

利用提升-预估法设计离散时间时滞线性系统的预见控制器

廖永龙, 廖福成[†]

(北京科技大学 数理学院, 北京 100083)

摘要: 研究一类既有状态时滞又有输入时滞的离散时间线性系统的预见控制问题. 分别使用离散提升技术和变量替换法将系统中的状态时滞和输入时滞消掉, 得到一个无时滞的系统. 在此基础上, 使用预见控制理论和状态预估法得到一个带有状态时滞补偿、输入时滞补偿和参考信号预见补偿的控制器. 针对不同的时滞使用不同的方法进行消除, 有效地降低了增广系统的维数. 最后, 通过一个数值算例验证了所提出设计方法的有效性.

关键词: 离散时间系统; 状态时滞; 输入时滞; 预见控制; 离散提升技术; 状态预估

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Design of preview controller for discrete-time linear systems with time delay by using the lifting-predictor method

LIAO Yong-long, LIAO Fu-cheng[†]

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: The class of preview control problems of discrete-time linear systems with both state delay and input delay are studied. Discrete lifting technology and variable substitution method are applied to eliminate the state delay and input delay respectively, thus a delay-free system is obtained. On this basis, the preview control theory and the state predictor method are used to acquire a preview controller which is equipped with state delay's compensation, input delay's compensation and reference signal's preview compensation. Different time delays are eliminated by utilizing different methods, which can reduce the dimension of the augmented system effectively. Finally, a numerical example is given to show the effectiveness of the design method.

Keywords: discrete-time systems; state delay; input delay; preview control; discrete lifting technology; state predictor

0 引言

由于可以充分利用参考信号的未来信息提高闭环系统的控制品质, 预见控制无论是在实际应用中^[1-3]还是在理论研究中^[4-5]都受到了学者们的青睐. 预见控制器的一般设计方法是: 通过构造扩大误差系统将参考信号引入控制系统, 将跟踪问题转换为调节问题; 在参考信号可预见的假设下, 使用最优调节理论得到带有预见补偿的伺服控制器^[6]. 近年来, 预见控制理论在广义系统^[7-9]、随机系统^[10]、多智能体系^[11]的研究中都取得了进展.

在许多实际控制系统中经常伴有时滞, 例如化工过程控制、网络控制和车辆系统的控制等^[12-16]. 时滞的存在往往会严重地损害系统的控制性能, 甚至导致系统不稳定, 从而增加了控制的难度. 至今, 已经有许多针对连续时间和离散时间时滞系统的控制方法被

提出^[17-23]. 对于连续时间系统, 设计控制器的方法主要有 Razumikhin 法、积分二次约束法、backstepping 法和还原法^[24-29]. 特别是最近提出的预估反馈法^[30-31], 通过建立一个预估器估计状态向量的未来值, 从而补偿输入中的时滞. 对于离散时间系统, 大多数是由连续时间系统中的方法转化而来^[32-34]. 另一种可以有效处理离散时间时滞问题的特有方法是离散提升法, 通过在状态方程中引入一些恒等式来消除系统的时滞^[9].

目前, 针对时滞系统预见控制的研究较少. 所使用方法仅仅是通过离散提升技术将时滞系统变为无时滞系统, 然后设计预见控制器^[9,35]. 当系统既有状态时滞又有输入时滞且系统的时滞较大时, 仅使用离散提升技术消除时滞会使系统的维数变得很高, 从而使计算代价变得很大^[36].

收稿日期: 2016-05-28; 修回日期: 2016-12-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174209).

作者简介: 廖永龙(1988—), 男, 博士生, 从事时滞系统预见控制的研究; 廖福成(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 从事预见控制理论和应用等研究.

[†]通讯作者. E-mail: fcliao@ustb.edu.cn

鉴于此,本文给出一种新的设计时滞系统预见控制器的方法.与以往的方法不同,分别使用两种不同的方法消除状态时滞和输入时滞.使用离散提升技术将原系统中的状态时滞消掉,构造扩大误差系统将参考信号的信息引入控制系统中,从而将跟踪问题转换为调节问题.使用变量替换将扩大误差系统中的输入时滞消掉,利用预见控制理论的相关结论和对状态向量未来值的预估设计出扩大误差系统的预见控制器.在预见假设下扩大误差系统的状态向量的未来值可以由状态向量的当前值,控制输入的去过去值和参考信号的未来值共同确定.最后推导出原系统的预见控制器.

1 问题的数学描述和基本假设

考虑系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-d) + B_1u(k-f), \\ y(k) = C_0x(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量; $u(k) \in \mathbf{R}^r$ 为输入向量; $y(k) \in \mathbf{R}^p$ 为输出向量; d 和 f 为正整数,分别表示系统的状态时滞和输入时滞; $A_0, A_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}, B_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}, C_0 \in \mathbf{R}^{p \times n}$ 都是常数矩阵.

给出如下5个基本假设.

假设1 对于任意的复数 $\lambda(|\lambda| \geq 1)$, 矩阵

$$[\lambda^{d+1}I_n - \lambda^d A_0 - A_1 \quad B_1]$$

行满秩.

