

基于双阈值的压缩采样匹配追踪改进算法

吕伟杰[†], 张 飞, 胡晨辉

(天津大学 电气与自动化工程学院, 天津 300072)

摘 要: 针对基于压缩感知的压缩采样匹配追踪(CoSaMP)算法迭代次数严重依赖于信号稀疏度, 候选原子冗余度大, 从而导致最终的支撑原子集选择时间长、选择精度低等问题, 提出一种基于双阈值的压缩采样匹配追踪算法. 该算法利用模糊阈值进行支撑集候选原子的选择, 引入残差与观测矩阵的相关度变化阈值作为迭代停止条件, 对图像进行重构. 仿真实验表明, 所提出的算法重构速度快, 重构效果优于CoSaMP算法.

关键词: 压缩感知; 信号重构; 双阈值

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Modified compressive sampling matching pursuit algorithm based on double threshold

LV Wei-jie[†], ZHANG Fei, HU Chen-hui

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: To overcome the problems that the iterative number of compressive sampling matching pursuit(CoSaMP) algorithm is heavily dependence on sparsity K , and the larger redundancy of the candidate atoms leads to low precision, a modified CoSaMP algorithm is proposed. The algorithm reconstructs images by using fuzzy threshold to select candidate atoms for supporting set and setting the correlation threshold between measure matrix and residual error as the condition for stopping iteration. The simulations demonstrate that the modified algorithm spends less computing time than the CoSaMP algorithm, and improves the performance of the recovery.

Keywords: compressive sensing; signal reconstruction; double threshold

0 引 言

近些年, 压缩感知^[1-3]一直是研究的一个热点问题, 在图像处理和语音信号处理等领域有着广泛的应用. 压缩感知理论指出: 若当某一信号是稀疏的或信号在某一变换下是可稀疏表示的, 则可以通过采集少量的投影值来准确或高概率地逼近原始信号. 压缩感知突破了传统的奈奎斯特采样定理对采样频率的要求, 在数据处理方面有着显著的优势.

压缩感知着重对以下3方面进行研究^[4]: 稀疏变换基的选择、观测矩阵的构造以及重构算法的设计. 重构算法作为压缩感知的最重要的一个环节, 重构效果的好坏直接影响压缩感知的实用性. 重构算法主要分为3类^[5]: 凸松弛算法、贪婪算法和组合算法. 凸松弛算法重构效果好, 但计算复杂度较高, 导致重构时间较长; 组合算法重构时间短, 但重构结果不精确; 贪婪算法重构速度快, 重构效果好, 应用最为广泛. 贪婪算法主要有匹配追踪(MP)^[6]、正交匹

配追踪(OMP)^[7]、正则化正交匹配追踪(ROMP)^[8]、分段正交匹配追踪(StOMP)^[9]、压缩采样匹配追踪(CoSaMP)^[10]以及在此基础上进行改进的算法等. CoSaMP算法迭代次数严重依赖于信号稀疏度, 测量次数多, 耗时长, 候选原子的冗余也会使重构精度降低.

针对上述问题, 本文给出一种改进的压缩采样匹配追踪(MCoSaMP)算法, 该算法在CoSaMP算法的基础上, 改进支撑集的选择方法, 并引入残差与观测矩阵的相关度^[11]变化阈值作为迭代停止条件. 该算法可缩短重构时间, 并取得更好的重构效果.

1 压缩感知理论

假设一维离散信号 $x \in R^{N \times 1}$ 在正交基 $\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ 上的投影可表示为

$$x = \sum_{i=1}^N \psi_i s_i = \psi^T s. \quad (1)$$

收稿日期: 2016-07-21; 修回日期: 2016-11-09.

基金项目: 天津市自然科学基金青年基金项目(13JCQNJC00800).

作者简介: 吕伟杰(1975—), 女, 副教授, 博士, 从事无线传感器网络、压缩感知等研究; 张飞(1992—), 男, 硕士生, 从事压缩感知的研究.

