

# 基于移动数据窗的传递函数多新息随机梯度辨识方法

徐 玲<sup>†</sup>

(1. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122;  
2. 无锡商业职业技术学院 物联网技术学院, 江苏 无锡 214153)

**摘 要:** 一些工业过程可以近似用一个传递函数描述, 结合统计辨识方法和非线性优化策略提出传递函数参数辨识方法. 该方法采用动态数据方案, 使用系统观测数据获得系统更多的模态信息. 基于动态观测数据, 提出传递函数随机梯度参数辨识方法. 为进一步提高辨识精度, 利用动态窗数据将随机梯度参数辨识方法中的标量新息扩展为新息向量, 提出传递函数多新息随机梯度参数估计方法. 最后通过仿真例子对所提出的方法进行了性能分析和模型验证.

**关键词:** 系统辨识; 参数估计; 随机梯度; 多新息; 传递函数

**中图分类号:** TP273      **文献标志码:** A

## Moving data window based multi-innovation identification stochastic gradient parameter identification method for transfer functions

XU Ling<sup>†</sup>

(1. School of the Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. School of the Internet of Things Technology, Wuxi Vocational Institute of Commerce, Wuxi 214153, China)

**Abstract:** For industrial process transfer functions, this paper proposes a parameter estimation method combining the statistical identification method and the nonlinear optimization strategy. In order to obtain enough system modal information, a moving data window is used to deduce the identification method. Based on the dynamical measured data, a stochastic gradient parameter estimation algorithm is presented. In order to improve the estimation accuracy, a multi-innovation stochastic gradient parameter identification method is proposed for transfer functions by expanding the innovation scalar into the innovation vector. Finally, a simulation example is given to compare the proposed methods. Meanwhile the performance of the proposed algorithms is analyzed and the estimated models are verified by step response tests.

**Keywords:** system identification; parameter estimation; stochastic gradient; multi-innovation; transfer function

## 0 引 言

传递函数在经典控制理论中具有重要的地位, 经典 PID 控制算法大多基于系统的传递函数模型. 传递函数是经典控制系统中描述系统动态特性的连续时间模型, 连续系统的动态特性用微分方程描述, 通过拉氏变换将微分方程转换为传递函数. 离散时间模型是将连续时间模型中的时间变量进行离散化得到的模型, 采用差分方程描述输入与输出间的关系. 传递函数的辨识就是研究如何通过系统辨识理论和方法获得系统的传递函数, 传递函数的辨识自经典控制理论诞生以来至今一直备受关注<sup>[1-2]</sup>, 而且已广泛应用于工业过程控制中, 如工业过程控制中各种控制

器设计、控制系统结构设计、控制器性能的评价等大多是基于控制对象的传递函数进行的.

经典辨识方法对传递函数的辨识通常分为时域辨识和频域辨识方法两类. 在时域辨识法中, 通常采用阶跃响应或脉冲响应作为辨识实验的观测数据, 特别是阶跃响应实验使用最为普遍. 阶跃响应法通过给系统施加一个阶跃输入激励信号, 利用阶跃响应观测数据辨识系统传递函数. 阶跃响应的思想是 K $\ddot{u}$ pfm $\ddot{u}$ ller<sup>[3]</sup> 提出并应用于一阶迟延系统的传递函数辨识. 利用绘制出的阶跃响应曲线, 采用切线法或两点法近似传递函数. 切线法是在响应的 S 型曲线上找到变化速率最快处做切线, 切线和时间轴及稳态值

收稿日期: 2016-04-29; 修回日期: 2016-10-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273194); 江苏省高校自然科学基金项目(16KJB120007); 江苏省“青蓝工程”资助项目.

作者简介: 徐玲(1976—), 女, 副教授, 博士, 从事系统建模、系统辨识等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: lingxu0848@163.com

渐近线分别相交两点,根据两点的坐标得到一阶延迟系统的时滞和时间常数,增益通过稳态值得到<sup>[4]</sup>.陈垒等<sup>[5]</sup>利用两点法选择阶跃响应曲线上的两个倍数时间点建立方程组,实现了二阶系统传递函数的参数估计,然而,多点法进行传递函数参数估计对观测数据点要求高,需要响应数据中的倍数时间点数据,若观测数据选择不当,则会导致无法用代数方法获得参数估计.