假设2 矩阵

$$\begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ I_n - (A_0 + A_1) & B_1 \end{bmatrix}$$

行满秩.

假设3 对于任意的复数 $\lambda(|\lambda| \geq 1)$, 矩阵

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ \lambda^{d+1}I_n - \lambda^d A_0 - A_1 \end{bmatrix}$$

列满秩.

假设4 $r(k) \in \mathbf{R}^p$ 为系统(1)的参考信号,满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \bar{r},$$

其中 \bar{r} 是一个常数向量,即 $r(k)$ 趋于一个稳态值.

假设5 参考信号 $r(k)$ 可预见,预见步数为 $N_r(N_r \geq f)$,即在每个时刻 k 处 $r(l)(k \leq l \leq k + N_r)$ 是已知的,并且设 $r(l) = r(k + N_r)(l > k + N_r)$.

定义误差信号 $e(k)$ 为 $y(k)$ 与 $r(k)$ 的差,即

$$e(k) = y(k) - r(k). \quad (2)$$

本文的目的是采用最优控制方法设计带有预见补偿的控制器,使闭环系统(1)的输出 $y(k)$ 渐近跟踪

参考信号 $r(k)$,即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0.$$

取二次型性能指标为

$$J = \sum_{k=-N_r+1}^{\infty} [e^T(k)Q_e e(k) + \Delta u^T(k-f)H\Delta u(k-f)]. \quad (3)$$

其中: $Q_e \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 和 $H \in \mathbf{R}^{r \times r}$ 均为正定矩阵; Δ 为一阶向后差分算子,定义为

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1).$$

注1 在性能指标中使用输入向量的差分可以使控制器中包含积分器,有助于消除静态误差^[5,7].

2 时滞的消除和扩大误差系统的推导

首先对式(1)的状态方程两边使用一阶向后差分算子 Δ ,得到

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) = & A_0\Delta x(k) + A_1\Delta x(k-d) + B_1\Delta u(k-f). \end{aligned} \quad (4)$$

为了消除式(4)中的状态时滞,使用离散提升技术将 $\Delta x(k-d), \Delta x(k-d+1), \dots, \Delta x(k-1)$ 增加到系统的状态向量中,即将式(4)和 d 个恒等式

$$\begin{aligned} \Delta x(k-d+i) &= \Delta x(k-d+i), \\ i &= 0, 1, \dots, d-1 \end{aligned}$$

联立,得到

$$X(k+1) = AX(k) + B\Delta u(k-f). \quad (5)$$

其中

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} \Delta x(k-d) \\ \Delta x(k-d+1) \\ \vdots \\ \Delta x(k-1) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_n \\ A_1 & 0 & 0 & \dots & A_0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X(k) &\in \mathbf{R}^{n(d+1)}, A \in \mathbf{R}^{[n(d+1)] \times [n(d+1)]}, \\ B &\in \mathbf{R}^{[n(d+1)] \times r}. \end{aligned}$$

相应地, $\Delta y(k)$ 用 $X(k)$ 表示为

$$\Delta y(k) = C_0\Delta x(k) = CX(k),$$

其中 $C = [0 \ \dots \ 0 \ C_0]$, 且 $C \in \mathbf{R}^{p \times [n(d+1)]}$.

下面将参考信号引入到系统中. 对式(2)两边求差分, 得到

$$\Delta e(k) = \Delta y(k) - \Delta r(k) = CX(k) - \Delta r(k).$$

从而有

$$\Delta e(k+1) = CX(k+1) - \Delta r(k+1). \quad (6)$$

根据式(5)和(6)推导出误差信号 $e(k)$ 满足的动态方程为

$$e(k+1) = e(k) + CAX(k) + CB\Delta u(k-f) - \Delta r(k+1). \quad (7)$$

将式(5)和(7)联立, 得到

$$\bar{X}(k+1) = \bar{A}\bar{X}(k) + \bar{B}\Delta u(k-f) + \bar{D}\Delta r(k+1). \quad (8)$$

其中

$$\bar{X}(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ X(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} I_p & CA \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} CB \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} -I_p \\ 0 \end{bmatrix}.$$

式(8)中只有输入时滞, 为了进一步消除输入时滞, 引入向量

$$v(k) = \Delta u(k-f). \quad (9)$$

将式(9)代入(8)中, 得到无时滞的扩大误差系统的状态方程

$$\bar{X}(k+1) = \bar{A}\bar{X}(k) + \bar{B}v(k) + \bar{D}\Delta r(k+1). \quad (10)$$

设无时滞的扩大误差系统的输出方程为

$$e(k) = \bar{C}\bar{X}(k). \quad (11)$$

其中 $\bar{C} = [I_p \ 0]$, 且 $\bar{C} \in \mathbf{R}^{p \times [n(d+1)+p]}$. $y(k)$ 可以直接测量, $r(k)$ 已知, 由式(2)直接得到 $e(k)$, 因此将扩大误差系统的输出方程构造为式(11)的形式是合理的. 得到无时滞的扩大误差系统

$$\begin{cases} \bar{X}(k+1) = \bar{A}\bar{X}(k) + \bar{B}v(k) + \bar{D}\Delta r(k+1), \\ e(k) = \bar{C}\bar{X}(k). \end{cases} \quad (12)$$

式(12)的状态向量是 $n(d+1)+p$ 维的. 如果同时使用离散提升技术来消除输入时滞, 则扩大误差系统的状态向量将是 $n(d+1)+rf+p$ 维的. 事实上, 较低的维数将为后边的讨论带来方便, 特别是可以降低 Riccati 方程的阶数.

