文章编号: 1001-0920(2017)10-1817-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.1179

勾股模糊集的距离测度及其在多属性决策中的应用

李德清[1,2], 曾文艺[2†], 尹 乾[2]

(1. 军械工程学院 基础部，石家庄 050003；2. 北京师范大学 信息科学与技术学院, 北京 100875)

摘 要: 首先,讨论3种勾股模糊数排序方法的特点,指出其中两种排序方法的不足;其次,研究勾股模糊集的结构特征,指出勾股模糊数本质上由隶属度、非隶属度、自信度和自信度方向4个特征参数完全刻画;再次,利用上述4个参数分别构造勾股模糊数和勾股模糊集之间的海明距离、欧几里得距离和闵可夫斯基距离,并研究这些距离公式的性质;最后,借助理想点法给出基于勾股模糊集距离的多属性决策方法,并通过实例验证所提方法的合理性.

关键词: 直觉模糊集；勾股模糊集；勾股模糊数；勾股模糊数排序；距离

中图分类号: O159 **文献标志码:** A

Distance measures of pythagorean fuzzy sets and their applications in multiattribute decision making

LI De-qing[1,2], *ZENG Wen-yi*[2†], *YIN Qian*[2]

(1. Department of Basics，Ordnance Engineering College，Shijiazhuang 050003，China；2. College of Information Science and Technology, Beijing Normal University，Beijing 100875，China)

Abstract: Firstly, via comparing the features of intuitionistic fuzzy set(FS) and Pythagorean fuzzy set(PFS), three ranking methods for Pythagorean fuzzy numbers(PFNs) are analyzed, and some flaws of two ranking methods are pointed out. Then, it is illuminated that each PFN is characterized by four parameters, i.e., the membership degree, the nonmembership degree, the strength of commitment and the direction of strength. Simultaneously, the distance measures of PFSs and PFNs are investigated. The Hamming distance measure, the Euclidean distance measure and the Minkowski distance measure between PFSs and PFNs are proposed, and the desired properties are discussed. Finally, a multiple attribute decision making method in the Pythagorean fuzzy environment based on the proposed distance measures is presented. A numerical example is provided to illustrate the validity and applicability of the presented approach.

Keywords: intuitionistic fuzzy set；Pythagorean fuzzy set；Pythagorean fuzzy number；ranking of Pythagorean fuzzy number；distance

0 引 言

自Zadeh教授于1965年提出模糊集理论以来,该理论一直受到众多研究者的关注和重视,并已经成功应用于模糊决策、模糊控制、软计算、人工智能等诸多领域. 为进一步扩大模糊集理论的应用范围,许多学者致力于对模糊集理论进行推广和扩展. 例如, Zadeh[1]本人引入了2-型模糊集和区间值模糊集的概念,保加利亚学者Atanassov[2]研究了直觉模糊集,西班牙学者Torra[3]研究了犹豫模糊集等. 其中,直觉模糊集用隶属函数和非隶属函数来刻画模糊集,可同时表达隶属度、非隶属度和犹豫度3方面的信息,这比Zadeh模糊集在处理模糊性和不确定性方面更具灵活性和真实性,也使得直觉模糊集理论迅速成为了研究人员关注的热点. 最近,美国学者Yager[4-5]通过分析直觉模糊集中隶属度和非隶属度之间的关系,提出在复杂条件下可放宽直觉模糊集理论中隶属度与非隶属度之和小于等于1这一条件,并据此给出了模糊集理论的一个最新推广——勾股模糊集(PFS). 与直觉模糊集类似,勾股模糊集也同时包含隶属度和非隶属度,但隶属度与非隶属度之和的效果不能视为数值之和,而应该视为向量之和,因而数值之和可以超过1,但作为向量和的模必须小于等于1,即隶属度与非隶属度的平方和不超过1. 这说明可将勾股模糊集中的隶属度和非隶属度分别对应勾股定理中的两个勾

收稿日期: 2016-09-15；**修回日期:** 2017-02-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10971243, 61472043).

作者简介: 李德清(1965−), 男, 副教授, 从事模糊系统与模糊决策等研究；曾文艺(1966−), 男, 教授, 博士生导师, 从事模糊信息处理与人工智能、近似推理与模糊控制等研究.

†通讯作者. E-mail: zengwy@bnu.edu.cn

股数,故Yager形象地称其为勾股模糊集.

