1.00) \end{bmatrix}.$$

画连通图 $P = (\tilde{a}_i, d_{ij})$, 得到图 1 所示的最小树.

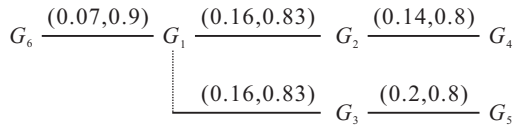


图 1 最小树图 P

表 3 中, $(0.2, 0.8) \sim (1, 0)$ 表示截割水平 λ 的取值在直觉模糊数 $(0.2, 0.8)$ 与 $(1, 0)$ 之间. 选择 λ 值为 $(0.2, 0.8)$, 则方案 Y_1 的属性值聚类为两个子集, $\tilde{A}_1 = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_6\}$, $\tilde{A}_2 = \{G_5\}$.

表 3 截割水平 λ 不同取值及其分类结果

λ 值	聚类结果
$(0.20, 0.80) \sim (1.00, 0.00)$	$\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}$
$(0.16, 0.83) \sim (0.20, 0.80)$	$\{G_1, G_6, G_2, G_4, G_3\}, \{G_5\}$
$(0.14, 0.80) \sim (0.16, 0.83)$	$\{G_1, G_6\}, \{G_2, G_4\}, \{G_3\}, \{G_5\}$
$(0.07, 0.90) \sim (0.14, 0.80)$	$\{G_1, G_6\}, \{G_2\}, \{G_4\}, \{G_3\}, \{G_5\}$
$(0.00, 1.00) \sim (0.07, 0.90)$	$\{G_1\}, \{G_6\}, \{G_2\}, \{G_4\}, \{G_3\}, \{G_5\}$

表 4 参数与密度权向量对应表

n	m	k_1	k_2	k_3	a	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$T_a(\xi)$
6	2	5	1		-5	0.001 6	0.998 4		0.000 3
6	2	5	1	0	-1	0.500 0	0.500 0		0.166 7
6	2	5	1		0	0.833 3	0.166 7		0.500 0
6	2	5	1		0.4	0.904 9	0.095 1		0.655 6
6	2	5	1		1	0.961 5	0.038 5		0.833 3
6	2	5	1		5	0.999 9	0.000 1		0.999 7
6	3	3	2	1	-1	0.333 3	0.333 3	0.333 3	0.318 2
6	3	3	2	1	0	0.500 0	0.333 3	0.166 7	0.500 0
6	3	3	2	1	0.924 2	0.633 3	0.290 2	0.076 5	0.655 6
6	2	4	2		0.928 5	0.792 0	0.208 0		0.655 6
6	4	2	2	1	1.46	0.423 1	0.423 1	0.076 9	0.655 6
6	2	3	3		1	0.500 0	0.500 0		0.500 0

表 5 聚类结果与密度权向量表

方案	聚类结果	密度权向量 ξ
Y_1	$\{G_1, G_6, G_2, G_4, G_3\}, \{G_5\}$	$(0.904 9, 0.095 1)^T$
Y_2	$\{G_1, G_3, G_5, G_6\}, \{G_2, G_4\}$	$(0.792 0, 0.208)^T$
Y_3	$\{G_1, G_5, G_6\}, \{G_2, G_4\}, \{G_3\}$	$(0.633 3, 0.290 2, 0.076 5)^T$
Y_4	$\{G_1, G_2\}, \{G_4, G_6\}, \{G_3\}, \{G_5\}$	$(0.423 1, 0.423 1, 0.076 9, 0.076 9)^T$
Y_5	$\{G_1, G_2, G_3\}, \{G_4, G_5, G_6\}$	$(0.5, 0.5)^T$