3 扩大误差系统的性质

在设计预见控制器之前先讨论式(12)的可镇定性 and 可检测性.

定理1 (\bar{A}, \bar{B}) 可镇定的充要条件是假设1和假

设2同时成立.

证明 根据 PBH 秩判据, (\bar{A}, \bar{B}) 可镇定当且仅当对于任意的复数 $\lambda (|\lambda| \geq 1)$, 矩阵 $[\lambda I - \bar{A} \ \bar{B}]$ 行满秩. 根据 \bar{A} 和 \bar{B} 的结构, 可将矩阵 $[\lambda I - \bar{A} \ \bar{B}]$ 写为

$$[\lambda I - \bar{A} \ \bar{B}] = \begin{bmatrix} (\lambda-1)I_p & -CA & CB \\ 0 & \lambda I_{(d+1)n} - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda-1)I_p & -C_0A_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda I_n & -I_n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda I_n & -I_n & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda I_n & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -A_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -C_0A_0 & C_0B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda I_n & -I_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_n & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda I_n - A_0 & B_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

上式最后一个矩阵, 从第二行起每一行乘以 λ 加到下一行, 再将得到的矩阵倒数第二行左乘 $-C_0A_0$ 加到第一行, 倒数第二行左乘 $-A_0$ 加到最后一行, 得到

$$\begin{bmatrix} (\lambda-1)I_p & -\lambda^d C_0A_0 - C_0A_1 & 0 \\ 0 & \lambda I_n & -I_n \\ 0 & \lambda^2 I_n & 0 \\ 0 & \lambda^3 I_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda^{d-1} I_n & 0 \\ 0 & \lambda^d I_n & 0 \\ 0 & \lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & C_0B_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -I_n & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

再进行 d 次初等列变换, 得到

$$\begin{bmatrix} (\lambda - 1)I_p & -\lambda^d C_0 A_0 - C_0 A_1 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & C_0 B_1 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \leftarrow 0 \cdots \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -I_n & 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & -I_n & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

因为初等变换不改变矩阵的秩, 所以矩阵 $[\lambda I - \bar{A} \quad \bar{B}]$ 行满秩等价于矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} (\lambda - 1)I_p & -\lambda^d C_0 A_0 - C_0 A_1 & C_0 B_1 \\ 0 & \lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 & B_1 \end{bmatrix}$$

行满秩.

分两种情况进行讨论:

1) $\lambda \neq 1$. 这时 $(\lambda - 1)I_p$ 可逆, 从而 Φ 行满秩当且仅当 $[\lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 \quad B_1]$ 行满秩, 即假设 1 成立.

2) $\lambda = 1$. 这时

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Phi) &= \\ \text{rank} \begin{bmatrix} -C_0 A_0 - C_0 A_1 & C_0 B_1 \\ I_n - A_0 - A_1 & B_1 \end{bmatrix} &= \\ \text{rank} \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ I_n - A_0 - A_1 & B_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此, 对于任意的复数 $\lambda (|\lambda| \geq 1)$, 矩阵 $[\lambda I - \bar{A} \quad \bar{B}]$ 行满秩当且仅当矩阵 $[\lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 \quad B_1]$ 行满秩且矩阵 $\begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ I_n - (A_0 + A_1) & B_1 \end{bmatrix}$ 行满秩. \square

定理 2 如果假设 3 成立, 则 $(Q^{1/2}, \bar{A})$ 可检测.

证明 根据 PBH 秩判据, $(Q^{1/2}, \bar{A})$ 可检测当且仅当对于任意的复数 $\lambda (|\lambda| \geq 1)$, 矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} \\ Q^{1/2} \end{bmatrix}$ 列

满秩. 根据 \bar{A} 和 Q 的结构, 可将矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} \\ Q^{1/2} \end{bmatrix}$ 写为

$$\begin{bmatrix} (\lambda - 1)I_p & -CA \\ 0 & \lambda I_{(d+1)n} - A \\ Q_e^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 Q_e 正定, 所以矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda I - \bar{A} \\ Q^{1/2} \end{bmatrix}$ 列满秩等价于矩阵

$$\Psi = \begin{bmatrix} -CA \\ \lambda I_{(d+1)n} - A \end{bmatrix}$$

列满秩. 再根据矩阵 A 和 C 的结构, 可将矩阵 Ψ 展开为

$$\Psi = \begin{bmatrix} -C_0 A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -C_0 A_0 \\ \lambda I_n & -I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_n & -I_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda I_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda I_n & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda I_n & -I_n \\ -A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda I_n - A_0 \end{bmatrix}.$$