随后,不少学者对勾股模糊集表现出了极大的兴趣. 例如,Peng等[6-7]讨论了勾股模糊集的一些运算法则,给出了一些集成勾股模糊信息的决策算子,定义了区间值勾股模糊集,并构建了相应的决策算子; Zhang等[8-9]讨论了勾股模糊数的排序方法,定义了一种两个勾股模糊数之间的距离公式; Ren等[10]讨论了在勾股模糊环境下基于TODIM的多准则决策方法; Garg[11]利用Einstein T-模和S-模构建了一系列勾股模糊信息合成算子.

距离测度是模糊集理论与直觉模糊集理论中的重要研究内容[12-17]. 距离主要用于描述两个对象之间的差异,因此定义勾股模糊环境下两个对象之间的距离也是很有意义的研究课题. 虽然Zhang和Xu在文献[8]中定义了两个勾股模糊数之间的距离,但该距离公式只是直觉模糊数距离公式的简单推广,没有充分考虑勾股模糊集的特点,因而得到的距离不能真正反映勾股模糊数之间的差异. 本文在充分比较直觉模糊集与勾股模糊集的特点之后,给出勾股模糊数之间的距离公式和勾股模糊集之间的距离公式,并同时分析这些距离公式的性质.

1 直觉模糊集与勾股模糊集的基本概念

1.1 直觉模糊集的基本概念

定义1[2] 论域X上的一个直觉模糊集(IFS)是指如下形式的一个组合:

$$I=\{\langle x,\mu_I(x),\nu_I(x)\rangle|x\in X\}.$$

其中

$$\mu_I: X\to[0,1],$$
$$\nu_I: X\to[0,1].$$

若满足对于任意$x\in X$, $\mu_I(x)+\nu_I(x)\leqslant 1$,则分别称$\mu_I(x)$和$\nu_I(x)$为$x$对$I$的隶属度和非隶属度,称$\pi_I(x)=1-\mu_I(x)-\nu_I(x)$为$x$对$I$的不确定度.

为行文方便,Xu在文献[18]中记$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$为直觉模糊数. 对于任意直觉模糊数$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$,称$\pi_\alpha=1-\mu_\alpha-\nu_\alpha$为其犹豫度或不确定度.

为了区分用直觉模糊信息刻画的客观对象,Burillo等[13]定义了如下的海明距离和欧几里得距离.

定义2[13] 设A和B为论域$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的直觉模糊集,则A与B之间的海明距离为

$$D_h(A,B)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|). \tag{1}$$

A与B之间的欧几里得距离为

$$D_e(A,B)=\Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}((\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2+(\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i))^2)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

随后,Szmidt等[15]指出上述距离公式忽略了犹豫度之间的差异,这样得到的结果并不能完全反映两个直觉模糊集之间的差异. 为此,他们给出了如下直觉模糊集距离公式:

A与B之间的海明距离为

$$D_h(A,B)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|+|\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i)|+|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|). \tag{3}$$

A,B之间的欧几里得距离为

$$D_e(A,B)=\Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}((\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2+(\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i))^2+(\pi_A(x_i)-pi_B(x_i))^2)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

为了对直觉模糊集进行比较和排序,Chen和Tan在文献[19]中引入了记分函数.

定义3[19] 设$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$为直觉模糊数,则定义$\alpha$的记分函数值为

$$s(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha. \tag{5}$$

记分函数值主要用于对直觉模糊数进行排序,其值越大,则对应的直觉模糊数越大. 但存在的问题是,对于两个不同的直觉模糊数,经常出现对应的记分函数值相等的情形,因而难以区分. 为此,Hong和Choi在文献[20]中引入了精准函数的概念.

定义4[20] 设$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$为直觉模糊数,则定义$\alpha$的精准函数值为

$$h(\alpha)=\mu_\alpha+\nu_\alpha. \tag{6}$$

因为$h(\alpha)=1-\pi_\alpha$,所以其值的大小反映了决策者自信度的大小.

记分函数与精准函数的作用类似于概率统计中数学期望与方差的作用,因此在对直觉模糊数进行排序时,记分函数比精准函数更重要. 基于此,Xu在文献[18]中利用记分函数和精准函数按照字典排序法的思想给出了如下的直觉模糊数排序方法.