[†]通讯作者. E-mail: weijieli@tju.edu.cn

其中: x 是在时间域的信号表达, s 是在 ψ 域的信号表达. 如果 s 中参数只有 K 个大于零, 其余 $N - K$ 个等于或非常接近于零, 则称信号 x 在 ψ 域是可稀疏表示的, K 称为稀疏度, ψ 为稀疏变换矩阵. 对于 x , 可以使用一个矩阵 Φ 进行观测, 得到 x 的 m 个线性表达, 即

$$y = \Phi x. \quad (2)$$

对于具有 K 稀疏的向量 v , 观测矩阵 Φ 必须满足限制等距准则 (RIP)^[12], 即

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\|\Phi v\|_2}{\|v\|_2} \leq 1 + \varepsilon, \quad (3)$$

其中 $\varepsilon > 0$. 合并式 (1) 和 (2), 有

$$y = \Phi \psi^T s = \Theta s, \quad (4)$$

其中传感矩阵 $\Theta = \Phi \psi^T$ 为 $M \times N$ 矩阵. 由于未知数的个数 N 大于方程个数 M , 求解过程将成为一个解欠定方程组的问题. 鉴于 x 是稀疏的, 且 Φ 满足限制等距准则, 上述问题可以转化为 l_0 范数下的最优化问题, 即

$$\min \|x\|_0, \text{ s.t. } y = \Phi x. \quad (5)$$

最小 l_0 范数优化求解是一个 NP-hard 问题, 求解困难且数值计算不稳定. 文献 [13] 指出, 求解最小 l_0 范数优化问题可以转化为一个更加简单的 l_1 范数优化问题, 即

$$\min \|x\|_1, \text{ s.t. } y = \Phi x. \quad (6)$$

针对 l_1 范数下的最优化问题, 目前主要的求解算法有匹配追踪和梯度投影等算法.

2 MCoSaMP 算法

2.1 CoSaMP 算法介绍

CoSaMP 算法是在 ROMP 算法基础上发展而来的, 算法复杂度低、重构精度高, 是比较理想的重构算法. 算法以贪婪迭代的方法在每次迭代中选择与当前的冗余向量最大程度相关的 $2K$ 个原子构成候选原子集, 然后在候选原子集中选择 K 个与观测向量 y 最相关的原子进行构造原始信号, 更新残差, 当迭代次数达到稀疏度 K 时退出. CoSaMP 算法具体步骤如下.

输入: 稀疏度 K , 观测矩阵 Φ , 观测向量 y ;

输出: 原始信号 x 的逼近信号 $\hat{x}$.

Step 1: 初始化. 令迭代次数 $t = 1$, 残差 $r_0 = y$.

Step 2: 求观测矩阵 Φ 与残差 r 内积最大的 $2K$ 个原子对应的脚标集合

$$\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,N} \{|\langle r_{t-1}, \psi_j \rangle|, 2K\},$$

其中 ψ_j 为观测矩阵 Φ 中原子.

Step 3: 更新候选原子集合 $\Phi_t = [\Phi_{t-1}, \psi_{\lambda_t}]$.

Step 4: 求候选原子矩阵 Φ_t 与观测向量内积最大的 K 个原子对应的脚标集合

$$\lambda'_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,2K} \{|\Phi_t^T y|, K\}.$$

Step 5: 由最小二乘法求信号近似解

$$\hat{x}_t = \arg \min \|y - \Phi_{\lambda'_t} \hat{x}_t\|_2.$$

Step 6: 更新残差和迭代次数 $r_t = y - \Phi_{\lambda'_t} \hat{x}_t$, $t = t + 1$.

Step 7: 判断是否满足迭代停止条件 $t > K$, 若满足, 则迭代停止; 否则, 转向 Step 2 继续执行.

