第 32 卷 第 6 期
2017 年 6 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.32 No.6
Jun. 2017

文章编号: 1001-0920(2017)06-1084-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.0892

时变时滞神经网络的时滞相关鲁棒稳定性和耗散性分析

肖伸平†, 练红海, 陈 刚, 冯 磊

(1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007；
2. 电传动控制与智能装备湖南省重点实验室，湖南 株洲 412007)

摘 要: 研究时变时滞神经网络的鲁棒稳定性和耗散性问题. 充分利用积分项的时滞信息和激励函数条件构造一个合适的增广 LK 泛函; 利用自由矩阵积分不等式处理 LK 泛函的导数, 得到一个低保守性的时滞相关稳定判据; 将所获得的结论延伸至神经网络的耗散性分析, 并推导出一个确保神经网络严格 $(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$-$\gamma$-耗散的充分条件. 最后通过 3 个数值算例验证了所提出方法的可行性和优越性.

关键词: 神经网络；稳定性；耗散性；自由矩阵积分不等式；时变时滞

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Delay-dependent robust stability and dissipativity analysis of neural networks with time-varying delays

XIAO Shen-ping†, LIAN Hong-hai, CHEN Gang, FENG Lei

(1. School of Electrical and Information Engineering，Hu'nan University of Technology，Zhuzhou 412007，China；2. Key Laboratory for Electric Drive Control and Intelligent Equipment of Hu'nan Province，Zhuzhou 412007，China)

Abstract: The problems of robust delay-dependent stability and dissipativity for neural networks(NNs) with time-varying delay is investigated. A proper augmented Lyapunov-Krasovskii functional(LKF) is constructed, which fully utilizes the information of time-delay in integral term and the neuron activation function conditions. Then, by employing the free-matrix-based integral inequality to handle the derivative of the LKF, a less conservative delay-dependent stability criteria is obtained. The acquired conclusion is extended to the analysis of dissipativity for delayed NNs, and a suficient condition is derived to guarantee the NNs strictly$(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z})$-$\gamma$-dissipative. The superiority and feasibility of presented approaches are verified via three numerical examples.

Keywords: neural network；stability；dissipativity；free-matrix-based integral inequality；time-varying delay

0 引 言

神经网络模型类似人类大脑神经元的链接结构, 可由不同形式的微分方程描述, 近 10 几年来受到了国内外学者的广泛关注, 并在信号处理、定点计算、优化问题、联想记忆等工程领域扮演着重要角色[1-2]. 神经网络在实际应用中需要稳定工作, 但由于神经元信号传输和放大器切换频率的速度有限, 时滞的出现是不可避免的. 时滞的频繁出现使得系统的性能急剧下降甚至不稳定, 因此众多学者针对时变时滞神经网络 (TVDNN) 的各种问题进行了研究, 并获得了许多杰出的成果[3-5].

目前, 人们主要利用 Lyapunov-Krasovskii(LK) 泛函和积分不等式的方法来分析 TVDNN 系统的稳定性和耗散性问题, 因此, 选取合适的 LK 泛函和保守性小的不等式对其稳定性和耗散性进行分析极其重要. 针对 TVDNN 系统的稳定性问题, 文献 [6] 利用保留更多的时延状态信息和增广向量, 构造了一个新的 LK 泛函, 获得了 TVDNN 系统的时滞相关稳定条件. 文献 [7] 在文献 [6] 的基础上, 提出了一个新颖的激励函数条件, 并引入带有三重积分的 LK 泛函来进一步分析 TVDNN 的稳定性. 文献 [8] 提出一种基于二次的矩阵凸组合方法来研究 TVDNN 系统的稳定性, 并得到了一些稳定条件. 文献 [9] 利用二次时滞分割的方法, 获得了保守性小的 TVDNN 系统的稳定判据,

收稿日期: 2016-07-12；**修回日期:** 2016-10-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61672225, 61304064)；国家火炬计划项目 (2015GH712901)；湖南省自然科学基金项目 (2015JJ3064, 2015JJ5021)；湖南省教育厅科研基金项目 (15B067)；广东省特种光纤材料与器件工程技术研究开发中心开放基金项目.

作者简介: 肖伸平 (1965−), 男, 教授, 从事鲁棒控制、过程控制、时滞系统等研究；练红海 (1990−), 男, 硕士生, 从事鲁棒控制、神经网络、时滞系统的研究.

†通讯作者. E-mail: xsph_519@163.com

此方法的缺点是增加了推导的复杂性和CPU的运行时间. 另一方面,在控制系统中,耗散性问题也备受人们的关注,因为耗散性是比稳定性、无源性更为重要和一般的性能指标. 实际上,耗散理论是Kalman-Yakubovich引理、无源理论以及圆判据的广义化[3]. 因此,耗散性对TVDNN系统的稳定性分析、鲁棒控制及混沌和同步控制起着重要作用并得到了广泛应用. 文献[10]研究了TVDNN系统的鲁棒耗散性问题,并将所获得的结果用于进一步研究参数不确定的TVDNN系统. 最近,文献[11]在充分考虑神经元激励函数信息的基础上,使用Writinger积分不等式估计LK泛函的导数,得到了具有更低保守性的全局稳定准则,并将所得到的结果用于分析其耗散性问题,获得了TVDNN耗散性的充分条件. 文献[7-11]中,在对LK泛函导数进行处理时,一些重要的状态信息和激励函数信息被忽略,因此系统的保守性尚有很大的提升空间.

本文针对TVDNN系统,充分利用积分项中的时滞信息和激励函数条件构造一个合适的LK泛函; 使用凸优化的方法,处理时滞和时滞导数之间的关系; 利用自由矩阵积分不等式估计LK泛函的导数,以获得保守性更低的TVDNN系统的稳定条件,并将所得到的结论推广到TVDNN系统的耗散性分析; 最后,通过数值实例说明了所提出方法的可行性和相比现有结果的优越性.

本文采用如下记号: $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^{n\times m}$ 分别代表实数域的 n 维向量空间和 $n\times m$ 矩阵空间; $\mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 表示对角矩阵; A^{-1} 和 A^{T} 分别表示矩阵的逆和转置; 0 和 I 分别代表合适维数的零矩阵和单位矩阵; $\boldsymbol{S}^n(\boldsymbol{S}^n_+)$ 和 $\boldsymbol{D}^n(\boldsymbol{D}^n_+)$ 分别代表对称矩阵(正定对称矩阵)和对角矩阵(正定对角矩阵); $\mathrm{Sym}\{M\} = M + M^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 M 与其转置之和; “$*$”代表矩阵中的对称项.