定义5[18] 设$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$和$\beta=\langle\mu_\beta,\nu_\beta\rangle$为两个直觉模糊数,则: 1) 如果$s(\alpha)>s(\beta)$,则认为$\alpha>\beta$;

2) 若$s(\alpha)=s(\beta)$, 则当$h(\alpha)=h(\beta)$时, 认为$\alpha=\beta$, 当$h(\alpha)>h(\beta)$时, 认为$\alpha>\beta$.

1.2 勾股模糊集的基本概念

定义6[4] 论域X上的一个勾股模糊集(PFS)是指如下形式的一个组合:

$$P=\{\langle x,\mu_P(x),\nu_P(x)\rangle|x\in X\}.$$

其中

$$\mu_P:X\to[0,1],$$
$$\nu_P:X\to[0,1].$$

若满足对于任意$x\in X$, $(\mu_P(x))^2+(\nu_P(x))^2\leqslant 1$, 则分别称$\mu_P(x)$和$\nu_P(x)$为$x$对$P$的隶属度和非隶属度, 称$\pi_P(x)=\sqrt{1-(\mu_P(x))^2-(\nu_P(x))^2}$为$x$对$P$的犹豫度或不确定度.

综上可以看出, 直觉模糊集必定是勾股模糊集, 但勾股模糊集不一定是直觉模糊集, 即勾股模糊集是直觉模糊集的推广, 直觉模糊集是特殊的勾股模糊集.

若将隶属度$\mu_P(x)$和非隶属度$\nu_P(x)$分别看成二维直角坐标系中横坐标轴和纵坐标轴上的向量, 则$r_P(x)=\sqrt{(\mu_P(x))^2+(\nu_P(x))^2}$可被视为隶属度与非隶属度向量和的模, Yager称其为自信度. 自信度的作用效果与$r_P(x)$和$\mu_P(x)$所在方向的夹角有关. 设$r_P(x)$与$\mu_P(x)$所在方向的夹角为$\theta_P(x)$, Yager定义了一个刻画自信度$r_P(x)$方向的量$d_P(x)$, 称为自信度的方向. 其中, $d_P(x)\in[0,1]$, 且$d_P(x)=1-\dfrac{2\theta_P(x)}{\pi}$, $\mu_P(x)=r_P(x)\cos(\theta_P(x))$, $\nu_P(x)=r_P(x)\sin(\theta_P(x))$. 利用勾股模糊集的自信度和自信度方向, Yager等[5]又将勾股模糊集记为$P=\{r_P(x)\mathrm{e}^{i\theta_P(x)}|x\in X\}$, 并称其为$\prod-i$型模糊数.

为行文方便, Zhang等在文献[8]中记$p=\langle\mu_p,\nu_p\rangle$, 称其为勾股模糊数(PFN), 对于任意勾股模糊数$p=\langle\mu_p,\nu_p\rangle$, 称$r_p=\sqrt{(\mu_p)^2+(\nu_p)^2}$为$p$的自信度, $\pi_p=\sqrt{1-(\mu_p)^2-(\nu_p)^2}$为其犹豫度.

为了集成勾股模糊信息, Yager[4]给出了如下勾股模糊加权平均算子和勾股模糊加权几何平均算子.

定义7[4] 设$p_1,p_2,\cdots,p_n$为n个勾股模糊数, 其中$p_i=\langle\mu_{p_i},\nu_{p_i}\rangle(i=1,2,\cdots,n)$, $w_1,w_2,\cdots,w_n$为勾股模糊数对应的权重, 若满足$0\leqslant w_i\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$, 且$\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$, 则称

$$\mathrm{PFWA}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\Big\langle\sum_{i=1}^{n}w_i\mu_{p_i},\ \sum_{i=1}^{n}w_i\nu_{p_i}\Big\rangle \tag{7}$$

为勾股模糊加权平均算子.

定义8[5] 设$p_1,p_2,\cdots,p_n$为n个由$\prod-i$形式表示的勾股模糊数, 其中$p_j=r_{p_j}\mathrm{e}^{i\theta_{p_j}}(j=1,2,\cdots,n)$, $w_1,w_2,\cdots,w_n$为勾股模糊数对应的权重, 若满足$0\leqslant w_j\leqslant 1$, $j=1,2,\cdots,n$, 且$\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$, 则称

$$\mathrm{PFGA}(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\prod_{j=1}^{n}(r_{p_j})^{w_j}\mathrm{e}^{i\sum\limits_{j=1}^{n}w_j\theta_{p_j}} \tag{8}$$

为勾股模糊几何平均算子.