在矩阵 Ψ 中, 从最后一列开始将每一列的 λ 倍加到前一列, 然后再将最后一行左乘 $-C_0$ 加到第一行, 得到

$$\begin{bmatrix} -\lambda^{d+1} C_0 & -\lambda^d C_0 \\ 0 & -I_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \leftarrow \lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 & \lambda^d I_n - \lambda^{d-1} A_0 \\ -\lambda^{d-1} C_0 & \cdots & -\lambda^3 C_0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ -I_n & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \leftarrow \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^{d-1} I_n - \lambda^{d-2} A_0 & \cdots & \lambda^3 I_n - \lambda^2 A_0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc} -\lambda^2 C_0 & -\lambda C_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \\ \lambda^2 I_n - \lambda A_0 & \lambda I_n - A_0 \end{array} \right]$$

显然矩阵 Ψ 列满秩等价于矩阵

$$\left[\begin{array}{c} -\lambda^{d+1} C_0 \\ \lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 \end{array} \right]$$

列满秩, 即等价于矩阵

$$\left[\begin{array}{c} C_0 \\ \lambda^{d+1} I_n - \lambda^d A_0 - A_1 \end{array} \right]$$

列满秩. \square

4 主要结果

利用式(12)中的向量将二次型性能指标(3)重新记作

$$J = \sum_{k=-N_r+1}^{\infty} [\bar{X}^T(k) Q \bar{X}(k) + v^T(k) H v(k)], \quad (13)$$

其中

$$Q = \bar{C}^T Q_e \bar{C} = \begin{bmatrix} Q_e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

且 $Q \in \mathbf{R}^{[n(d+1)+p] \times [n(d+1)+p]}$, Q_e 和 H 为式(3)中的正定矩阵.

如果设计出扩大误差系统(12)的控制器 $v(k)$ 使闭环系统渐近稳定, 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{X}(k) = 0$. 又因为 $e(k)$ 是 $\bar{X}(k)$ 的一部分, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$. 再从 $v(k)$ 中求出控制输入 $u(k)$, 这样即可达到最初的目标.

首先, 设计扩大误差系统(12)在性能指标(13)下的控制器. 由假设5知参考信号 $r(k)$ 可预见, 在每个时刻 k 处, $\Delta r(l) (k \leq l \leq k + N_r)$ 是已知的, 且 $\Delta r(l) = 0 (l > k + N_r)$, 这样将原问题化为一个标准的预见控制问题.

定理3^[6] 如果 (\bar{A}, \bar{B}) 可镇定, $(Q^{1/2}, \bar{A})$ 可检测, 参考信号的预见步数为 N_r , 则系统(12)在性能指标(13)下存在如下形式的预见控制器:

$$v(k) = G_X \bar{X}(k) + \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+l), \quad (14)$$

使闭环系统渐近稳定. 其中

$$\begin{aligned} G_X &= -(H + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}, \\ G_R(l) &= -(H + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T (\bar{A}^T)^{l-1} P \bar{D}, \\ & l = 1, 2, \dots, N_r. \end{aligned} \quad (15)$$

矩阵 $P \in \mathbf{R}^{[n(d+1)+p] \times [n(d+1)+p]}$ 是如下 Riccati 代数方程的半正定解:

$$P = \bar{A}^T P \bar{A} - \bar{A}^T P \bar{B} (H + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q,$$

闭环系统的系数矩阵 $\bar{A}_c = \bar{A} + \bar{B} G_X$ 是稳定的.

在式(14)中, $\sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+l)$ 是参考信号的预见补偿部分. 因为 \bar{A}_c 是稳定的矩阵, 所以 $(\bar{A}_c^T)^{l-1} (l = 1, 2, \dots, N_r)$ 特征值的模会随着 l 的增大而减小. 一般情况下, $G_R(l) \Delta r(k+l) (l = 1, 2, \dots, N_r)$ 在控制器中所占权重随着 l 的增大而减小, 这也符合实际情况, 距离当前时刻越远的参考信号对跟踪控制器的影响越小.

下面由定理3推导系统(1)的预见控制器. 结合式(9)和(14), 得到

$$\Delta u(k-f) = G_X \bar{X}(k) + \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+l).$$

用 k 替换 $k-f$, 得到

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \\ G_X \bar{X}(k+f) &+ \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+f+l). \end{aligned} \quad (16)$$

在式(16)中, 当前时刻的控制输入 $\Delta u(k)$ 用到了未来的状态向量 $\bar{X}(k+f)$. 求解状态方程(8)可得

$$\begin{aligned} \bar{X}(k+f) &= \\ \bar{A}^f \bar{X}(k) &+ \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{B} \Delta u(k+l-f) + \\ \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{D} \Delta r(k+1+l), \end{aligned} \quad (17)$$

即状态向量的未来值 $\bar{X}(k+f)$ 可以由状态向量的当前值 $\bar{X}(k)$ 、过去一段时间输入向量的值 $\Delta u(k+l-f) (l = 0, 1, \dots, f-1)$ 和未来一段时间参考信号的值 $\Delta r(k+1+l) (l = 0, 1, \dots, f-1)$ 共同确定.