2.2 CoSaMP 算法改进

2.2.1 重构原子的选择

CoSaMP 算法在迭代过程中每次选择 $2K$ 个原子扩充候选原子集, 这样的选择很大程度上增加了候选原子集的数量, 因此, 候选原子集中错误原子和相关度较小的原子也将增多, 这就增加了最终原子集选择时的选择时间, 同时重构精度也将下降. 针对这一问题, 本文算法利用模糊阈值进行候选原子的选择. 在选择 $2K$ 个原子中, 利用前两个原子的相关度的比值和平均值来设定阈值 $\gamma = \alpha \times (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2$, 其中 ε_1 和 ε_2 为原子相关度, 依据经验取 α 的范围为 $[0.85, 0.9]$, 具体值由 $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$ 确定. 通过设定阈值来选择满足相关度 $\varepsilon > \gamma$ 的原子加入候选原子集, 这样既能保证候选原子的正确性, 又能为最终原子集的选择节省时间.

2.2.2 迭代停止条件

CoSaMP 算法在迭代次数中严重依赖于稀疏度 K , 迭代次数需达到 K 才能完成信号的重构. 但实际应用中, 往往不需要迭代 K 次, 信号就能达到精确重建. 针对迭代次数多、重构时间长这一问题, 本文算法引入原子相关度变化阈值作为迭代停止条件, 每次迭代时, 计算观测矩阵与当前残差的最大相关度 ε_t , 然后将其与上次迭代时的最大相关度 ε_{t-1} 进行比较, 如果小于一定的阈值 δ , 则说明重构原子已经选择完毕, 迭代停止; 否则将继续执行. 这样, 将大大减小算法迭代次数对稀疏度的依赖, 同时也减少了迭代的次数.

2.2.3 MCoSaMP 算法步骤

输入: 稀疏度 K , 观测矩阵 Φ , 观测向量 y ;

输出: 原始信号 x 的逼近信号 $\hat{x}$.

Step 1: 初始化. 令迭代次数 $t = 1$, 残差 $r_0 = y$, 残差相关度 $\varepsilon_0 = 0$.

Step 2: 求观测矩阵 Φ 与残差 r 内积最大的 $2K$ 个原子对应的脚标集合

$$\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,N} \{|\langle r_{t-1}, \psi_j \rangle|, 2K\},$$

其中 ψ_j 为观测矩阵 Φ 中原子。

Step 3: 在 $2K$ 个原子中求满足 $\varepsilon > \gamma$ 的原子脚标集合, 即

$$\lambda_t^* = |\langle r_{t-1}, \varphi_j \rangle| > \gamma, j = 1, 2, \dots, 2K.$$

Step 4: 更新候选原子集合 $\Phi_t = [\Phi_{t-1}, \psi_{\lambda_t^*}]$.

Step 5: 求候选原子矩阵 Φ_t 与观测向量内积最大的 K 个原子对应的脚标集合。

$$\lambda'_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,2K} \{|\Phi_t^T y|, K\}.$$

Step 6: 由最小二乘法求信号近似解

$$\hat{x}_t = \arg \min \|y - \Phi_{\lambda'_t} \hat{x}_t\|_2.$$

Step 7: 更新残差 $r_t = y - \Phi_{\lambda'_t} \hat{x}_t$, 计算残差相关度

$$\varepsilon_t = \max_{j=1,2,\dots,N} |\langle r_t, \psi_j \rangle|.$$

Step 8: 判断是否满足迭代停止条件 $|\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t| < \delta$, 若满足, 则迭代停止; 否则 $t = t + 1$, 转向 Step 2 继续执行。

3 仿真实验结果分析

3.1 实验环境

为检验本文算法的有效性和正确性, 将本文算法在装有 64 位 Windows7 旗舰版操作系统, 运行内存为 4 G, 处理器为 1.8 GHz 的计算机上运行, 在 Matlab R2011b 环境下操作。实验以标准测试图像 Lena ($256 \times 256 \times 8$ bit) 和 Camera ($256 \times 256 \times 8$ bit) 为重构建号, 采用离散小波基^[14]作为正交基, $M \times N$ 维的高斯随机矩阵为测量矩阵, 即每项元素均是独立分布零均值单位方差的高斯随机变量。 M 为观测向量 y 的维数, N 为原始信号 x 的维数, 实验采用不同的采样率 (M/N) 作为对比实验, 以列为单位进行处理。对于 $|\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t| < \delta$, 根据实验数据图 1 和表 1, 随机选择 $\delta = 10$, 既可减少重构时间, 又能保证重构精度。图