为了区分用勾股模糊信息刻画的客观对象, Zhang等[8]定义了如下的距离公式.

定义9[8] 设$p_1=\langle\mu_{p_1},\nu_{p_1}\rangle$和$p_2=\langle\mu_{p_2},\nu_{p_2}\rangle$为两个勾股模糊数, 则$p_1$与$p_2$之间的距离为

$$D(p_1,p_2)=\frac{1}{2}(|(\mu_{p_1})^2-(\mu_{p_2})^2|+|(\nu_{p_1})^2-(\nu_{p_2})^2|+|(\pi_{p_1})^2-(\pi_{p_2})^2|). \tag{9}$$

不难看出, 式(9)是(3)的直接推广. 该距离公式只考虑了隶属度、非隶属度以及犹豫度的影响, 而忽略了勾股模糊数由4个参数刻画的特点, 因而不是一个很科学的勾股模糊数距离公式.

例1 设有3个勾股模糊数$p_1=\langle 0.8,0.5\rangle$, $p_2=\langle 0.5,0.8\rangle$, $p=\langle 0.5,0.3\rangle$, 则$D(p,p_1)=D(p,p_2)=0.55$. 又计算可得$r_{p_1}=r_{p_2}=0.943\,4$, $d_{p_1}=0.644\,4$, $d_{p_2}=0.355\,6$, $d_p=0.656$. 虽然p_1,p_2的自信度相同, 但影响自信度作用的方向却相差很大, 且p_1,p_2的自信度方向都比p的自信度方向小, 所以得出p,p_1之间的差异与p,p_2之间的差异相同的结论是不合理的. 这说明上述距离公式是不科学的.

考虑到$\pi_p=\sqrt{1-r_p^2}$, 故勾股模糊数p由隶属度μ_p、非隶属度ν_p、p的自信度r_p和自信度的方向d_p这4个参数完全刻画. 因此, 在考虑两个勾股模糊数的差异, 即定义两个勾股模糊数之间的距离时, 应充分考虑这4个参数的影响.

2 3种勾股模糊数排序方法的比较

方法1 为了对两个勾股模糊数进行排序比较, 类似直觉模糊数的排序方法, Zhang等[8]定义了勾股模糊数的记分函数, 然后由记分函数的值对勾股模糊数进行排序.

定义10[8] 设$p=\langle\mu_p,\nu_p\rangle$为勾股模糊数, 则$p$的记分函数定义如下:

$$s(p)=(\mu_p)^2-(\nu_p)^2. \tag{10}$$

对于任意两个勾股模糊数p_1,p_2, 根据记分函数

给出如下排序规则:

1) 如果 $s(p_1) > s(p_2)$,则 p_1 大于 p_2,记为 $p_1 > p_2$;

2) 如果 $s(p_1) = s(p_2)$,则 p_1 等于 p_2,记为 $p_1 = p_2$.

方法2 Peng等[6]指出,由计分函数对勾股模糊数排序时,排序结果比较粗糙,判断为相等的情形太多,于是给出了精准函数的概念,定义如下.

定义11[6] 设 $p = \langle \mu_p, \nu_p \rangle$ 为勾股模糊数,则 p 的精准函数值为

$$h(p) = (\mu_p)^2 + (\nu_p)^2. \tag{11}$$

对于任意两个勾股模糊数 p_1, p_2, Peng等[6]利用记分函数和精准函数给出如下排序规则:

1) 如果 $s(p_1) > s(p_2)$,则 p_1 大于 p_2,记为 $p_1 > p_2$.

2) 如果 $s(p_1) = s(p_2)$,则当 $h(p_1) = h(p_2)$ 时,认为 p_1 等于 p_2,记为 $p_1 = p_2$;当 $h(p_1) > h(p_2)$ 时,认为 p_1 大于 p_2,记为 $p_1 > p_2$.

不难看出,定义10和定义11分别是定义3和定义4的直接推广. 上述两种关于勾股模糊数的排序方法忽略了勾股模糊数的特点,没有考虑勾股模糊数自信度方向的作用.