切线法和两点法适用低阶系统,而基于阶跃响应曲线的面积法可以实现高阶系统辨识.相对于切线法和两点法,面积法的计算量大,但借助当今计算机的强大运算能力,面积法在工程上被广泛应用.Rake<sup>[6]</sup>利用拉氏变换的终值定理,提出了一种与面积法相近的线性系统传递函数参数估计方法,通过计算各阶的稳态值建立关于模型参数的线性方程组,求解线性方程组可以得到参数估计.鉴于各阶稳态值的计算比较困难,这种方法适用于低阶系统,且模型精度较低.

近年来,基于统计思想的现代辨识方法也出现了很多研究成果,如递阶辨识方法、耦合辨识方法、辅助模型辨识方法和多新息辨识方法等<sup>[7-9]</sup>,这些方法可以用于线性及非线性系统的辨识<sup>[10-11]</sup>.Wang<sup>[12]</sup>基于模型重构原理研究了非线性Hammerstein系统的递阶辨识方法,Jin等<sup>[13]</sup>在多新息辨识思想<sup>[14]</sup>启发下研究了多变量类输出误差系统多新息最小二乘辨识方法.

纵观这些研究方法成果,其辨识对象均为离散时间模型或状态空间模型.本文结合现代统计辨识理论和非线性优化方法,研究工业过程传递函数模型的在线参数辨识.为满足在线辨识需要,引用动态数据窗观测数据,结合多新息辨识理论和递推辨识方法,基于阶跃响应信号构建优化准则,运用梯度搜索原理,提出动态数据窗传递函数多新息随机梯度递推在线辨识方法,为传递函数参数辨识提供理论和实践依据.

## 1 问题描述

传递函数作为过程控制对象的主要模型,已广泛应用于系统性能分析、控制器设计中.对于 $n$ 阶系统传递函数,可以表示为如下形式:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}, \quad m \leq n.$$

其中 $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_0, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 为模型参数,传递函数的参数辨识就是要估计出这些未知的参数.对于模型参数多的大系统而言,模型参数的估计非常

困难.目前许多辨识方法都是基于离散时间模型,或是将传递函数离散化后对离散模型参数进行辨识,这些方法获得的是离散模型的参数,而不是连续时间模型的参数,是间接辨识的方法.本文考虑以系统的时域响应为出发点,直接辨识连续时间系统传递函数模型的参数.

对于实际控制系统而言,传递函数模型的极点分布决定着系统的动态性能.因此,为使所提出的辨识方法更具有通用性,考虑系统传递函数极点为共轭复数极点和实数极点同时存在的更为普遍性的情况.若传递函数含有实数和共轭复数极点,则传递函数可以分解为如下部分分式之和的形式:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{d_i}{s + c_i} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\omega_{n_j}^2}{s^2 + 2\xi_j \omega_{n_j} s + \omega_{n_j}^2},$$

$$0 < \xi_j < 1, \quad n_1 + 2n_2 = n, \quad (1)$$

其中 $c_i, d_i, \xi_j, \omega_{n_j} (i = 1, 2, \cdots, n_1, j = 1, 2, \cdots, n_2)$ 为待辨识的参数.一旦这些参数被辨识出来,即可得到系统的传递函数.

对式(1)进行辨识可以通过传递函数的离散化得到离散时间模型,但离散化会带来模型变换的误差,同时离散化后辨识出的模型需要进行模型的重构才能得到连续时间模型,由此再一次带来模型变换的误差.因此,传递函数参数的直接辨识是获得高精度参数估计的有效手段.

为便于推导出辨识算法,对待估计参数进行变换,令 $\alpha_j = \xi_j \omega_{n_j}, \beta_j = \omega_{n_j}^2$ ,式(1)可以写为

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{d_i}{s + c_i} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\beta_j}{s^2 + 2\alpha_j s + \beta_j}.$$

对于控制系统而言,传递函数定义为线性系统输出与输入信号的拉氏变换之比,输出信号为系统的时域响应.因此可以从时域响应获取系统的足够动态信息以进一步辨识系统的模型参数.