表 6 决策方案直觉模糊数算子集成值及排序

方案	IFDWA _{w,ξ}		IFDHAA _{w,ξ}		IFWA _w	
	集成值	序次	集成值	序次	集成值	序次
Y_1	(0.556 4, 0.208 2)	2	(0.549 1, 0.213 3)	2	(0.518 5, 0.235 3)	2
Y_2	(0.357 0, 0.411 2)	5	(0.378 3, 0.381 7)	5	(0.426 8, 0.319 3)	5
Y_3	(0.502 6, 0.284 3)	3	(0.533 8, 0.263 1)	3	(0.540 8, 0.254 8)	1
Y_4	(0.571 8, 0.149 6)	1	(0.534 1, 0.152 9)	1	(0.465 7, 0.208 2)	3
Y_5	(0.474 7, 0.312 9)	4	(0.460 9, 0.328 3)	4	(0.460 9, 0.328 3)	4

2) 密度权向量的确定. 选择表示决策者偏好的密度影响指数 a 或 $T_a(\xi)$, 由式 (8) 和 (9) 可计算出密度权向量 $\xi_{Y_1} = [\xi_{1Y_1}, \xi_{2Y_1}, \dots]^T$. 如表 4 所示, 若 $a = 0.4$, 则 $T_a(\xi) = 0.655 6$, $\xi_{Y_1} = [[0.904 9, 0.095 1]^T$.

3) 决策信息的集结. 利用定义 7 的 IFDWA_{w,ξ} 算子和式 (14), 则方案 Y_1 的集成值为 (0.556 4, 0.208 2). 利用定义 8 的 IFDHAA_{w,ξ} 算子和式 (16), 则方案 Y_1 的集成值为 (0.549 1, 0.213 3).

同上, 取 λ 值为 $(0.2, 0.8)$, 分别对方案 Y_2 、 Y_3 、 Y_4 、 Y_5 进行截割聚类, 设决策者的“同性”测度 $T(\xi)$ 为 0.655 6, 利用式 (8) 和 (9) 可得如表 5 所示的聚类结果和密度权向量. 利用本文密度集成算子进行集结, 各方案的集成值见表 6. 按文献 [2, 9] 的记分函数法排序, 得 IFDWA_{w,ξ} : $Y_4 > Y_1 > Y_3 > Y_5 > Y_2$, IFDHAA_{w,ξ} : $Y_4 > Y_1 > Y_3 > Y_5 > Y_2$.

3.2 结果分析

为了验证本文集结方法的有效性,首先与直觉模糊加权平均(IFWA_w)算子^[2]进行比较(见表6),由于IFWA_w算子不考虑密度偏好,表6密度集成算子下决策者偏好“主体信息”,而方案4和方案1“主体信息”的属性值偏大,因此密度集成算子下方案4和方案1的集成值上升,方案4因“主体信息”属性值更大排名上升到第1位,说明密度集成算子有效.其次,若 $T_a(\xi) = 0.5$ 时(同等偏好各个属性),则IFDHAA_{w,ξ}算子退化为IFWA_w算子,IFDHAA_{w,ξ}算子的集成值(见表8)和IFWA_w算子的集成值(见表6)完全一致.然而,由于确定权重时对组内属性按元素重要性进行归一化处理,IFDWA_{w,ξ}算子不能退化为IFWA_w算子.可见,IFDHAA_{w,ξ}算子比IFDWA_{w,ξ}算子性质优良.

表7 各方案下IFDWA_{w,ξ}集成值随 $T_a(\xi)$ 的取值情况

方案	$T_a(\xi) = 0.2$	$T_a(\xi) = 0.4$	$T_a(\xi) = 0.5$	$T_a(\xi) = 0.6$
Y_1	(0.417 1, 0.313 3)	(0.506 8, 0.244 0)	(0.530 9, 0.226 3)	(0.548 5, 0.213 7)
Y_2	(0.504 7, 0.231 6)	(0.432 9, 0.312 0)	(0.401 3, 0.351 5)	(0.372 2, 0.390 2)
Y_3	(0.418 1, 0.319 8)	(0.492 6, 0.282 6)	(0.504 5, 0.278 5)	(0.505 9, 0.280 7)
Y_4	(0.176 7, 0.566 6)	(0.430 5, 0.267 4)	(0.499 4, 0.205 7)	(0.549 5, 0.165 9)
Y_5	(0.474 7, 0.312 9)	(0.474 7, 0.312 9)	(0.474 7, 0.312 9)	(0.474 7, 0.312 9)