将式(17)代入(16), 得到

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \\ G_X \bar{A}^f \bar{X}(k) &+ G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{B} \Delta u(k+l-f) + \\ G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{D} \Delta r(k+1+l) &+ \\ \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+f+l). \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$G_X \bar{A}^f = [G_e \ G_x(d) \ G_x(d-1) \ \cdots \ G_x(0)]. \quad (19)$$

其中: $G_e \in \mathbf{R}^{r \times p}, G_x(l) \in \mathbf{R}^{r \times n}, l = 0, 1, \dots, d$. 这样,式(18)可重新写为

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & G_e e(k) + \sum_{l=0}^d G_x(l) \Delta x(k-l) + \\ & G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{B} \Delta u(k+l-f) + \\ & G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{D} \Delta r(k+1+l) + \\ & \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+f+l). \end{aligned} \quad (20)$$

下面从式(20)中解出 $u(k)$. 为方便起见,令系统的初始值为零,即当 $k \leq 0$ 时, $x(k) = 0, y(k) = r(k) = 0, u(k) = 0$. 求解式(20)得到

$$\begin{aligned} u(k) = & G_e \sum_{j=1}^k e(j) + \sum_{l=0}^d G_x(l) x(k-l) + \\ & G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{B} u(k+l-f) + \\ & G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{D} r(k+1+l) + \\ & \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) r(k+f+l). \end{aligned} \quad (21)$$

对于式(21)中的最后一项 $\sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) r(k+f+l)$,

由假设5可得

$$r(k+f+l) = r(k+N_r), \quad k+f+l > k+N_r.$$

至此,得到系统(1)的预见控制器定理.

定理4 如果假设1~假设5成立, Q_e 和 H 为正定矩阵,且当 $k \leq 0$ 时, $x(k) = 0, y(k) = r(k) = 0, u(k) = 0$, 则系统(1)在性能指标(3)下存在预见控制器

$$\begin{aligned} u(k) = & G_e \sum_{j=1}^k e(j) + \sum_{l=0}^d G_x(l) x(k-l) + \\ & f_1(k) + f_2(k) + f_3(k), \end{aligned} \quad (22)$$

使得闭环系统的输出 $y(k)$ 渐近跟踪参考信号 $r(k)$. 其中

$$f_1(k) = G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{B} u(k+l-f),$$

$$f_2(k) = G_X \sum_{l=0}^{f-1} \bar{A}^{(f-1-l)} \bar{D} r(k+1+l),$$

$$f_3(k) = \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) r(k+f+l),$$

G_e 和 $G_x(l) (l = 0, 1, \dots, d)$ 由式(19)确定, G_X 和 $G_R (l = 1, 2, \dots, N_r)$ 由定理3给出.

证明 由控制器(22)的设计过程可知,当系统(1)的控制输入取为式(22)时,扩大误差系统(12)的闭环系统为

$$\begin{cases} \bar{X}(k+1) = \bar{A}_c \bar{X}(k) + \bar{B} \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+l) + \\ \quad \bar{D} \Delta r(k+1), \\ e(k) = \bar{C} \bar{X}(k). \end{cases}$$

由假设4可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta r(k) = 0$, 所以有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\bar{B} \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) \Delta r(k+l) + \bar{D} \Delta r(k+1) \right) = 0.$$

因为闭环系统的系数矩阵 \bar{A}_c 稳定,所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{X}(k) = 0,$$

又因为 $e(k)$ 是 $\bar{X}(k)$ 的一部分,有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0,$$

所以 $y(k)$ 渐近跟踪参考信号 $r(k)$. \square

注2 可以看到,预见控制器(22)由5部分组成.

第1部分 $G_e \sum_{j=1}^k e(j)$ 是跟踪误差的积分补偿,即积分

器,用于消除静态误差;第2部分 $\sum_{l=0}^d G_x(l) x(k-l)$ 是状态反馈,既包括当前状态的反馈 $G_x(0)x(k)$ 又包括滞后状态的积分反馈 $\sum_{l=1}^d G_x(l)x(k-l)$,用于补偿状态时滞;第3部分 $f_1(k)$ 是过去 f 步的输入向量对输入时滞的积分补偿;第4部分 $f_2(k)$ 是未来 f 步的参考信号对输入时滞的积分补偿;第5部分 $f_3(k)$ 是参考信号的前馈补偿,用于改善系统跟踪性能.

注3 从预见控制器(22)及其设计过程可以发现,当系统带有输入时滞时,参考信号的预见补偿分为两部分:一部分用于补偿系统的输入时滞,另一部分用于改善系统的跟踪性能.由于前 f 步的参考信号用于补偿输入时滞,此时只能达到 $N_r - f$ 步的预见效果,这正是输入时滞系统预见控制器的特点.

注4 再次考虑系统(1),如果 $d = f = 0$, 则假设1~假设3退化如下.