1　问题描述

考虑如下平衡点在初始位置的时变时滞神经网络系统[1]:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = \\ -Cx(t) + W_1 g(W_0 x(t)) + W_2 g(W_0 x(t-d(t))), \\ x(t) = \phi(t),\ \bar{\tau} \leqslant t \leqslant 0.\end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(\cdot) = [x_1(\cdot)\ \ x_2(\cdot)\ \ \cdots\ \ x_n(\cdot)]^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统状态向量; $\phi(t)$ 是初始条件; $C = \mathrm{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \in \boldsymbol{D}^n, W_0$,、$W_1$、$W_2 \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为神经元连接权值矩阵. 时滞 $d(t)$ 是一个连续有界的可微函数,满足

$$0 < d(t) < \bar{\tau}, \tag{2}$$

$$-\mu_D \leqslant \dot{d}(t) \leqslant \mu_D, \tag{3}$$

其中 $\bar{\tau}$ 和 μ_D 是已知常数. 神经元激励函数 $g(\cdot) = [g_1(\cdot)\ \ g_2(\cdot)\ \ \cdots\ \ g_n(\cdot)]^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n, g_i(0) = 0$,满足下面的假设:

假设1　在系统(1)中,函数 $g_i(\cdot)$ 是连续的且满足

$$l_i^- \leqslant \frac{g_i(W_{0i}\alpha_1) - g_i(W_{0i}\alpha_2)}{W_{0i}\alpha_1 - W_{0i}\alpha_2} \leqslant l_i^+. \tag{4}$$

其中: $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}^n,\ \alpha_1 \neq \alpha_2, l_i^-$、$l_i^+$ 是已知标量; W_{0i} 表示矩阵 W_0 的第 i 行行向量,并定义 $L_1 = \mathrm{diag}\{l_1^+, l_2^+, \cdots,\ l_n^+\}$ 和 $L_2 = \mathrm{diag}\{l_1^-, l_2^-, \cdots, l_n^-\}$.

当模型(1)中出现外部输入扰动量时,模型(1)可转换为

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = -Cx(t) + W_1 g(W_0 x(t)) + \\ \qquad W_2 g(W_0 x(t-d(t))) + u(t), \\ y(t) = g(W_0 x(t)), \\ x(t) = \phi(t),\ \bar{\tau} \leqslant t \leqslant 0.\end{cases} \tag{5}$$

其中: $y(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 是系统输出向量; $u(t)$ 是系统的外部输入扰动量,假设满足 $u(t) \in K_2[0,\infty)$,意味着它是一个有限的能量函数.

为了引入耗散性的性能指标,定义如下的能量函数:

$$F(u, y, t^*) = \\ \langle y, \mathcal{X} y\rangle_{t^*} + 2\langle y, \mathcal{Y} u\rangle_{t^*} + \langle u, \mathcal{Z} u\rangle_{t^*}. \tag{6}$$

其中: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 是实数矩阵,且 $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$ 是对称的. 另外,定义 $\langle \alpha, \beta\rangle_{t^*} = \int_0^{t^*} \alpha^{\mathrm{T}}\beta \mathrm{d}t$.

为了获得稳定性和耗散性条件,引入下面定义和引理:

定义1[11]　在零初始条件下,若存在标量 $\gamma > 0$,对 $\forall\, t^* > 0$,使得下面不等式成立:

$$F(u, y, t^*) \geqslant \gamma\langle u, u\rangle_{t^*}, \tag{7}$$

则系统(5)是严格 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$-$\gamma$-耗散的.

引理1　对于正定对称矩阵 $R \in \boldsymbol{S}^n_+$, 常数 β_1, β_2,向量函数 $x : [\beta_1, \beta_2] \rightarrow \boldsymbol{R}^n$,以及任意矩阵 $G_i \in \boldsymbol{R}^{4n\times n} (i = 1, 2, 3)$,有

$$-\int_{\beta_1}^{\beta_2} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R \dot{x}(s) \mathrm{d}s \leqslant \hat{\varpi}^{\mathrm{T}}\hat{\Theta}\hat{\varpi}. \tag{8}$$

其中

$$\hat{\Theta} = \\ \tau\Big(G_1 R^{-1} G_1^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3} G_2 R^{-1} G_2^{\mathrm{T}} + \frac{1}{5} G_3 R^{-1} G_3^{\mathrm{T}}\Big) + \\ \mathrm{Sym}\{G_1 \bar{H}_1 + G_2 \bar{H}_2 + G_3 \bar{H}_3\}, \\ \bar{H}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2,\ \ \bar{H}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3,$$

$\bar{H}_3 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 6\bar{e}_3 - 6\bar{e}_4,\ \tau = \beta_2 - \beta_1,$

$\bar{e}_i = [0_{n\times(i-1)n}\quad I_n\quad 0_{n\times(4-i)n}],\ i = 1,2,3,4,$

$$\hat{\varpi} = \Big[x^{\mathrm{T}}(\beta_2)\quad x^{\mathrm{T}}(\beta_1)\quad \frac{1}{\tau}\int_{\beta_1}^{\beta_2} x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \rightarrow$$
$$\leftarrow \frac{2}{\tau^2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\theta}^{\beta_2} x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\Big]^{\mathrm{T}}.$$

2 主要结果

首先,在推导的过程中,为了简化表达,定义下面的记号:

$\bar{\tau}_d(t) = \bar{\tau} - d(t),\ \bar{d}(t) = 1 - \dot{d}(t),\ g(t) = g(W_0x(t));$

$$\upsilon_1(t) = \int_{t-d(t)}^{t} g(s)\mathrm{d}s,\ \upsilon_3(t) = \frac{1}{d(t)}\int_{t-d(t)}^{t} x(s)\mathrm{d}s,$$

$$\upsilon_2(t) = \int_{t-\bar{\tau}}^{t-d(t)} g(s)\mathrm{d}s,\ \upsilon_4(t) = \frac{1}{\bar{\tau}_d(t)}\int_{t-\bar{\tau}}^{t-d(t)} x(s)\mathrm{d}s,$$

$$\upsilon_5(t) = \frac{2}{d^2(t)}\int_{-d(t)}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$\upsilon_6(t) = \frac{2}{\bar{\tau}_d^2(t)}\int_{-\bar{\tau}}^{-d(t)}\int_{t+\theta}^{t-d(t)} x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta;$$

$\chi_1(t) =$

$[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-d(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-\bar{\tau})\quad \upsilon_1^{\mathrm{T}}(t)+\upsilon_2^{\mathrm{T}}(t)\quad \rightarrow$

$\leftarrow d(t)\upsilon_3^{\mathrm{T}}(t)\quad \bar{\tau}_d(t)\upsilon_4^{\mathrm{T}}(t)\quad d(t)\upsilon_5^{\mathrm{T}}(t)\quad \bar{\tau}_d(t)\upsilon_6^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$