方法3 Yager等[5]定义了如下排序函数.

定义12[5] 设 $p = \langle \mu_p, \nu_p \rangle = r_p \mathrm{e}^{i\theta_p}$ 为勾股模糊数,则 p 的排序函数值为

$$V(p) = \frac{1}{2} + r_p\Big(\frac{1}{2} - \frac{2\theta_p}{\pi}\Big). \tag{12}$$

对于任意两个勾股模糊数 p_1, p_2, Yager等[5]利用排序函数给出如下排序规则:

1) 若 $V(p_1) > V(p_2)$,则 $p_1 > p_2$;

2) 若 $V(p_1) = V(p_2)$,则 $p_1 = p_2$.

通过以下两个实例对上述3种勾股模糊数的排序方法进行比较分析.

例2 设 $p_1 = \langle 0.6, 0.3 \rangle, p_2 = \langle 0.7, 0.4 \rangle$ 为两个勾股模糊数,有 $s(p_1) = 0.27, h(p_1) = 0.45, s(p_2) = 0.33, h(p_2) = 0.65$. 若采用记分函数和精准函数进行比较,则得到 $p_2 > p_1$. 但如果采用Yager和Abbasov给出的排序函数,则有 $V(p_1) = 0.637\,4, V(p_2) = 0.636\,7$,此时有 $p_1 > p_2$. 利用不同的比较方法得到了两个互相矛盾的比较结果. 注意到,定义12充分考虑了勾股模糊数每个参数的作用,所以认为由排序函数得到的结果更为可信.

例3 设 $p_1 = \langle 0.5, 0.1 \rangle, p_2 = \langle 0.6, 0.3 \rangle$,则 p_1, p_2 既是勾股模糊数,又是直觉模糊数. 若将它们视为直觉模糊数,则由式(5),有 $s(p_1) = 0.4, s(p_2) = 0.3$,可知 $p_1 > p_2$. 但若将它们看成勾股模糊数,则由式(10),有 $s(p_1) = 0.24, s(p_2) = 0.27$,此时 $p_2 > p_1$. 得到了两种相反的排序结果,这说明利用上述记分函数和精准函数对勾股模糊数进行排序不是很科学. 但如果采用Yager和Abbasov给出的排序函数,则有 $V(p_1) = 0.690\,9, V(p_2) = 0.637\,4$,此时仍为 $p_1 > p_2$,与直觉模糊数的排序结果一致,这也说明排序函数得到的结果更为可信.

在本文的后续部分都采用排序函数(12)来比较勾股模糊数的大小.

3 勾股模糊数与勾股模糊集的距离

在给出勾股模糊数距离公式的定义之前,先介绍一般度量空间中两点之间距离公式的定义.

定义13[21] 设 X 为非空集合, $D: X \times X \to R$,若满足条件: 1) 非负性, $D(x,y) \geqslant 0$,当且仅当 $x = y$ 时,当 $D(x,y) = 0$; 2) 对称性, $D(x,y) = D(y,x)$; 3) 三角不等式, $D(x,y) \leqslant D(x,z) + D(z,y)$. 则称 D 为定义在 X 上的距离测度.

定义14 设 $p_1 = \langle \mu_{p_1}, \nu_{p_1} \rangle$ 和 $p_2 = \langle \mu_{p_2}, \nu_{p_2} \rangle$ 为两个勾股模糊数,则 p_1 与 p_2 之间的海明距离为

$$\begin{aligned} &D_h(p_1,p_2) = \\ &\frac{1}{4}(|\mu_{p_1} - \mu_{p_2}| + |\nu_{p_1} - \nu_{p_2}| + \\ &|r_{p_1} - r_{p_2}| + |d_{p_1} - d_{p_2}|); \end{aligned} \tag{13}$$

p_1 与 p_2 之间的欧几里得距离为

$$\begin{aligned} &D_e(p_1,p_2) = \\ &\Big[\frac{1}{4}((\mu_{p_1} - \mu_{p_2})^2 + (\nu_{p_1} - \nu_{p_2})^2 + \\ &(r_{p_1} - r_{p_2})^2 + (d_{p_1} - d_{p_2})^2)\Big]^{1/2}; \end{aligned} \tag{14}$$