阶跃信号是辨识实验中经常采用的激励信号,阶跃信号易于实现,且阶跃响应能有效获取系统的动态过程信息.阶跃响应辨识实验通过给系统施加阶跃信号获得系统的观测数据,阶跃信号的幅值可以根据系统的实际情况进行设计,因此辨识实验中考虑任意幅值 $A$ 的阶跃信号作为输入信号,其拉氏变换为 $R(s) = A/s$ .系统在幅值为 $A$ 的阶跃信号激励下的时域响应为

$$y(t) := f(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A d_i}{c_i} (1 - e^{-c_i t}) + \sum_{j=1}^{n_2} \left( A - A e^{-\alpha_j t} \cos \sqrt{\beta_j - \alpha_j^2} t - \right.$$

$$\frac{A\alpha_j}{\sqrt{\beta_j - \alpha_j^2}} \sin \sqrt{\beta_j - \alpha_j^2} t). \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{c} := [c_1, c_2, \dots, c_{n_1}]^T \in \mathbf{R}^{n_1}$ ,  $\mathbf{d} := [d_1, d_2, \dots, d_{n_1}]^T \in \mathbf{R}^{n_1}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} := [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_2}]^T \in \mathbf{R}^{n_2}$ ,  $\boldsymbol{\beta} := [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2}]^T \in \mathbf{R}^{n_2}$ . 由式(2)可以看出, 系统的阶跃响应是关于待辨识参数的高度非线性函数, 系统响应与待辨识参数之间的非线性关系为参数辨识带来极大的困难, 许多线性优化理论无法得到参数估计. 本文考虑利用系统响应的动态观测数据, 并结合非线性优化的理论解决传递函数的辨识问题. 对于传递函数的阶次辨识, 可以采用相关分析法或是 Hankel 矩阵法等来确定.

## 2 动态数据随机梯度递推参数辨识方法

系统的在线辨识是利用系统的实时观测数据获取系统的动态信息, 更能够追踪系统的实际工况, 目前工业过程在线辨识的需求越来越大. 为实现传递函数的在线辨识, 本文考虑采用动态数据方案获得系统的观测信息. 动态数据反映系统动态过程的信息, 令当前采样时刻为  $t_k$ , 采样周期为  $h$ , 那么采样时刻可以表示为  $t_k = kh$ . 对应各个采样时刻得到的观测数据序列为  $\{kh, y(kh), k = 1, 2, \dots\}$ , 参数  $k$  的变化追踪系统的动态过程. 为方便起见, 令  $y(k) := y(kh)$ .

定义参数向量

$$\boldsymbol{\theta} := [c_1, \dots, c_{n_1}, d_1, \dots, d_{n_1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_2}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2}]^T \in \mathbf{R}^{2(n_1+n_2)}. \quad (3)$$

定义准则函数

$$J(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{2} [y(k) - f(\boldsymbol{\theta}, kh)]^2 = \frac{1}{2} \left[ y(k) - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A d_i}{c_i} (1 - e^{-c_i kh}) - \sum_{j=1}^{n_2} \left( A - A e^{-\alpha_j kh} \cos \sqrt{\beta_j - \alpha_j^2} kh - \frac{A \alpha_j}{\sqrt{\beta_j - \alpha_j^2}} \sin \sqrt{\beta_j - \alpha_j^2} kh \right) \right]^2.$$

对于传递函数的辨识, 可以通过极小化准则函数  $J(\boldsymbol{\theta})$  推导出来, 极小化准则函数属于优化问题. 梯度搜索方法作为一种常用的优化方法不仅可以用于解决线性优化问题, 而且可以解决非线性优化问题. 在梯度优化方法中, 最优步长的确定是通过一维搜索实现的. 对于准则函数  $J(\boldsymbol{\theta})$  而言, 这是一个复杂的非线性函数, 一维搜索建立的方程为超越方程, 无法代数求解. 若采用试凑的方法确定最优步长, 则不但影响在线辨识速度, 而且具有一定的随意性. 本文利用统

计辨识方法中的梯度辨识思想<sup>[9]</sup>, 提出传递函数随机梯度参数辨识方法. 同时通过增加指数修正因子来修正递推步长以提高算法的收敛速度.