假设6 对于任意的复数 $\lambda (|\lambda| \geq 1)$, 矩阵

$$[\lambda I_n - (A_0 + A_1) \ B_1]$$

行满秩.

假设7 矩阵

$$\begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ I_n - (A_0 + A_1) & B_1 \end{bmatrix}$$

行满秩.

假设8 对于任意的复数 $\lambda(|\lambda| \geq 1)$, 矩阵

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ \lambda I_n - (A_0 + A_1) \end{bmatrix}$$

列满秩.

此时的假设6~假设8连同假设4和假设5恰好是设计无时滞线性系统预见控制器的基本假设^[5].

约定 $\sum_{l=a}^b f(l) = 0 (b < a)$, 根据定理4得到如下推论.

推论1 对于系统(1), 假设1~假设5成立, Q_e 和 H 为正定矩阵, $d = f = 0$, 且当 $k \leq 0$ 时, $x(k) = 0, y(k) = r(k) = 0, u(k) = 0$. 此时, 扩大误差系统的系数矩阵为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} I_p & C_0(A_0 + A_1) \\ 0 & A_0 + A_1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} C_0 B_1 \\ B_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [I_p \ 0], \bar{D} = \begin{bmatrix} -I_p \\ 0 \end{bmatrix}.$$

存在如下形式的预见控制器

$$u(k) = G_e \sum_{j=1}^k e(j) + G_x x(k) + \sum_{l=1}^{N_r} G_R(l) r(k+l),$$

使得闭环系统的输出渐近跟踪参考信号. 其中 $[G_e \ G_x]$ 、 G_x 和 $G_R(l) (l = 1, 2, \dots, N_r)$ 的结构同定理4.

推论1恰好是无时滞系统的预见控制定理^[5], 即无时滞线性系统预见控制是本文的一个特例.

5 数值仿真

考虑离散时间时滞控制系统(1), 其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [0 \ 0 \ 1]^T, C_0 = [1 \ 0 \ 0].$$

当 $k \leq 0$ 时, $x(k) = 0, y(k) = r(k) = 0, u(k) = 0$. 给出如下两种参考信号:

1) 阶跃信号

$$r(k) = \begin{cases} 0, & k < 20; \\ 1, & k \geq 20. \end{cases}$$

2) 衰减信号

$$r(k) = \frac{10}{k+40} \sin(0.12\pi k).$$

首先取系统的状态时滞 $d = 20$, 输入时滞 $f = 15$, 预见步数分别取为 $N_r = 15, N_r = 20$ 和 $N_r = 25$. 取权重矩阵 $Q_e = 1.0, H = 0.01$. 使用预见控制器(22), 跟踪效果如图1和图2所示.

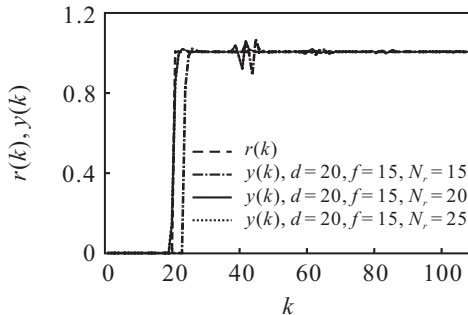


图1 跟踪阶跃信号(预见步数不同)

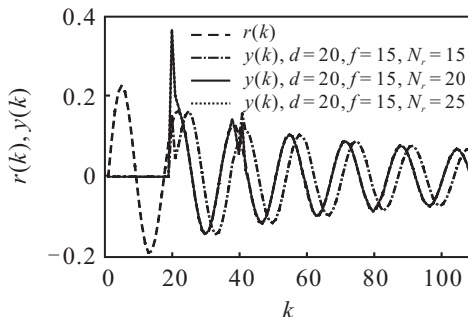


图2 跟踪衰减信号(预见步数不同)

由图1可见: 取不同的预见步数均可以使闭环系统的输出跟踪阶跃信号; 使用较大的预见步数可以加快跟踪速度. 由图2可见, 对于带有周期的衰减信号, 使用较大的预见步数能够明显地改善跟踪效果.

由图1和图2还可见, 当取到一定的预见步数, 跟踪性能没有随预见步数的增加而有明显的改善. 这是因为距离当前时刻越远的参考信号对控制器的影响越小, 从参考信号的预见补偿系数(15)中也可以看出这一点.

另外, 图1和图2在跟踪的过程中会周期性地出现一些波动, 这是由系统中的时滞导致的, 其波动的幅度在逐渐减小也表明了控制器的有效性.

为了进一步说明输入时滞和预见步数的关系, 下面分别取 $d = 20, f = 15, N_r = 15$ 和 $d = 20, f = 0, N_r = 0$, 依然取权重矩阵 $Q_e = 1.0, H = 0.01$ 进行仿真, 跟踪效果如图3和图4所示.