$\chi_2(s) =$

$$\Big[x^{\mathrm{T}}(s)\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\quad g^{\mathrm{T}}(s)\quad \int_{s}^{t}\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\quad \int_{t-\bar{\tau}}^{s}\dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]^{\mathrm{T}},$$

$\chi_3(t) = [\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad g^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$

$\chi_4(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad g^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}};$

$\xi_1(t) = [\chi_4^{\mathrm{T}}(t)\quad \chi_4^{\mathrm{T}}(t-d(t))\quad \chi_4^{\mathrm{T}}(t-\bar{\tau})]^{\mathrm{T}},$

$\xi_2(t) = [\upsilon_1^{\mathrm{T}}(t)\quad \upsilon_2^{\mathrm{T}}(t)\quad \upsilon_3^{\mathrm{T}}(t)\quad \upsilon_4^{\mathrm{T}}(t)\quad \upsilon_5^{\mathrm{T}}(t)\quad \upsilon_6^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}};$

$\eta(t) = [\xi_1^{\mathrm{T}}(t)\quad \xi_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}};$

$e_i = [0_{n\times(i-1)n}\quad I_n\quad 0_{n\times(15-i)n}], i = 1,2,\cdots,15.$

基于增广LK泛函和积分不等式的方法,可得系统(1)的稳定性条件如下:

定理1 给定时滞参数$\bar{\tau} > 0$和$0 < \mu_D < 1$,时滞$d(t)$与其导数满足条件(2)和(3). 如果存在对称矩阵$P \in \boldsymbol{S}_+^{8n}, Q_1, Q_2 \in \boldsymbol{S}_+^{5n}, R_1, R_2 \in \boldsymbol{S}_+^{n}$,对角矩阵$\Lambda_i \in \boldsymbol{D}_+^{n}(i = 1,2,\cdots,4)$和$\Sigma_k \in \boldsymbol{D}_+^{n}(k = 1,2,3)$,以及任意矩阵$U \in \boldsymbol{R}^{2n\times 2n}, G_i \in \boldsymbol{R}^{4n\times n}(i = 1,2,3)$, $D_j \in \boldsymbol{R}^{4n\times n}(j = 1,2,3)$和矩阵$M_1, M_2 \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$,使得下面的LMI成立:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \Phi(\bar{\tau},\mu_D) - \Xi(\bar{\tau}) & \Theta_{11} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} \Phi(\bar{\tau},-\mu_D) - \Xi(\bar{\tau}) & \Theta_{11} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} \Phi(0,\mu_D) - \Xi(0) & \Theta_{21} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

$$\Theta_4 = \begin{bmatrix} \Phi(0,-\mu_D) - \Xi(0) & \Theta_{21} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

$$\Theta_5 = \begin{bmatrix} R_1 & U \\ * & R_1 \end{bmatrix} > 0, \tag{13}$$

则系统(1)是鲁棒全局时滞相关渐近稳定的. 其中

$\Phi(d(t),\dot{d}(t)) =$

$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Xi(d(t)).$

$\Phi_1 = \mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}(d(t))P\mathcal{H}_2(\dot{d}(t))+$

$e_3^{\mathrm{T}}(\Lambda_1 - \Lambda_2)W_0e_2 + \bar{d}(t)e_6^{\mathrm{T}}(\Lambda_3 - \Lambda_4)W_0e_5+$

$e_1^{\mathrm{T}}W_0^{\mathrm{T}}(L_1\Lambda_2 - L_2\Lambda_1)W_0e_2+$

$\bar{d}(t)e_4^{\mathrm{T}}W_0^{\mathrm{T}}(L_1\Lambda_4 - L_2\Lambda_3)W_0e_5 + \mathcal{H}_{19}^{\mathrm{T}}\mathcal{H}_{20}\},$

$\Phi_2 =$

$\mathcal{H}_3^{\mathrm{T}}Q_1\mathcal{H}_3 + \bar{d}(t)\mathcal{H}_4^{\mathrm{T}}(Q_2 - Q_1)\mathcal{H}_4 - \mathcal{H}_5^{\mathrm{T}}Q_2\mathcal{H}_5+$

$\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_6^{\mathrm{T}}(d(t))Q_1\mathcal{H}_8 + \mathcal{H}_7^{\mathrm{T}}(d(t))Q_2\mathcal{H}_8\},$

$\Phi_3 = \bar{\tau}^2\mathcal{H}_9^{\mathrm{T}}R_1\mathcal{H}_9 - \mathcal{H}_{10}^{\mathrm{T}}\Theta_5\mathcal{H}_{10} + \bar{\tau}e_2^{\mathrm{T}}R_2e_2,$

$\Xi(d(t)) =$

$$d(t)\mathcal{H}_{11}^{\mathrm{T}}\Big[G_1R_2^{-1}G_1^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}G_2R_2^{-1}G_2^{\mathrm{T}}+$$
$$\frac{1}{5}G_3R_2^{-1}G_3^{\mathrm{T}}\Big]\mathcal{H}_{11} + \bar{\tau}_d(t)\mathcal{H}_{15}^{\mathrm{T}}\Big[D_1R_2^{-1}D_1^{\mathrm{T}}+$$
$$\frac{1}{3}D_2R_2^{-1}D_2^{\mathrm{T}} + \frac{1}{5}D_3R_2^{-1}D_3^{\mathrm{T}}\Big]\mathcal{H}_{15},$$

$\Phi_4 =$

$\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_{11}^{\mathrm{T}}G_1\mathcal{H}_{12} + \mathcal{H}_{11}^{\mathrm{T}}G_2\mathcal{H}_{13} + \mathcal{H}_{11}^{\mathrm{T}}G_3\mathcal{H}_{14}+$

$\mathcal{H}_{15}^{\mathrm{T}}D_1\mathcal{H}_{16} + \mathcal{H}_{15}^{\mathrm{T}}D_2\mathcal{H}_{17} + \mathcal{H}_{15}^{\mathrm{T}}D_3\mathcal{H}_{18}\},$

$\Phi_5 =$

$\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_{21}^{\mathrm{T}}\Sigma_1\mathcal{H}_{22} + \mathcal{H}_{23}^{\mathrm{T}}\Sigma_2\mathcal{H}_{24} + \mathcal{H}_{25}^{\mathrm{T}}\Sigma_3\mathcal{H}_{26}\},$

$\Theta_{11} = [\bar{\tau}\mathcal{H}_{11}^{\mathrm{T}}G_1\quad \bar{\tau}\mathcal{H}_{11}^{\mathrm{T}}G_2\quad \bar{\tau}\mathcal{H}_{11}^{\mathrm{T}}G_3],$