令  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = [\hat{c}_{1k}, \hat{c}_{2k}, \dots, \hat{c}_{n_1k}, \hat{d}_{1k}, \hat{d}_{2k}, \dots, \hat{d}_{n_1k}, \hat{\alpha}_{1k}, \hat{\alpha}_{2k}, \dots, \hat{\alpha}_{n_2k}, \hat{\beta}_{1k}, \hat{\beta}_{2k}, \dots, \hat{\beta}_{n_2k}]^T$  表示参数  $\boldsymbol{\theta}$  在第  $k$  次递推时的估计, 根据梯度搜索原理, 推导出具有实数和共轭复数极点的传递函数随机梯度参数辨识算法(SG算法)如下:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) - \frac{1}{r^\eta(k+1)} \boldsymbol{\varphi}(k) e(k), \quad 1/2 < \eta \leq 1; \quad (4)$$

$$e(k) = y(k) - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A \hat{d}_{ik}}{\hat{c}_{ik}} (1 - e^{-\hat{c}_{ik} kh}) - \sum_{j=1}^{n_2} \left( A - A e^{-\hat{\alpha}_{jk} kh} \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh - \frac{A \hat{\alpha}_{jk}}{\sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2}} \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh \right); \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [\varphi_{11}(k), \dots, \varphi_{1n_1}(k), \varphi_{21}(k), \dots, \varphi_{2n_1}(k), \varphi_{31}(k), \dots, \varphi_{3n_2}(k), \varphi_{41}(k), \dots, \varphi_{4n_2}(k)]^T; \quad (6)$$

$$\varphi_{1i}(k) = A \left( \frac{\hat{d}_{ik} kh}{\hat{c}_{ik}} + \frac{\hat{d}_{ik}}{\hat{c}_{ik}^2} \right) e^{-\hat{c}_{ik} kh} - A \frac{\hat{d}_{ik}}{\hat{c}_{ik}^2}; \quad (7)$$

$$\varphi_{2i}(k) = -\frac{A}{\hat{c}_{ik}} (1 - e^{-\hat{c}_{ik} kh}), \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad (8)$$

$$\varphi_{3j}(k) = \frac{A \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{1/2}} - \frac{A kh \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh e^{-\hat{\alpha}_{jk} kh} + \frac{A \hat{\alpha}_{jk}^2 \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{3/2}} - \frac{A \hat{\alpha}_{jk}^2 kh \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} + \frac{A \hat{\alpha}_{jk} kh \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh e^{-\hat{\alpha}_{jk} kh}}{(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{1/2}}; \quad (9)$$

$$\varphi_{4j}(k) = \frac{A \hat{\alpha}_{jk} kh \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{2(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)} - \frac{A \hat{\alpha}_{jk} \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{2(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{3/2}} - \frac{A kh \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh e^{-\hat{\alpha}_{jk} kh}}{2(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{1/2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_2; \quad (10)$$

$$r(k+1) = r(k) + \|\varphi(k)\|^2, r(0) = 1. \quad (11)$$

利用SG算法计算参数估计 $\hat{\theta}(k+1)$ 的步骤如下.

Step 1: 令 $k = 0$ , 确定递推长度为 $L$ . 置初值, 令 $\hat{\theta}(0)$ 为任意向量,  $1/2 < \eta \leq 1$ .

Step 2: 收集阶跃响应观测数据 $(k, y(k))$ .

Step 3: 利用式(5)计算标量新息 $e(k)$ .

Step 4: 利用式(6)~(10)计算信息向量 $\varphi(k)$ .

Step 5: 利用式(11)计算 $r(k+1)$ .

Step 6: 利用式(4)更新参数估计 $\hat{\theta}(k+1)$ , 如果 $k = L$ , 则终止递推过程, 得到参数估计 $\hat{\theta}(k+1)$ , 否则 $k := k+1$ , 返回Step 2.