表8 各方案下IFDHAA_{w,ξ}集成值随 $T_a(\xi)$ 的取值情况

方案	$T_a(\xi) = 0.2$	$T_a(\xi) = 0.4$	$T_a(\xi) = 0.5$	$T_a(\xi) = 0.6$
Y_1	(0.391 2, 0.334 3)	(0.490 3, 0.256 2)	(0.518 5, 0.235 3)	(0.539 6, 0.220 1)
Y_2	(0.523 8, 0.212 5)	(0.458 7, 0.281 6)	(0.426 8, 0.319 3)	(0.395 5, 0.358 9)
Y_3	(0.469 5, 0.288 7)	(0.533 1, 0.256 9)	(0.540 8, 0.254 8)	(0.538 9, 0.258 5)
Y_4	(0.182 0, 0.544 4)	(0.402 6, 0.267 9)	(0.465 7, 0.208 2)	(0.512 8, 0.169 1)
Y_5	(0.460 9, 0.328 3)	(0.460 9, 0.328 3)	(0.460 9, 0.328 3)	(0.460 9, 0.328 3)

表3中不同截割水平下的分类情况和表5中不同方案的聚类结果表明本文聚类方法有效.然而,聚类标准 λ 值和“同性”测度 $T_a(\xi)$ 值的选择离不开决策者的主观选择,可选择多个 λ 值和 $T_a(\xi)$ 值以支持决策分析.

与文献[18-19]相同,本文对方案分别聚类,各方案属性分组不同,强调决策者对数据分布疏密偏好的作用,体现“变权”的思想,本文得出与文献[18-19]相同的结论:密度集成算子既关注元素自身重要性,又关注决策者的密度偏好;决策者的密度偏好影响方案的排序.在文献[18]的基础上,本文将实数型密度集成算子扩展到直觉模糊环境,并提出性质更优良的IFDHAA_{w,ξ}算子.与文献[21]相比,本文并不将直觉模糊数转化为区间数,而是直接对直觉模糊数进行聚类 and 集结.此外,本文算例体现一维密度集结算子的特点,在决策分析时,密度集成算子也可对直觉模糊

为了进一步验证本文集结方法的有效性,再比较 $T(\xi)$ 值增大时各集成值的变化情况.随着 $T(\xi)$ 的递增,“主体信息”的权重递增.如表7和表8所示:由于方案1和方案4“主体信息”的隶属度偏大,非隶属度偏小,两种密度集成算子集成值的隶属度均递增,非隶属度均递减;案4的“个体信息”值比方案1的“个体信息”值更小,因此密度集成值变动幅度更大.由于方案2各属性值聚类时“主体信息”的隶属度偏小,非隶属度偏大,因此两种密度算子集成值的隶属度均递减,非隶属度均递增;由于方案5各属性值聚类时被平均聚成两类,两种密度算子集成值的隶属度和非隶属度保持不变.因此,密度集成算子的有效性得到验证,对于有数据分布疏密偏好的决策问题,适宜利用密度集成算子进行信息集结.

向量进行集结和拓展.

4 结 论

本文针对决策者有数据分布疏密偏好的直觉模糊问题,以属性值为精确形式的密度算子为基础,提出了直觉模糊密度中间算子以及两种新的集成算子,给出了直觉模糊数聚类方法和密度集成算子应用的步骤,比较了两种直觉模糊密度集成算子IFDWA_{w,ξ}与IFDHAA_{w,ξ}的差异.文中直觉模糊数的距离测度体现直觉模糊特征,不仅考虑直觉模糊数的相似度,而且考虑直觉模糊数的相异度,结合树图思想的聚类方法简单有效.算例表明,密度集成算子强调数据分布疏密程度,得到的排序结果与原有的算子存在差异,利用密度算子相当于决策者在决策过程中考虑其对“主体信息”或“个体信息”的偏好,在解决有数据分布疏密偏好的决策问题时优于其他算子.因此,本文算子有良好效果,通过密度算子调节能够更好地实