$\Theta_{21} = [\bar{\tau}\mathcal{H}_{15}^{\mathrm{T}}D_1\quad \bar{\tau}\mathcal{H}_{15}^{\mathrm{T}}D_2\quad \bar{\tau}\mathcal{H}_{15}^{\mathrm{T}}D_3],$

$\Theta_{22} = \mathrm{diag}\{-\bar{\tau}R_2\quad -3\bar{\tau}R_2\quad -5\bar{\tau}R_2\},$

$\mathcal{H}_1^0(d(t)) =$

$[e_1^{\mathrm{T}}\quad e_4^{\mathrm{T}}\quad e_7^{\mathrm{T}}\quad e_{10}^{\mathrm{T}} + e_{11}^{\mathrm{T}}\quad d(t)e_{12}^{\mathrm{T}}\quad \bar{\tau}_d(t)e_{13}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_1(d(t)) = [\mathcal{H}_1^{0\,\mathrm{T}}(d(t))\quad d(t)e_{14}^{\mathrm{T}}\quad \bar{\tau}_d(t)e_{15}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_2^0(\dot{d}(t)) =$

$[e_2^{\mathrm{T}}\quad \bar{d}(t)e_5^{\mathrm{T}}\quad e_8^{\mathrm{T}}\quad e_3^{\mathrm{T}} - e_9^{\mathrm{T}}\quad e_1^{\mathrm{T}} - \bar{d}(t)e_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_2^1(\dot{d}(t)) =$

$[\bar{d}(t)e_4^{\mathrm{T}} - e_7^{\mathrm{T}}\quad 2e_1^{\mathrm{T}} - 2\bar{d}(t)e_{12}^{\mathrm{T}} - \dot{d}(t)e_{14}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_2^2(\dot{d}(t)) = [2\bar{d}(t)e_4^{\mathrm{T}} - 2e_{13}^{\mathrm{T}} + \dot{d}(t)e_{15}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_2(\dot{d}(t)) =$

$[\mathcal{H}_2^{0\,\mathrm{T}}(\dot{d}(t))\quad \mathcal{H}_2^{1\,\mathrm{T}}(\dot{d}(t))\quad \mathcal{H}_2^{2\,\mathrm{T}}(\dot{d}(t))]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_3 = [e_1^{\mathrm{T}}\quad e_2^{\mathrm{T}}\quad e_3^{\mathrm{T}}\quad 0\quad e_1^{\mathrm{T}} - e_7^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_4 = [e_4^{\mathrm{T}}\quad e_5^{\mathrm{T}}\quad e_6^{\mathrm{T}}\quad e_1^{\mathrm{T}} - e_4^{\mathrm{T}}\quad e_4^{\mathrm{T}} - e_7^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$

$\mathcal{H}_5=[e_7^{\mathrm{T}}\quad e_8^{\mathrm{T}}\quad e_9^{\mathrm{T}}\quad e_1^{\mathrm{T}}-e_7^{\mathrm{T}}\quad 0]^{\mathrm{T}}$,

$\mathcal{H}_6^0(d(t))=$

$[d(t)e_{12}^{\mathrm{T}}\quad e_1^{\mathrm{T}}-e_4^{\mathrm{T}}\quad e_{10}^{\mathrm{T}}\quad d(t)(e_1^{\mathrm{T}}-e_{12}^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}$,

$\mathcal{H}_6(d(t))=[\mathcal{H}_6^{0\,\mathrm{T}}(d(t))\quad d(t)(e_{12}^{\mathrm{T}}-e_7^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}$,

$\mathcal{H}_7^0(d(t))=$

$[\bar{\tau}_d(t)e_{13}^{\mathrm{T}}\quad e_4^{\mathrm{T}}-e_7^{\mathrm{T}}\quad e_{11}^{\mathrm{T}}\quad \bar{\tau}_d(t)(e_1^{\mathrm{T}}-e_{13}^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}$,

$\mathcal{H}_7(d(t))=[\mathcal{H}_6^{0\,\mathrm{T}}(d(t))\quad \bar{\tau}_d(t)(e_{13}^{\mathrm{T}}-e_7^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}}$,

$\mathcal{H}_8=[0\quad 0\quad 0\quad e_2^{\mathrm{T}}\quad -e_8^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{H}_9=[e_2^{\mathrm{T}}\quad e_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$

$\mathcal{H}_{10}=[e_1^{\mathrm{T}}-e_4^{\mathrm{T}}\quad e_{10}^{\mathrm{T}}\quad e_4^{\mathrm{T}}-e_7^{\mathrm{T}}\quad e_{11}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,

$\mathcal{H}_{11}=[e_1^{\mathrm{T}}\quad e_4^{\mathrm{T}}\quad e_{12}^{\mathrm{T}}\quad e_{14}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{H}_{12}=e_1-e_4$,

$\mathcal{H}_{13}=e_1+e_4-2e_{12}$,

$\mathcal{H}_{14}=e_1-e_4+6e_{12}-6e_{14}$,

$\mathcal{H}_{15}=[e_4^{\mathrm{T}}\quad e_7^{\mathrm{T}}\quad e_{13}^{\mathrm{T}}\quad e_{15}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{H}_{16}=e_4-e_7$,

$\mathcal{H}_{17}=e_4+e_7-2e_{13}$,

$\mathcal{H}_{18}=e_4-e_7+6e_{13}-6e_{15}$,

$\mathcal{H}_{19}=[e_1^{\mathrm{T}}M_1+e_2^{\mathrm{T}}M_2]^{\mathrm{T}}$,

$\mathcal{H}_{20}=-Ce_1-e_2+W_1e_3+W_2e_6$,

$\mathcal{H}_{21}=e_3-L_2W_0e_1$, $\mathcal{H}_{24}=L_1W_0e_4-e_6$,

$\mathcal{H}_{22}=L_1W_0e_1-e_3$,

$\mathcal{H}_{25}=e_3-e_6-L_2W_0(e_1-e_4)$,

$\mathcal{H}_{23}=e_6-L_2W_0e_4$,

$\mathcal{H}_{26}=L_1W_0(e_1-e_4)-e_3+e_6$

证明 选取增广LK泛函如下:

$$V(x_t)=\sum_{i=1}^{5}V_i(x_t).\tag{14}$$

其中

$$V_1(x_t)=\chi_1^{\mathrm{T}}(t)P\chi_1(t),$$

$$\begin{aligned}V_2(x_t)=&2\sum_{i=1}^{n}\lambda_{1i}\int_0^{W_{0i}x(t)}(g_i(s)-l_i^-s)\mathrm{d}s+\\&2\sum_{i=1}^{n}\lambda_{2i}\int_0^{W_{0i}x(t)}(l_i^+s-g_i(s))\mathrm{d}s+\\&2\sum_{i=1}^{n}\lambda_{3i}\int_0^{W_{0i}x(t-d(t))}(g_i(s)-l_i^-s)\mathrm{d}s+\\&2\sum_{i=1}^{n}\lambda_{4i}\int_0^{W_{0i}x(t-d(t))}(l_i^+s-g_i(s))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_3(x_t)=&\int_{t-d(t)}^{t}\chi_2^{\mathrm{T}}(s)Q_1\chi_2(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{t-\bar{\tau}}^{t-d(t)}\chi_2^{\mathrm{T}}(s)Q_2\chi_2(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$V_4(x_t)=\bar{\tau}\int_{-\bar{\tau}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\chi_3^{\mathrm{T}}(s)R_1\chi_3(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$V_5(x_t)=\int_{-\bar{\tau}}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