### 3 动态数据窗多新息随机梯度辨识方法

在传递函数随机梯度递推参数估计算法中, 参数估计的每一次递推更新都是通过标量新息和信息向量的不断更新实现的. 新息是能够改善辨识精度的有用信息, 标量新息仅使用当前时刻的观测数据和当前时刻的参数估计. 对于参数估计算法而言, 使用表征参数和系统特征的信息越多, 算法的辨识精度便越高. 为此, 将标量新息进行扩展, 使用更多的观测数据以实现获取较多的系统模态信息和参数信息. 将在线采集到的观测数据按照动态数据窗的方案进行使用, 在一定数据窗宽度下, 获取一个新的观测数据的同时, 剔除数据窗中最早时刻的数据. 这样, 即可保证在每次参数递推更新中, 批量数据长度的观测数据被使用, 并能保持数据的动态更新. 将数据窗的长度定义为新息长度, 新息长度越大, 在每次递推估计中被利用的观测数据越多.

令新息长度为 $p$ , 采用幅值为 $A$ 的阶跃信号作为激励信号. 令 $\hat{\theta}(k) = [\hat{c}_{1k}, \dots, \hat{c}_{n_1k}, \hat{d}_{1k}, \dots, \hat{d}_{n_1k}, \hat{\alpha}_{1k}, \dots, \hat{\alpha}_{n_2k}, \hat{\beta}_{1k}, \dots, \hat{\beta}_{n_2k}]^T$  表示时刻 $t_k := kh$ 时参数 $\theta$ 的估计. 将标量新息

$$e(k-i) :=$$

$$y(k-i) - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A\hat{d}_{ik}}{\hat{c}_{ik}} (1 - e^{-\hat{c}_{ik}(k-i)h}) - \sum_{j=1}^{n_2} \left( A - Ae^{-\hat{\alpha}_{jk}(k-i)h} \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} (k-i)h - \frac{A\hat{\alpha}_{jk}}{\sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2}} \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} (k-i)h \right)$$

扩展为新息向量

$$\mathbf{E}(p, k) := [e(k), e(k-1), \dots, e(k-p+1)]^T \in \mathbf{R}^p.$$

由于标量新息被扩展为新息向量, 相应的信息向量也要扩展为信息矩阵, 以实现动态数据窗观测数据的利用. 基于梯度搜索原理, 极小化准则函数 $J(\theta)$ 进行参

数估计算法的推导. 求准则函数 $J(\theta)$ 关于参数 $\theta$ 的一阶偏导数得到准则函数的梯度, 将梯度中的参数用其估计值代替, 此时利用动态数据窗可以将估计梯度表示为信息矩阵与新息向量的乘积.

基于多新息原理, 推导出含有实数及共轭复数极点传递函数多新息随机梯度递推参数辨识算法(MI-SG算法)如下:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \frac{\Phi(p, k)}{r(k+1)} \mathbf{E}(p, k); \quad (12)$$

$$\Phi(p, k) = [\varphi(k), \varphi(k-1), \dots, \varphi(k-p+1)]; \quad (13)$$

$$\varphi(k) =$$

$$[\varphi_{11}(k), \dots, \varphi_{1n_1}(k), \varphi_{21}(k), \dots, \varphi_{2n_1}(k), \varphi_{31}(k), \dots, \varphi_{3n_2}(k), \varphi_{41}(k), \dots, \varphi_{4n_2}(k)]^T; \quad (14)$$

$$\varphi_{1i}(k) = A \left( \frac{\hat{d}_{ik}kh}{\hat{c}_{ik}} + \frac{\hat{d}_{ik}}{\hat{c}_{ik}^2} \right) e^{-\hat{c}_{ik}kh} - A \frac{\hat{d}_{ik}}{\hat{c}_{ik}^2}; \quad (15)$$

$$\varphi_{2i}(k) = -\frac{A}{\hat{c}_{ik}} (1 - e^{-\hat{c}_{ik}kh}), \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad (16)$$