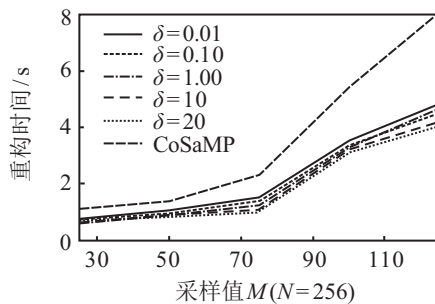


图 1 不同 δ 值下重构时间对比

表 1 不同 δ 值下重构信号的 PSNR 对比

M/N	CoSaMP	MCoSaMP (δ 取不同值)				
		0.01	0.1	1	10	20
0.1	5.085	5.775	5.905	5.701	5.746	5.716
0.2	7.337	8.662	8.541	8.585	8.539	8.504
0.3	16.136	15.613	15.536	15.378	15.449	15.226
0.4	24.300	23.950	23.891	23.981	24.007	23.856
0.5	26.628	26.596	26.618	26.634	26.633	26.602

1 和表 1 中数据均在 CoSaMP 算法的基础上只加入迭代停止条件测得。依据文献 [15] 的结论, 本文稀疏度 K 选择 $M/4$ 。

3.2 评价指标

本文采用重构时间、峰值信噪比 (PSNR) 和重构误差 err 作为算法性能评价指标, 与 OMP、CoSaMP、BAOMP 算法进行比较。重构时间指整幅图像重构完成所需要的时间, 是算法复杂度的一种体现。峰值信噪比和重构误差 err 是评价图像失真度的有效方法, 分别定义如下:

$$\begin{cases} \text{PSNR} = 10 \log \left(\frac{255 \times 255}{\text{MSE}} \right), \\ \text{MSE} = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g(i, j) - f(i, j))^2; \\ \text{err} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (g(i, j) - f(i, j))^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N g(i, j)^2}}. \end{cases}$$

其中: M 和 N 是图像的行数和列数, $g(i, j)$ 和 $f(i, j)$ 分别表示原始图像和重构图像在像素点 (i, j) 处的灰度值。

3.3 实验结果及分析

图 2 为对 Lena 图像进行重构的 PSNR 值, 可以看出, 本文改进的算法较 OMP、BaOMP 和 CoSaMP 算法在重构图像的峰值信噪比上都有提高, 特别在采样值较低时优势更加明显。随着采样值的提高, 4 种算法重构信号的峰值信噪比都在逐渐提高, 且差别越来越小, 这是因为当采样值达到一定值时, 重构的信号将趋于稳定。

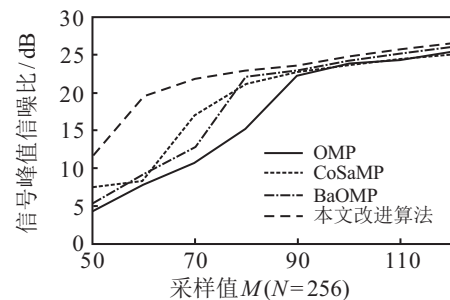


图 2 不同采样值下的重构信号峰值信噪比对比

图 3 为对 Lena 图像进行重构所需的时间, 显然, 改进算法在重构时间上较其他算法缩短了很多。随着采样值的增大, 重构时间上的优势更明显, 因为改进的算法通过设定的阈值, 能够在较少的候选原子中选出最终参与构造信号的原子, 使得计算量大大减少, 节省了时间。迭代停止条件的引入, 减少了算法的

迭代次数,同样节省了信号重构时间.