对角矩阵$\Lambda_i=\mathrm{diag}\{\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in}\}(i=1,2,3,4)$和$\Sigma_k=\mathrm{diag}\{\sigma_{k1},\sigma_{k2},\cdots,\sigma_{kn}\}(k=1,2,3)$. 计算泛函$V(x_t)$的导数,有

$$\dot{V}_1(x_t)=\eta^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_1^{\mathrm{T}}(d(t))P\mathcal{H}_2(\dot{d}(t))\}\eta(t),\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_t)=&\eta^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{Sym}\{e_3^{\mathrm{T}}(\Lambda_1-\Lambda_2)W_0e_2+\\&e_1^{\mathrm{T}}W_0^{\mathrm{T}}(L_1\Lambda_2-L_2\Lambda_1)W_0e_2+\\&\bar{d}(t)e_4^{\mathrm{T}}W_0^{\mathrm{T}}(L_1\Lambda_4-L_2\Lambda_3)W_0e_5+\\&\bar{d}(t)e_6^{\mathrm{T}}(\Lambda_3-\Lambda_4)W_0e_5\}\eta(t),\end{aligned}\tag{16}$$

$$\dot{V}_3(x_t)=\eta^{\mathrm{T}}(t)\Phi_2\eta(t),\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(x_t)=&\eta^{\mathrm{T}}(t)[\bar{\tau}^2\mathcal{H}_9^{\mathrm{T}}R_1\mathcal{H}_9]\eta(t)-\\&\bar{\tau}\int_{t-\bar{\tau}}^{t}\chi_3^{\mathrm{T}}(s)R_1\chi_3(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\dot{V}_5(x_t)=\\&\eta^{\mathrm{T}}(t)[\bar{\tau}e_2^{\mathrm{T}}R_2e_2]\eta(t)-\int_{t-\bar{\tau}}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{19}$$

首先,使用Jense's积分不等式[13]和逆凸组合[14]处理式(18)中的一次积分项. 推导得

$$\begin{aligned}&-\bar{\tau}\int_{t-\bar{\tau}}^{t}\chi_3^{\mathrm{T}}(s)R_1\chi_3(s)\mathrm{d}s=\\&-\bar{\tau}\int_{t-d(t)}^{t}\chi_3^{\mathrm{T}}(s)R_1\chi_3(s)\mathrm{d}s-\\&\bar{\tau}\int_{t-\bar{\tau}}^{t-d(t)}\chi_3^{\mathrm{T}}(s)R_1\chi_3(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&-\frac{\bar{\tau}}{d(t)}\eta^{\mathrm{T}}(t)\Gamma_1^{\mathrm{T}}R_1\Gamma_1\eta(t)-\\&\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_d(t)}\eta^{\mathrm{T}}(t)\Gamma_2^{\mathrm{T}}R_1\Gamma_2\eta(t)\leqslant\\&-\eta^{\mathrm{T}}(t)\mathcal{H}_{10}^{\mathrm{T}}\Theta_5\mathcal{H}_{10}\eta(t).\end{aligned}\tag{20}$$

其中: $\Gamma_1=[e_1^{\mathrm{T}}-e_4^{\mathrm{T}}\quad e_{10}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\Gamma_2=[e_4^{\mathrm{T}}-e_7^{\mathrm{T}}\quad e_{11}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

其次,使用引理1中的自由矩阵不等式[11]估计式(19)中的积分项,可得

$$\begin{aligned}&-\int_{t-\bar{\tau}}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s=\\&-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-\bar{\tau}}^{t-d(t)}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&\eta^{\mathrm{T}}(t)[\Xi(d(t))+\Phi_4]\eta(t).\end{aligned}\tag{21}$$

另外,若存在任意合适维数的矩阵M_1, M_2, 则有下面等式成立:

$$\begin{aligned}0=&[x^{\mathrm{T}}(t)M_1+\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)M_2][-\dot{x}(t)-Cx(t)+\\&W_1g(W_0x(t))+W_2g(W_0x(t-d(t)))]=\\&\eta^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_{19}^{\mathrm{T}}\mathcal{H}_{20}\}\eta(t).\end{aligned}\tag{22}$$

又由式(4)可知,对于任意的对角矩阵$\Sigma_k\geqslant 0, k=1,2,3$, 有

$$2[g(t)-L_2W_0x(t)]^{\mathrm{T}}\Sigma_1[L_1W_0x(t)-g(t)]\geqslant 0,\tag{23}$$

$$2[g(t-d(t))-L_2W_0x(t-d(t))]^{\mathrm{T}}\times$$

$$\Sigma_2[L_1W_0x(t-d(t))-g(t-d(t))]\geqslant 0, \tag{24}$$

$$2[g(t)-g(t-d(t))-L_2W_0(x(t)-x(t-d(t)))]^{\mathrm{T}}\times \Sigma_2[L_1W_0(x(t)-x(t-d(t)))-g(t)+ g(t-d(t))]\geqslant 0. \tag{25}$$

化简式(23)～(25), 得

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_{21}^{\mathrm{T}}\Sigma_1\mathcal{H}_{22}\}\eta(t)\geqslant 0, \tag{26}$$

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_{23}^{\mathrm{T}}\Sigma_2\mathcal{H}_{24}\}\eta(t)\geqslant 0, \tag{27}$$

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_{25}^{\mathrm{T}}\Sigma_3\mathcal{H}_{26}\}\eta(t)\geqslant 0. \tag{28}$$

结合式(15)～(22)和式(26)～(28), 可得

$$\dot V(x_t)\leqslant \eta^{\mathrm{T}}(t)\varPhi(d(t),\dot d(t))\eta(t). \tag{29}$$

注1 在式(29)中,$\varPhi(d(t),\dot d(t))$包含时滞$d(t)$和时滞导数$\dot d(t)$的交叉乘积项,不能直接使用LMI工具箱处理. 此时,可利用凸优化的方法解决. 其中$\varPhi(d(t),\dot d(t))$也可写为如下形式:

$$\varPhi(d(t),\dot d(t))= \Omega_1+\dot d(t)\Omega_2+d(t)[\Omega_3+\dot d(t)\Omega_4], \tag{30}$$

其中$\Omega_k(k=1,2,3,4)$为系统的时滞相关矩阵.