$$\varphi_{3j}(k) = \frac{A \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{1/2}} - \frac{Akh \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} khe^{-\hat{\alpha}_{jk}kh} + \frac{A\hat{\alpha}_{jk}^2 \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{3/2}} - \frac{A\hat{\alpha}_{jk}^2 kh \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} + \frac{A\hat{\alpha}_{jk}kh \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} khe^{-\hat{\alpha}_{jk}kh}}{(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{1/2}}}; \quad (17)$$

$$\varphi_{4j}(k) = \frac{A\hat{\alpha}_{jk}kh \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{2(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)} - \frac{A\hat{\alpha}_{jk} \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} kh}{2(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{3/2}} - \frac{Akh \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} khe^{-\hat{\alpha}_{jk}kh}}{2(\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2)^{1/2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_2; \quad (18)$$

$$\mathbf{E}(p, k) =$$

$$[e(k), e(k-1), \dots, e(k-p+1)]^T; \quad (19)$$

$$e(k-l) =$$

$$y(k-l) - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A\hat{d}_{ik}}{\hat{c}_{ik}} (1 - e^{-\hat{c}_{ik}(kh-lh)}) - \sum_{j=1}^{n_2} \left( A - Ae^{-\hat{\alpha}_{jk}(kh-lh)} \cos \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} (kh-lh) - \frac{A\hat{\alpha}_{jk}}{\sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2}} \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2} (kh-lh) \right)$$

$$\frac{A\hat{\alpha}_{jk}}{\sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2}} \sin \sqrt{\hat{\beta}_{jk} - \hat{\alpha}_{jk}^2}(kh - lh),$$

$$l = 0, 1, \dots, p - 1; \quad (20)$$

$$r(k + 1) = r(k) + \|\varphi(k)\|^2, r(0) = 1. \quad (21)$$

利用MI-SG算法计算参数估计 $\hat{\theta}(k + 1)$ 的步骤如下.

Step 1: 初始化, 令 $k = 0$ , 确定新息长度 $p$ , 设置递推步数 $L$ . 置初值, 令 $\hat{\theta}(0)$ 为任意向量.

Step 2: 收集观测数据 $\{k, y(k)\}$ , 利用式(13)~(18)计算信息向量 $\varphi(k)$ , 并构成信息矩阵 $\Phi(p, k)$ .

Step 3: 利用式(19)计算标量信息 $e(k - l)$ , 利用式(20)计算新息向量 $E(p, k)$ .

Step 4: 利用式(21)计算参数 $r(k + 1)$ .

Step 5: 利用式(12)更新参数估计 $\hat{\theta}(k + 1)$ , 如果 $k = L$ , 则终止递推过程, 得到参数估计 $\hat{\theta}(k + 1)$ , 否则 $k := k + 1$ , 返回Step 2.

### 4 仿真实例

例1 考虑如下4阶系统传递函数:

$$G(s) = \frac{5s^3 + 32s^2 + 116s + 171}{s^4 + 7s^3 + 25s^2 + 57s + 54}.$$

将上述传递函数进行部分分式展开, 得

$$G(s) = \frac{3}{s + 2} + \frac{2}{s + 3} + \frac{9}{s^2 + 2s + 9}.$$

与算法中对应的真实参数为 $c_1 = 2, c_2 = 3, d_1 = 3, d_2 = 2, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 9$ .

利用阶跃响应激励进行辨识实验, 动态收集和利用观测数据, 采用推导出的传递函数MI-SG算法对系统的传递函数参数进行辨识, 仿真中加入方差为 $\sigma^2 = 0.50^2$ 的零均值白噪声, 采样周期为 $h = 0.1s$ , 新息长度分别为 $p = 1, p = 2, p = 5$ . 当新息长度 $p = 1$ 时, 传递函数MI-SG算法退化为SG算法. 仿真得到的参数估计和参数估计误差如表1所示, 参数估计误差 $\delta := \|\hat{\theta}(k) - \theta\|/\|\theta\|$ 随递推次数 $k$ 变化的曲线如图1所示.