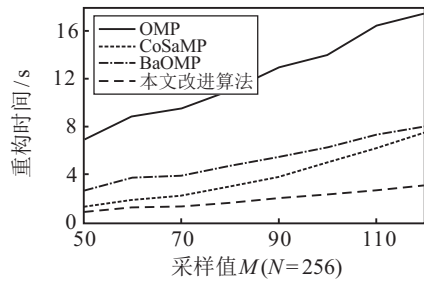


图3 不同采样值下的信号重构时间对比

为对比原算法与改进算法性能,分别采用两种算法对Lena图形进行实验得到表2数据. 观察表2,两种算法随着采样率的提高,重构时间都在增加,重构效果也在提高. 改进算法重构的时间比原算法明显减少,重构图像的PSNR值也优于原算法.

表2 两种算法对Lena图重构的t和PSNR比较

M/N	算法	t/s	PSNR/dB
0.1	CoSaMP	1.106 426	4.921 8
	改进算法	0.857 105	6.982 6
0.2	CoSaMP	1.390 581	7.562 0
	改进算法	1.126 540	11.834 6
0.3	CoSaMP	2.322 166	15.469 5
	改进算法	1.906 812	22.693 9
0.4	CoSaMP	7.351 346	23.233 4
	改进算法	2.151 182	25.152 8
0.5	CoSaMP	9.043 72	26.639 2
	改进算法	3.120 828	26.908 7

采样率取为0.4,采用CoSaMP算法和本文改进算法分别对Lena图像和Camera图像进行重构,重构结果如图4和图5所示. 可以看出,重构图像的清晰度较原算法有明显的提高.



图4 采样率为0.4时Lena重构图像对比



图5 采样率为0.4时Camera重构图像对比

表3给出了在采样率为0.4时采用不同算法对Camera图像进行重构得到的重构误差值. 可见,本文改进算法较其他几种算法重构误差值明显减小.

表3 不同算法对Camera图重构的误差err比较

算法	重构误差err
OMP	0.003 1
BaOMP	0.003 2
CoSaMP	0.002 7
本文改进算法	0.001 7

实验结果表明,改进算法重构的图像质量从主观视觉和客观数据上较原算法都有所提升,重构图像更加清晰.

4 结 论

本文算法采用观测矩阵与残差的相关度变化阈值作为迭代的停止条件,减少了算法的迭代次数,节约了重构时间. 算法在候选原子集的选择中增加了模糊阈值,能避免对候选原子集的盲目扩充,大大地提高了重构精度,并且减少了最终原子集选择时的计算量,同样为信号的重构节省了时间. 仿真实验表明,该算法较CoSaMP算法有着更短的重构时间和更好的重构效果.

参考文献(References)

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-120.
- [3] Shi G, Liu D, Gao D, et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [4] 吕伟杰, 陈霞, 刘红珍. 基于压缩感知的自适应匹配追踪算法优化[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(5): 1201-1205.
(Lv W J, Chen X, Liu H Z. Modified adaptive matching pursuit algorithm based on compressive sensing[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(5): 1201-1205.)
- [5] 田文飏, 付争, 芮国胜. 基于分治试探的盲自适应匹配追踪重构算法[J]. 通信学报, 2013, 34(4): 180-186.
(Tian W B, Fu Z, Rui G S. Blind adaptive matching pursuit algorithm for signal reconstruction based on sparsity trial and error[J]. J on Communications, 2013, 34(4): 180-186.)
- [6] Mallat S G, Zhifeng Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [7] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [8] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3): 317-334.
- [9] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution

- of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [10] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 301-321.
- [11] Wang R, Zhang J L, Ren S L, et al. A reducing iteration orthogonal matching pursuit algorithm for compressive sensing[J]. Tsinghua Science and Technology, 2016, 21(1): 71-79.
- [12] Candes E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2008, 346(9/10): 589-592.
- [13] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [14] Plonka G, Jian W M. Curvelet-wavelet regularized split bregman iteration for compressed sensing[J]. Int J of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2011, 9(1): 79-110.
- [15] Donoho D L, Tsaig Y. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 549-571.