现决策过程主客观信息的融合。

参考文献(References)

- [1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [2] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
(Xu Z S. Intuitionistic fuzzy information integration theory and application[M]. Beijing: Science Publishing Press, 2008.)
- [3] 万树平. 直觉模糊多属性决策方法综述[J]. *控制与决策*, 2010, 25(11): 1601-1606.
(Wan S P. Survey on intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making approach[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(11): 1601-1606.)
- [4] Bustince H. Construction of intuitionistic fuzzy relations with predetermined properties[J]. *Fuzzy Sets Systems*. 2000, 109(3): 379-403.
- [5] De S K, Biswas R, Roy A R. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 117(2): 209-213.
- [6] Li D F. Multi-attribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. *J of Computer and System Sciences*, 2005, 70(1): 73-85.
- [7] Li D F. Some measures of dissimilarity in intuitionistic fuzzy structures[J]. *J of Computer and System Sciences*, 2004, 68(1): 115-122.
- [8] Liu H W. New similarity measures between intuitionistic fuzzy sets and between elements[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, 42(1/2): 61-70.
- [9] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2007, 15: 1179-1187.
- [10] Liu P D, Liu Y. An approach to multiple attribute group decision making based on intuitionistic trapezoidal fuzzy power generalized aggregation operator[J]. *Int J of Computational Intelligence Systems*, 2014, 7(2): 291-304.
- [11] Wei G W. Some induced geometric aggregation operators with intuitionistic fuzzy information and the application to group decision making[J]. *Applied Soft Computing*, 2010, 10(2): 423-431.
- [12] 刘培德, 张新. 直觉不确定语言集成算子及在群决策中的应用[J]. *系统工程理论与实践*, 2012, 28(1): 124-130.
(Liu P D, Zhang X. Intuitionistic uncertain linguistic aggregation operators and their application to group decision making[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2012, 28(1): 124-130.)
- [13] Liu P D, Wang Y M. Multiple attribute group decision making methods based on intuitionistic linguistic power generalized aggregation operators[J]. *Applied soft computing*, 2014, 17: 90-104.
- [14] Liu P D. Some Hamacher aggregation operators based on the interval-valued intuitionistic fuzzy numbers and their application to Group Decision Making[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2014, 22(1): 83-97.
- [15] 吴冲, 王琦. 基于改进直觉模糊集成算子的多属性决策方法及其应用研究[J]. *运筹与管理*, 2013, 22(6): 71-77.
(Wu C, Wang Q. Research on the multiple attribute decision making and application based on improved intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. *Operations Research and Management Science*, 2013, 22(6): 71-77.)
- [16] Montero J, Gomez D. Preferences, classification and intuitionistic fuzzy sets[J]. *European Society for Fuzzy Logic and Technology*, 2003, 15(3): 345-350.
- [17] Wang Z, Xu Z S, Liu S S, et al. A netting clustering analysis method under intuitionistic fuzzy environment[J]. *Applied Soft Computing*, 2011, 11(8): 5558-5564.
- [18] 易平涛, 郭亚军, 张丹宁. 密度加权平均中间算子及其在多属性决策中的应用[J]. *控制与决策*, 2007, 22(5): 515-524.
(Yi P T, Guo Y J, Zhang D N. Density weighted averaging middle operator and application in multiattribute decision making[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(5): 515-524.)
- [19] 易平涛, 李伟伟, 郭亚军. 二元语义密度算子及其在多属性决策中的应用[J]. *控制与决策*, 2012, 27(5): 758-760.
(Yi P T, Li W W, Guo Y J. Two-tuple linguistic density operator and its application in multi-attribute decision making[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(5): 758-760.)
- [20] Angelov P, Yager R. Density-based averaging — A new operator for data fusion[J]. *Information Sciences*, 2013, 222(6): 163-174.
- [21] Liu P D, Yu X C. Density aggregation operators based on the intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers for multiple attribute decision making[J]. *Technological and Economic Development of Economy*, 2013, 19: 454-470.

(责任编辑: 齐 霁)