图3和图4表明, 当系统的预见步数等于输入时滞时, 参考信号的未来值恰好用来补偿系统的输入时滞, 相当于无输入时滞无预见的情形, 不能起到预见效果. 此时, 需要增加预见步数, 可以达到 $N_r - f$ 步的预见效果, 这与预见控制器的结构(22)一致.

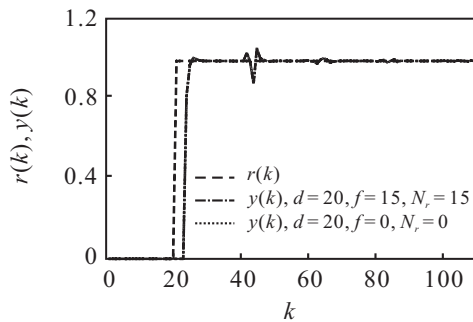


图3 跟踪阶跃信号(预见对输入时滞的补偿)

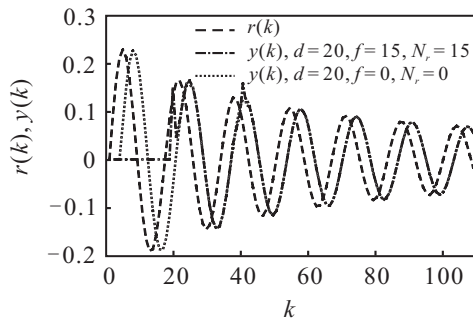


图4 跟踪衰减信号(预见对输入时滞的补偿)

下面分别使用之前的控制方法(状态时滞和输入时滞均采用提升技术消除)和本文给出的控制方法对该控制系统进行仿真. 设系统的状态时滞 $d = 20$, 输入时滞 $f = 15$. 取预见步数 $N_r = 25$, 权重矩阵 $Q_e = 1.0, H = 0.01$. 跟踪效果如图5和图6所示.

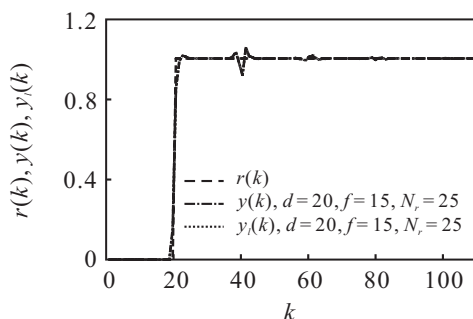


图5 跟踪阶跃信号(与提升法比较)

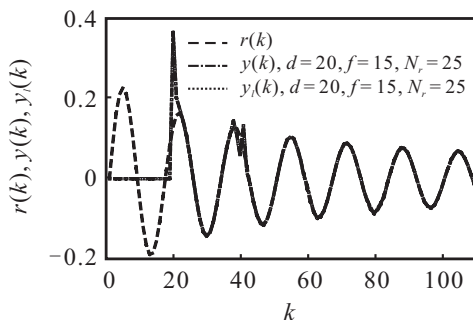


图6 跟踪衰减信号(与提升法比较)

在图5和图6中, $y(k)$ 表示使用提升-预估法设计控制器的输出响应, $y_l(k)$ 表示只使用提升法设计控制器的输出响应. 图5和图6显示, 相比于状态时滞和输入时滞均采用提升技术的情况, 使用本文给出的控

制器对参考信号具有相同的跟踪效果. 这表明使用本文设计的预见控制器进行跟踪控制时, 在降低扩大误差系统维数的同时不会导致跟踪性能损失, 可以达到相同的控制效果.

6 结论

本文研究了一类既有状态时滞又有输入时滞的离散时间线性系统的预见控制问题, 给出了这类问题预见控制器的设计方法. 数值仿真表明了所设计方法的有效性.

需要特别指出的是:

1) 本文分别使用不同的方法来消除系统中的状态时滞和输入时滞, 这样设计降低了扩大误差系统的维数, 从而降低了 Riccati 方程的阶数, 减小了计算量.

2) 通过定理1和定理2简化了时滞系统存在预见控制器的条件.

3) 拓宽了预见控制器设计对象的范围, 推论1表明无时滞系统的预见控制是本文的一个特例.

参考文献(References)

- [1] Czarnetki S, Kerner S, Urbann O. Observer-based dynamic walking control for biped robots[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(8): 839-845.
- [2] Sharp R S. Optimal preview speed-tracking control for motorcycles[J]. Multibody System Dynamics, 2007, 18(3): 397-411.
- [3] Marzbanrad J, Ahmadi G, Jha R. Optimal preview active control of structures during earthquakes[J]. Engineering Structures, 2004, 26(10): 1463-1471.
- [4] Katayama T, Hirono T. Design of an optimal servomechanism with preview action and its dual problem[J]. Int J of Control, 1987, 45(2): 407-420.
- [5] Katayama T, Ohki T, Inour T, et al. Design of an optimal controller for a discrete-time system subject to previewable demand[J]. Int J of Control, 1985, 41(3): 677-699.
- [6] Tsuchiya T, Egami T. Digital preview and predictive control[M]. Beijing: Beijing Science and Technology Press, 1994: 34-56.
- [7] Liao F, Cao M, Hu Z, et al. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time causal descriptor systems[J]. Int J of Control, 2012, 85(10): 1616-1624.
- [8] Liao F, Ren Z, Tomizuka M, et al. Preview control for impulse-free continuous-time descriptor systems[J]. Int J of Control, 2015, 88(6): 1142-1149.
- [9] Cao M, Liao F. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time descriptor systems with state delay[J]. Int J of Systems Science, 2015, 46(5): 932-943.
- [10] Gershon E, Shaked U. H_∞ preview tracking control of retarded state-multiplicative stochastic systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2014, 24(15): 2119-2135.
- [11] Liao F, Lu Y, Liu H. Cooperative optimal preview tracking