表1 多新息随机梯度参数估计及参数估计误差

$p$	$k$	$c_1$	$c_2$	$d_1$	$d_2$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\delta/\%$
1	1	2.16088	3.27760	2.73623	2.42333	1.12802	10.24136	13.29539
	5	2.13440	3.27011	2.74592	2.42666	1.20385	9.93223	10.75062
	10	2.13301	3.27005	2.74611	2.42667	1.20052	9.88936	10.40074
	15	2.13298	3.27005	2.74611	2.42667	1.19888	9.88501	10.36340
2	1	2.14557	3.27195	2.74333	2.42628	1.13766	10.07125	11.82147
	5	2.10421	3.26144	2.75715	2.43058	1.32025	9.57768	8.38792
	10	2.10179	3.26135	2.75746	2.43059	1.33656	9.49949	7.96788
	15	2.10174	3.26135	2.75747	2.43059	1.33940	9.49115	7.93088
5	1	2.12689	3.26814	2.7489	2.42747	1.25728	9.84369	10.14709
	5	2.07554	3.25646	2.76431	2.43207	1.26108	9.16342	6.15070
	10	2.07261	3.25636	2.76468	2.43208	1.29187	9.04634	6.08882
	15	2.07255	3.25636	2.76468	2.43208	1.29286	9.03816	6.08790
真值		2.00000	3.00000	3.00000	2.00000	1.00000	9.00000	

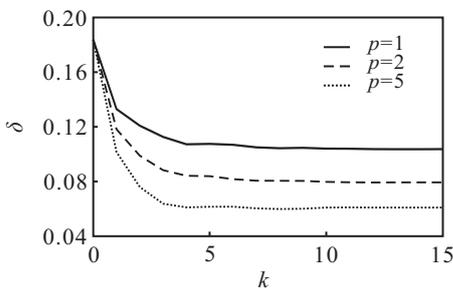


图1  $\delta$  递推次数 $k$ 变化的曲线

分别利用SG算法( $p = 1$ )和MI-SG算法( $p = 5$ )的仿真结果得到如下传递函数模型:

$$G_1(s) = \frac{5.173s^3 + 36.44s^2 + 138.5s + 208.9}{s^4 + 7.801s^3 + 29.82s^2 + 70.13s + 68.95},$$

$$G_2(s) = \frac{5.197s^3 + 36.52s^2 + 131.4s + 187.9}{s^4 + 7.915s^3 + 29.57s^2 + 65.61s + 61}.$$

其中: $G_1(s)$ 为新息长度 $p = 1$ 时得到的估计模型,

$G_2(s)$ 为新息长度 $p = 5$ 时得到的估计模型. 为了验证辨识出模型的准确性, 分别对实际参数模型和辨识出的估计模型进行系统阶跃响应的测试实验. 对应3个传递函数模型得到的阶跃响应如图2所示.

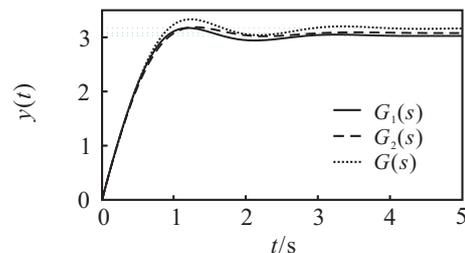


图2 辨识出的模型及实际模型阶跃响应

通过仿真实例可以得出下列结论:

1) 由图1和表1可见, 传递函数MI-SG方法随着递推次数的增加, 参数估计误差不断减小, 新息长度

越大,得到的参数估计精度越高. 传递函数MI-SG方法( $p > 1$ )的参数估计精度高于SG方法( $p = 1$ ). MI-SG方法利用批量动态数据窗观测数据,将SG方法中的标量新息扩展为新息向量,实现了更多观测数据的利用,从而可以提高参数估计精度.

2) 仿真中当新息长度 $p = 1$ 时,传递函数MI-SG方法仅使用单次观测数据,算法退化为SG方法,相比于新息长度大于1的MI-SG方法,SG方法由于利用的观测数据少,参数估计精度较低.