接下来,处理时滞$d(t)$和时滞导数$\dot d(t)$的交叉乘积项. 首先,令$\mu_1=-\mu_D$和$\mu_2=\mu_D$,则有下面的等式成立:

$$\begin{aligned}&\Omega_1+\dot d(t)\Omega_2=\Omega_1+\mu_1\Omega_2+(\dot d(t)-\mu_1)\Omega_2=\\&\frac{\mu_2-\dot d(t)}{\mu_2-\mu_1}(\Omega_1+\mu_1\Omega_2)+\\&\frac{\dot d(t)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}(\Omega_1+\mu_1\Omega_2+(\mu_2-\mu_1)\Omega_2)=\\&\frac{\mu_2-\dot d(t)}{\mu_2-\mu_1}(\Omega_1+\mu_1\Omega_2)+\frac{\dot d(t)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}(\Omega_1+\mu_2\Omega_2)=\\&\frac{\mu_2-\dot d(t)}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(0,-\mu_D)+\frac{\dot d(t)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(0,\mu_D).\end{aligned}$$

同理,可得

$$\begin{aligned}&\Omega_1+\dot d(t)\Omega_2+\bar\tau[\Omega_3+\dot d(t)\Omega_4]=\\&\Omega_1+\bar\tau\Omega_3+\dot d(t)[\Omega_2+\Omega_4]=\\&\Omega_1+\bar\tau\Omega_3+\mu_1[\Omega_2+\Omega_4]+(\dot d(t)-\mu_1)[\Omega_2+\Omega_4]=\\&\frac{\mu_2-\dot d(t)}{\mu_2-\mu_1}(\Omega_1+\bar\tau\Omega_3+\mu_1[\Omega_2+\Omega_4])+\\&\frac{\dot d(t)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}(\Omega_1+\bar\tau\Omega_3+\mu_2[\Omega_2+\Omega_4])=\\&\frac{\mu_2-\dot d(t)}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(\bar\tau,-\mu_D)+\frac{\dot d(t)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(\bar\tau,\mu_D).\end{aligned}$$

进一步,可得

$$\begin{aligned}&\varPhi(d(t),\dot d(t))=\\&\Omega_1+\dot d(t)\Omega_2+d(t)[\Omega_3+\dot d(t)\Omega_4]=\\&\frac{\bar\tau-d(t)}{\bar\tau}(\Omega_1+\dot d(t)\Omega_2)+\\&\frac{d(t)}{\bar\tau}(\Omega_1+\dot d(t)\Omega_2+\bar\tau[\Omega_3+\dot d(t)\Omega_4])=\\&\frac{\bar\tau-d(t)}{\bar\tau}\Big(\frac{\mu_2-\dot d(t)}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(0,-\mu_D)+\\&d\frac{\dot d(t)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(0,\mu_D)\Big)+\\&\frac{d(t)}{\bar\tau}\Big(\frac{\mu_2-\dot d(t)}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(\bar\tau,-\mu_D)+\frac{\dot d(t)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\varPhi(\bar\tau,\mu_D)\Big).\end{aligned}$$

可知,$\varPhi(d(t),\dot d(t))$是关于$d(t)\in[0,\bar\tau]$的矩阵凸组合,也是关于$\dot d(t)\in[-\mu_D,\mu_D]$的矩阵凸组合. 因此,使用凸组合的方法,如果下面的不等式成立:

$$\varPhi(\bar\tau,\mu_D)<0,\ \varPhi(\bar\tau,-\mu_D)<0, \tag{31}$$

$$\varPhi(0,\mu_D)<0,\ \varPhi(0,-\mu_D)<0, \tag{32}$$

则等价于

$$\varPhi(d(t),\dot d(t))|_{d(t)\in\{0,\bar\tau\},\dot d(t)\in\{-\mu_D,\mu_D\}}<0\Rightarrow \tag{33}$$

$$\varPhi(d(t),\dot d(t))<0. \tag{34}$$

另一方面,使用Schur补引理,式(31)和LMI(32)分别等价于式(9)、(10)和(11)、(12). 也就是说,如果式(9)～(11)成立,则$\varPhi(d(t),\dot d(t))<0$,因此有$\dot V(x_t)<0$. 此时,系统(1)是全局渐近稳定的. □

注2 由文献[6-11]知,增广LK泛函能有效减少稳定判据的保守性,但忽略了一些重要信息. 定理1针对TVDNN系统,构造了一个新的增广LK泛函,使其涵盖更多信息. 即在泛函$V_1(x_t)$的增广向量$\chi_1(t)$中,首次引入了二重积分项$\dfrac{2}{d(t)}\displaystyle\int_{-d(t)}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$和$\dfrac{2}{\bar\tau_d(t)}\displaystyle\int_{-\bar\tau}^{-d(t)}\int_{t+\theta}^{t-d(t)}x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$,充分考虑了二重积分项里中时滞$d(t)$信息,有效减小了系统(1)的保守性. 其次,在泛函$V_3(x_t)$中考虑了在文献[6-11]中被忽略的积分项$\displaystyle\int_{t-\bar\tau}^{t-d(t)}\chi_2^{\mathrm{T}}(s)Q_2\chi_2(s)\mathrm{d}s$,并在增广向量$\chi_2(t)$中考虑了交叉项$\displaystyle\int_s^t\dot x(\theta)\mathrm{d}\theta$ 和$\displaystyle\int_{t-\bar\tau}^{s}\dot x(\theta)\mathrm{d}\theta$. 同时,与文献[6-11]相比,这里考虑了更多的时滞状态信息和激励函数信息,因此,本文获得的稳定判据较文献[6-11]具有更低的保守性.

注3 在泛函$V_3(x_t)$的导数中,引入了分布时滞$\displaystyle\int_{t-d(t)}^{t}g(s)\mathrm{d}s$和$\displaystyle\int_{t-\bar\tau}^{t-d(t)}g(s)\mathrm{d}s$,这个因素在一定程度上降低了系统(1)的保守性. 对于利用自由矩阵积分不等式估计泛函$V_5(x_t)$导数中的积分项(即式(21)),在处理$x(t)$、$x(t-d(t))$、$\upsilon_3(t)$、$\upsilon_5(t)$之间的关系和$x(t-d(t))$、$x(t-\bar\tau)$、$\upsilon_4(t)$、$\upsilon_6(t)$之间的关系时,引入了自由矩阵G_1、G_2、G_3和D_1、D_2、D_3,这使得它比其他的积分不等式(如Jense's和Wirtinger's不等式)有更大的自由度和更低的保守性.