- control of continuous-time multi-agent systems[J]. *Int J of Control*, 2016, 89(10): 2019-2028.
- [12] Kim D S, Lee Y S, Kwon W H, et al. Maximum allowable delay bounds of networked control systems[J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(11): 1301-1313.
- [13] Xia Y, Fu M, Liu G P. Analysis and synthesis of networked control systems[M]. Berlin: Springer Heidelberg, 2011: 159-181.
- [14] Zou Y, Chen T, Li S. Network-based predictive control of multirate systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(7): 1145-1156.
- [15] Li H, Liu H, Gao H, et al. Reliable fuzzy control for active suspension systems with actuator delay and fault[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2012, 20(2): 342-357.
- [16] Martins M A F, Yamashita A S, Santoro B F, et al. Robust model predictive control of integrating time delay processes[J]. *J of Process Control*, 2013, 23(7): 917-932.
- [17] Zhang B, Xu S, Zou Y. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2963-2967.
- [18] Yue D. Robust stabilization of uncertain systems with unknown time-delay[J]. *Automatica*, 2004, 40(2): 331-336.
- [19] Chen W H, Zheng W X. On improved robust stabilization of uncertain systems with unknown input delay[J]. *Automatica*, 2006, 42(6): 1067-1072.
- [20] Gonzalez A, Sala A, Garcia P, Albertos P. Robustness analysis of discrete predictor-based controllers for input-delay systems[J]. *Int J of Systems Science*, 2013, 44(2): 232-239.
- [21] Bououden S, Chadli M, Karimi H R. A robust predictive control design for nonlinear active car suspension systems[J]. *Asian J of Control*, 2016, 8(1): 122-132.
- [22] Ahn C K, Shi P, Wu L. Receding horizon stabilization and disturbance attenuation for neural networks with time-varying delay[J]. *IEEE Trans on Cybernetics*, 2015, 45(12): 2680-2692.
- [23] Murillo M H, Limache A C, Fredini P S, et al. Generalized nonlinear optimal predictive control using iterative state-space trajectories: Applications to autonomous flight of UAVs[J]. *Int J of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(2): 361-370.
- [24] Zhang X M, Wu M, She J H, et al. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays[J]. *Automatica*, 2005, 41(8): 1405-1412.
- [25] Marzban H R, Shahsiah M. Solution of piecewise constant delay systems using hybrid of block-pulse and chebyshev polynomials[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2011, 32(6): 647-659.
- [26] Zhu Y, Su H, Krstic M. Adaptive backstepping control of uncertain linear systems under unknown actuator delay[J]. *Automatica*, 2015, 54: 256-265.
- [27] Lee Y S, Han S. An improved receding horizon control for time-delay systems[J]. *J of Optimization Theory and Applications*, 2015, 165(2): 627-638.
- [28] Choi Y H, Yoo S J. Minimal-approximation-based decentralized backstepping control of interconnected time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Cybernetics*, 2016, 46(12): 3401-3413.
- [29] Xu Q, Stepan G, Wang Z. Delay-dependent stability analysis by using delay-independent integral evaluation[J]. *Automatica*, 2016, 70: 153-157.
- [30] Zhou B. Truncated predictor feedback for time-delay systems[M]. Berlin: Springer-Verlag Heidelberg, 2014: 45-59.
- [31] Zhou B. Input delay compensation of linear systems with both state and input delays by adding integrators[J]. *System and Control Letters*, 2015, 82: 51-63.
- [32] Xia Y, Liu G, Shi P, et al. Sliding mode control of uncertain linear discrete time systems with input delay[J]. *IET Control Theory Applications*, 2007, 1(4): 1169-1175.
- [33] Gonzalez A. Robust stabilization of linear discrete-time systems with time varying input delay[J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2919-2922.
- [34] Gonzalez A, Sala A, Albertos P. Predictor-based stabilization of discrete time-varying input-delay systems[J]. *Automatica*, 2012, 48(2): 454-457.
- [35] 甄子洋. 预见控制理论及应用研究进展[J]. *自动化学报*, 2016, 42(2): 172-188.
(Zhen Z Y. Research development in preview control theory and applications[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(2): 172-188.)
- [36] Zhang H, Duan G, Xie L. Linear quadratic regulation for linear time-varying systems with multiple input delays[J]. *Automatica*, 2006, 42(9): 1465-1476.

(责任编辑: 郑晓蕾)