3) 传递函数MI-SG方法利用动态数据窗观测数据,在每次递推估计中,能利用较多的系统动态过程信息数据,因此能有效地跟踪算法的时变能力. 此外,MI-SG算法能够兼顾算法计算量和估计精度,且无需步长寻优,实现了计算量与计算精度的折中. 与累计使用观测数据的方案相比,计算量明显减小.

4) 由图2中的估计模型与实际模型的阶跃响应曲线可以看出,使用MI-SG方法得到的估计模型阶跃响应曲线与SG方法得到的估计模型阶跃响应曲线相比,更接近实际模型的阶跃响应曲线. 这表明,MI-SG方法的参数估计精度高于SG方法. MI-SG算法得到的传递函数估计模型能捕捉到系统的动态特性.

## 5 结 论

本文针对工业过程中传递函数连续时间模型,提出了多新息随机梯度递推参数辨识方法. 通过阶跃响应辨识实验,利用统计辨识思想研究了基于阶跃响应离散数据的传递函数的直接辨识方法. 利用过程的动态数据,在推导出传递函数随机梯度递推参数辨识方法的基础上,采样动态数据窗数据,将随机梯度递推参数辨识方法中的标量新息扩展为新息向量,进一步提出多新息随机梯度递推参数辨识方法. 通过对两种方法进行仿真比较得到,MI-SG算法用于传递函数参数的直接辨识是有效的.

### 参考文献(References)

- [1] Ko S, Weyer E, Campi M C. Non-asymptotic model quality assessment of transfer functions at multiple frequency points[J]. Automatica, 2015, 60: 65-78.
- [2] Liu T, Wang Q G, Huang H P. A tutorial review on process identification from step or relay feedback test[J]. J of Process Control, 2013, 23(6): 1597-1623.
- [3] Küpfmüller K. Über die dynamik der selbsttatigen verstärkungsregler[J]. ENT, 1928, 5(11): 459-467.

- [4] Oldenbourg R C, Sartorius H. The dynamics of automatic control[C]. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 1948: 79-90.
- [5] Chen L, Li J H, Ding R F. Identification for the second-order systems based on the step response[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53(5/6): 1074-1083.
- [6] Rake H. Step response and frequency response methods[J]. Automatica, 1980, 16(5): 519-526.
- [7] 丁锋. 系统辨识算法复杂性、收敛性、计算效率研究[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1729-1741. (Ding F. Complexity, convergence and computational efficiency for system identification algorithms[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1729-1741.)
- [8] 丁锋, 汪菲菲. 损失数据线性参数系统的递推最小二乘辨识方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(2): 2261-2266. (Ding F, Wang F F. Recursive least squares identification algorithms for linear-in-parameter systems with missing data[J]. Control and Decision, 2016, 31(2): 2261-2266.)
- [9] 丁锋. 系统辨识——辨识方法性能分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 237-257. (Ding F. System identification—Performances analysis for identification methods[M]. Beijing: Science Press, 2014: 237-257.)
- [10] 刘艳君, 丁锋. 多变量系统的耦合梯度辨识算法与性能分析[J]. 控制与决策, 2016, 31(8): 1487-1492. (Liu Y J, Ding F. Coupled stochastic gradient algorithm and performance analysis for multivariable systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(8): 1487-1492.)
- [11] 刘艳君, 陶太洋, 丁锋. MISO系统基于正交匹配追踪算法的参数与时滞联合估计[J]. 控制与决策, 2015, 30(11): 2013-2017. (Liu Y J, Tao T Y, Ding F. Parameter and time-delay identification for MISO systems based on orthogonal matching pursuit algorithm[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 2013-2017.)
- [12] Wang D Q. Hierarchical parameter estimation for a class of MIMO Hammerstein systems based on the reframed models[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 57: 13-19.
- [13] Jin Q B, Wang Z, Liu X P. Auxiliary model-based interval-varying multi-innovation least squares identification for multivariable OE-like systems with scarce measurements[J]. J of Process Control, 2015, 35(11): 154-168.
- [14] 丁锋. 系统辨识——多新息辨识理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 5-12. (Ding F. System identification—Multinnovation identification theory and methods[M]. Beijing: Science Press, 2016: 5-12.)

(责任编辑: 郑晓蕾)