(责任编辑: 李君玲)

第29届中国控制与决策会议(2017CCDC)在重庆召开

5月28日~30日,第29届中国控制与决策会议(2017CCDC)在重庆君豪大饭店隆重召开。

本次盛会由东北大学、IEEE新加坡工业电子分会和中国自动化学会信息物理系统控制与决策专业委员会联合主办,重庆大学具体承办,IEEE控制系统协会、中国人工智能学会(CAAI)、中国自动化控制理论专业委员会和东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室协办。来自海内外高等院校和科研机构的1200余位代表出席了会议。其中,海外代表分别来自美国、俄罗斯、日本、新加坡、加拿大、西班牙、澳大利亚、巴基斯坦、以色列、南非、台湾、香港等13个国家和地区。这是一次国际学术盛会,业界精英齐聚一堂,交流学术思想,讨论学术问题,充满了浓厚的学术气氛。

在5月28日上午举行的开幕式上,大会副总主席、重庆大学自动化学院院长宋永端教授主持开幕式,东北大学副校长王福利教授致开幕辞,重庆大学副校长杨丹教授致欢迎辞,国际程序委员会主席、新加坡南洋理工大学Changyun Wen教授介绍了会议程序。大会涵盖了控制与决策领域的相关课题,主题涉及理论与应用两方面。会议共设大会报告4个、杰出讲座8个、分会场报告152场次,张贴论文达530余篇。4位大会报告人分别为美国斯坦福大学Stephen P. Boyd教授、美国南加利福尼亚大学Petros Ioannou教授、美国科罗拉多州立大学Edwin K. P. Chong教授和中国科学院院士、北京航空航天大学副校长房建成教授。此外,大会还邀请了澳大利亚纽卡斯尔大学Zhiyong Chen教授、澳大利亚新南威尔士大学Z.Y. Dong教授、中国华中科技大学关治洪教授、美国罗德岛大学Haibo He教授、中国东北大学黄敏教授、瑞典皇家理工学院Karl H. Johansson教授、中国科学院大学乔红教授、日本上智大学Tielong Shen教授8位著名学者,

就当前控制与决策领域的热点问题和最新研究成果作了杰出讲座。这些报告对当前前沿学科的一些热点问题进行了阐述和评论,受到代表们的普遍欢迎。分会场报告及张贴论文内容涉及控制与决策、自动化、机器人和新兴技术领域等方面。代表们分别宣读了论文,并就共同关心的问题进行了深入研讨。每位作者都能认真回答其他代表提出的问题,气氛非常热烈。

在5月29日举行的张嗣瀛青年优秀论文奖颁奖仪式上,有5位学者获得该奖项提名。最终,清华大学沈心悦和浙江大学乔勇凭借其优秀的论文和出色的报告赢得此奖项。国际程序委员会主席、美国纽约大学Zhong-Ping Jiang教授介绍了奖项评选过程,重庆大学自动化学院院长宋永端教授向获奖者和提名奖获得者颁发证书,东北大学副校长王福利教授向获奖者和提名奖获得者颁发奖金。本届会议张嗣瀛优秀青年论文奖的两位获得者分别获得奖金6500元,获得提名奖的奖金为3000元。

2018年是中国控制与决策会议创办30周年,为了纪念CCDC从创办到壮大的风雨历程,会议将回到主办单位所在地沈阳市举办。东北大学研究生院常务副院长杨光红教授介绍了第30届中国控制与决策会议(2018CCDC)的筹备情况,并欢迎各位代表积极参加会议。

本届会议发行了《第29届中国控制与决策会议论文集》光盘。光盘中的1430篇英文论文将进入IEEE Xplore Data Base,并被EI检索。

本届会议充分展现了控制与决策研究领域的发展现状,对促进学术交流、推动控制与决策学科的发展有着十分积极的促进作用。

中国控制与决策会议秘书处