利用耗散性理论,将上面得到的稳定性条件扩展到对系统(5)的耗散性分析.

定理2 给定时滞参数$\bar{\tau} > 0$和$0 < \mu_D < 1$,时滞$d(t)$与其导数满足条件(2)和(3). 如果存在对称矩阵$P \in \boldsymbol{S}_+^{8n}, Q_1, Q_2 \in \boldsymbol{S}_+^{5n}, R_1, R_2 \in \boldsymbol{S}_+^{n}$,对角矩阵$\varLambda_i \in \boldsymbol{D}_+^n (i = 1, 2, \cdots, 4)$和$\varSigma_k \in \boldsymbol{D}_+^n (k = 1, 2, 3)$,以及任意矩阵$U \in \boldsymbol{R}^{2n\times 2n}, G_i \in \boldsymbol{R}^{4n\times n} (i = 1, 2, 3), D_j \in \boldsymbol{R}^{4n\times n} (j = 1, 2, 3)$和矩阵$M_1, M_2 \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, 标量$\gamma > 0$,以及LMI(13)成立,且满足

$$\varOmega_1 = \begin{bmatrix} \varPi(\bar{\tau}, \mu_D) - \varXi(\bar{\tau}) & \varTheta_{11} \\ * & \varTheta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{35}$$

$$\varOmega_2 = \begin{bmatrix} \varPi(\bar{\tau}, -\mu_D) - \varXi(\bar{\tau}) & \varTheta_{11} \\ * & \varTheta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{36}$$

$$\varOmega_3 = \begin{bmatrix} \varPi(0, \mu_D) - \varXi(0) & \varTheta_{21} \\ * & \varTheta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{37}$$

$$\varOmega_4 = \begin{bmatrix} \varPi(0, -\mu_D) - \varXi(0) & \varTheta_{21} \\ * & \varTheta_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{38}$$

则称系统(5)是严格$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$-$\gamma$-耗散的. 其中

$$\varPi(d(t), \dot{d}(t)) = \varPhi(d(t), \dot{d}(t)) + \varPi_1.$$

$$\varPi_1 = \mathrm{Sym}\{\mathcal{H}_{19}^{\mathrm{T}} \bar{e}_{16}\} - \bar{e}_3^{\mathrm{T}} \mathcal{X} \bar{e}_3 - \mathrm{Sym}\{\bar{e}_3^{\mathrm{T}} \mathcal{Y} \bar{e}_{16}\} - \bar{e}_{16}^{\mathrm{T}} (\mathcal{Z} - \gamma I) \bar{e}_{16},$$

$$\zeta(t) = [\xi_1^{\mathrm{T}}(t) \quad \xi_2^{\mathrm{T}}(t) \quad u^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{e}_i = [0_{n\times(i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n\times(16-i)n}],\ i = 1, 2, \cdots, 16.$$

$\varPhi(d(t), \dot{d}(t))$在定理1已定义,注意定理1中的向量矩阵$e_1 \sim e_{15}$由$\bar{e}_1 \sim \bar{e}_{15}$代替.

证明 为了展示系统(5)的耗散性,选择LK泛函(14)和定义系统(5)的性能指标如下:

$$J_{\gamma, t^*} = \int_0^{t^*} F(t) \mathrm{d}t. \tag{39}$$

其中$F(t) = y^{\mathrm{T}}(t) \mathcal{X} y(t) + 2y^{\mathrm{T}}(t) \mathcal{Y} u(t) + u^{\mathrm{T}}(t)(\mathcal{Z} - \gamma I) u(t), t^* > 0$. 另外,由零初始条件,可得

$$J_{\gamma, t^*} = \int_0^{t^*} [\dot{V}(x_t) - F(t)] \mathrm{d}t - V(x_t) \leqslant \int_0^{t^*} [\dot{V}(x_t) - F(t)] \mathrm{d}t. \tag{40}$$

由定理1的证明,可知

$$\dot{V}(x_t) - F(t) \leqslant \varPi(d(t), \dot{d}(t)). \tag{41}$$

此时,如果式(35) $\sim$ (38)成立,利用Schur补引理,则等价于

$$\varPi(\bar{\tau}, \mu_D) < 0,\ \varPi(\bar{\tau}, -\mu_D) < 0; \tag{42}$$

$$\varPi(0, \mu_D) < 0,\ \varPi(0, -\mu_D) < 0. \tag{43}$$

由式(42)和(43),使用凸组合的方法,推导可得

$$\varPi(d(t), \dot{d}(t))|_{d(t)\in\{0, \bar{\tau}\}, \dot{d}(t)\in\{-\mu_D, \mu_D\}} < 0 \Rightarrow \tag{44}$$

$$\varPi(d(t), \dot{d}(t)) < 0. \tag{45}$$

若式(45)成立,则

$$\dot{V}(x_t) - F(t) \leqslant 0. \tag{46}$$

同时,由式(40)可知,对于任意的$t^* > 0$,有

$$J_{\gamma, t^*} \leqslant 0. \tag{47}$$

也就是说,条件(7)成立,意味着神经网络(5)是严格$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$-$\gamma$-耗散的. □

注4 在定理2中,条件(35) ~ (38)不仅含有矩阵变量,而且含有性能指标γ. 对于给定的常量$\bar{\tau}, u_D$,利用定理2可获得最优耗散性能指标γ^*.

3 数值实例

例1 考虑TVDNN系统(1),系统的参数矩阵为

$$C = \mathrm{diag}\{1.5, 0.7\},\ W_0 = I_2,$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.0503 & 0.0454 \\ 0.0987 & 0.2075 \end{bmatrix},\ W_2 = \begin{bmatrix} 0.2381 & 0.9320 \\ 0.0388 & 0.5062 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \mathrm{diag}\{0.3, 0.8\},\ L_2 = \mathrm{diag}\{0, 0\}.$$

该实例已在文献[6]和文献[7]中研究过,对于不同的μ_D,利用定理1所得到的最大允许时滞上界$\bar{\tau}$如表1所示. 由表1可知,相对于文献[6]和文献[7], 采用本文方法所得到的结果有很大改善.

表 1 不同μ_D情况下所得到的最大允许时滞上界$\bar{\tau}$(例1)

方法	条件$\dot{d}(t)$	μ_D 0.40	0.45	0.50	0.55
文献[6]	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	4.8401	4.0626	3.8083	3.7064
文献[7]	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	9.7094	7.7523	6.8570	6.2977
定理1	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	10.1352	8.8886	8.3928	8.1210

例2 考虑TVDNN系统(1), 系统的参数矩阵为

$$C = \mathrm{diag}\{7.3458, 6.9987, 5.5949\},$$

$$L_1 = \mathrm{diag}\{0.3680, 0.1795, 0.2876\},$$

$$L_2 = \mathrm{diag}\{0, 0, 0\}, W_1 = 0, W_2 = I_3,$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} 13.6014 & -2.9616 & -0.6936 \\ 7.4736 & 21.6810 & 3.2100 \\ 0.7920 & -2.6334 & -20.1300 \end{bmatrix}.$$

采用该实例与文献[5]、文献[8]和文献[10]提出的方法作比较. 对于不同μ_D,利用定理1所得到的最大允许时滞上界$\bar{\tau}$如表2所示,其中“$-$”表示该文献没有提供相应的计算结果. 由表2可看出,使用本文方法所得到的结果优于文献[5]、文献[8]和文献[10]的结果.

表 2 不同μ_D情况下所得到的最大允许时滞上界$\bar{\tau}$(例2)

方法	条件$\dot{d}(t)$	μ_D 0.1	0.3	0.5	0.9
文献[5]	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	0.8411	0.5496	0.4267	0.3227
文献[8]	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	1.1114	—	0.4514	—
文献[11]	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	1.1153	0.6710	0.5090	0.4305
定理1	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	1.1381	0.6852	0.5282	0.4490

在配置相同的电脑上使用LMI工具箱对例1和例2进行仿真,通过定理1获得的最大时滞上界$\bar{\tau}$的程序运行时间是不同的. 针对例1,取$\mu_D = 0.4$,获得时滞上界$\bar{\tau} = 10.1352$,程序运行时间为$t = 41.45\,\mathrm{s}$; 针对例2,取$\mu_D = 0.1$,获得时滞上界$\bar{\tau} = 1.1381$, 程序运行时间为$t = 89.55\,\mathrm{s}$. 可以看出,LMI的维度越高、矩阵参数的个数越多,程序的运行时间越长. 从这个角度看,本文提出的方法优于时滞分割的方法,因为随着分割段数增加,LMI的维度和矩阵参数也随着增加,从而程序运行的时间也是急剧增加的.

例3 考虑TVDNN系统(5),系统的参数矩阵为

$$C = \mathrm{diag}\{7.0214, 7.4367\},\ W_1 = 0, W_2 = I_2,$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} -6.4993 & -12.0275 \\ -0.6867 & 5.6614 \end{bmatrix},\ L_1 = \mathrm{diag}\{0.4, 0.4\},$$

$$L_2 = \mathrm{diag}\{0, 0\},\ \mathcal{X} = \mathrm{diag}\{-1, -1\},$$

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

使$\bar{\tau} = 0.3$,对于不同的μ_D,使用定理2以及文献[10]所得到的最优耗散性能指标γ^*如表3所示. 由表3可知,使用本文定理2所得到的结果优于文献[10]的结果.

表3 不同μ_D情况下所得到的最优耗散性能指标γ^*

方法	条件$\dot{d}(t)$	μ_D 0.3	0.5	0.7	0.9
文献[11]	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	1.5185	1.5032	1.4932	1.4857
定理2	$\lvert\dot{d}(t)\rvert \leqslant \mu_D$	1.5323	1.5248	1.5209	1.5180

4 结 论

本文利用增广LK泛函和自由矩阵积分不等式方法进一步讨论了TVDNN系统的时滞相关鲁棒稳定性以及耗散性问题. 在处理增广LK泛函$V(x_t)$的导数时,考虑了更多有用信息,并在对泛函导数的估计时引入了一些自由矩阵. 使用矩阵凸组合的方法处理时滞$d(t)$与其导数$\dot{d}(t)$之间的关系,得到了两个具有更低保守性的时滞相关条件. 最后,通过数值算例表明了所提出的方法具有更低的保守性和相比现有结果的优越性.

本文提出的方法可以推广到分析其他系统的控制综合问题,如随机神经网络、基因调控网络等. 今后将会在如何选择一个简单有效的LK泛函以及如何减小LK泛函层数的放大方面作进一步研究.

参考文献(References)

[1] Zhang X M, Han Q L. Global asymptotic stability for a class of generalized neural networks with interval time-varying delays[J]. IEEE Trans Neural Netw, 2011, 22(8): 1180-1192.

[2] 井元伟, 张锐, 王占山. 二次规划问题的变时滞神经网络模型的全局指数稳定[J]. 控制与决策. 2010, 25(6): 921-924.
(Jing Y W, Zhang R, Wang Z S. Global exponential stability of neural network models with time-varying delay for quadratic programming problem[J]. Control and Decision, 2010, 25(6): 921-924.)

[3] Zeng H B, He Y, Shi P, et al. Dissiptivity analysis of neural network with time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2015, 168: 741-746.

[4] 李亚军, 邓飞其, 彭云建. 变时滞模糊随机细胞神经网络新的鲁棒稳定性[J]. 控制与决策, 2011, 26(8): 1197-1202.
(Li Y J, Deng Y Q, Peng Y J. New robust stability of fuzzy stochastic cellular neural network models with time-varying delay[J]. Control and Decision, 2011, 26(8): 1197-1202.)

[5] Bai Y Q, Chen J. New stability criteria for recurrent neural networks with interval time-varying delay[J]. Neurocomputing, 2013, 121: 179-184.

[6] Kwon O M, Kwon J W, Kim S H. New results on stability criteria for neural network with time-varying delays[J]. Chin Phys B, 2011, 20(5): 163-173.

[7] Kwon O M, Park M J, Lee S M, et al. Stability for neural networks with time-varying felays via some new approaches[J]. IEEE Trans. Neural Netw. Syst, 2013, 24(2): 181-193.

[8] Zhang X M, Han Q L. Global asymptotic stability analysis for delayed neural networks using a matrix-based quadratic convex approach[J]. Neural Netw., 2014, 54: 57-69.

[9] Wang Z, Liu L, Shan Q H, et al. Stability criteria for recurrent neural networks with time-varying delay based on secondary delay partitioning method[J]. IEEE Trans. Neural Netw. Syst., 2015, 26(10): 2589-2595.

[10] Wu Z G, Ju H P, Su H, et al. Robust dissipativity analysis of neural networks with time-varying delay and randomly occurring uncertainties[[J]. IEEE Trans. Neural Netw. Syst, 2012, 69(3):1323-1332.

[11] Zeng H B, Ju H P, Zhang C F, et al. Stability and dissipativity analysis of static neural networks with interval time-varying delay[J]. J. Frankl. Inst., 2015, 352(3): 1284-1295.

[12] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. New results on stability analysis for systems with discrete distributed delay[J]. Automatica, 2015, 60: 189-192.

[13] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. Proc of 39th Confe on Decision and Control. Sydney, 2000.

[14] Park P G, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.

（责任编辑：曹洪武）