p_1 与 p_2 之间的闵可夫斯基距离为

$$\begin{aligned} &D_m(p_1,p_2) = \\ &\Big[\frac{1}{4}(|\mu_{p_1} - \mu_{p_2}|^q + |\nu_{p_1} - \nu_{p_2}|^q + \\ &|r_{p_1} - r_{p_2}|^q + |d_{p_1} - d_{p_2}|^q)\Big]^{1/q}. \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mu_{p_i} = r_{p_i}\cos(\theta_{p_i}), \\ &\nu_{p_i} = r_{p_i}\sin(\theta_{p_i}), \\ &d_{p_i} = 1 - \frac{2\theta_{p_i}}{\pi}, \\ &\theta_{p_i} \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big],\ i = 1,2,\ q > 0. \end{aligned}$$

对于论域 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上的勾股模糊集 P_1 和 P_2,给出二者之间的距离公式.

定义15 设 P_1 和 P_2 为论域 $X = \{x_1, x_2, \cdots,$

$x_n\}$上的两个勾股模糊集,则P_1与P_2之间的海明距离为

$$D_h(P_1,P_2)=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}(|\mu_{P_1}(x_i)-\mu_{P_2}(x_i)|+|\nu_{P_1}(x_i)-\nu_{P_2}(x_i)|+|r_{P_1}(x_i)-r_{P_2}(x_i)|+|d_{P_1}(x_i)-d_{P_2}(x_i)|);\tag{16}$$

P_1与P_2之间的欧几里得距离为

$$D_e(P_1,P_2)=\Big[\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}((\mu_{P_1}(x_i)-\mu_{P_2}(x_i))^2+(\nu_{P_1}(x_i)-\nu_{P_2}(x_i))^2+(r_{P_1}(x_i)-r_{P_2}(x_i))^2+(d_{P_1}(x_i)-d_{P_2}(x_i))^2\Big]^{1/2};\tag{17}$$

P_1与P_2之间的闵可夫斯基距离为

$$D_m(p_1,p_2)=\Big[\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}(|\mu_{P_1}(x_i)-\mu_{P_2}(x_i)|^q+|\nu_{P_1}(x_i)-\nu_{P_2}(x_i)|^q+|r_{P_1}(x_i)-r_{P_2}(x_i)|^q+|d_{P_1}(x_i)-d_{P_2}(x_i)|^q)\Big]^{1/q}.\tag{18}$$

其中

$$\mu_{P_j}(x_i)=r_{P_j}(x_i)\cos(\theta_{P_j}(x_i)),$$
$$\nu_{P_j}(x_i)=r_{P_j}(x_i)\sin(\theta_{P_j}(x_i)),$$
$$d_{P_j}(x_i)=1-\frac{2\theta_{P_j}(x_i)}{\pi},$$
$$\theta_{P_j}(x_i)\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big],\ j=1,2,\ i=1,2,\cdots,n,\ q>0.$$

若对每个对象x_i赋予不同的权重,则得到勾股模糊集的加权距离公式.

定义16　设P_1和P_2为论域$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的两个勾股模糊集,w_i为$x_i(i=1,2,\cdots,n)$对应的权重,$0\leqslant w_i\leqslant 1$且$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$,则$P_1$与$P_2$之间的加权海明距离为

$$D_{wh}(P_1,P_2)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}w_i(|\mu_{P_1}(x_i)-\mu_{P_2}(x_i)|+|\nu_{P_1}(x_i)-\nu_{P_2}(x_i)|+|r_{P_1}(x_i)-r_{P_2}(x_i)|+|d_{P_1}(x_i)-d_{P_2}(x_i)|);\tag{19}$$

P_1与P_2之间的加权欧几里得距离为

$$D_{we}(P_1,P_2)=\Big[\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}w_i((\mu_{P_1}(x_i)-\mu_{P_2}(x_i))^2+(\nu_{P_1}(x_i)-\nu_{P_2}(x_i))^2+(r_{P_1}(x_i)-r_{P_2}(x_i))^2+(d_{P_1}(x_i)-d_{P_2}(x_i))^2\Big]^{1/2};\tag{20}$$

P_1与P_2之间的加权闵可夫斯基距离为

$$D_{wm}(p_1,p_2)=\Big[\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}w_i(|\mu_{P_1}(x_i)-\mu_{P_2}(x_i)|^q+|\nu_{P_1}(x_i)-\nu_{P_2}(x_i)|^q+|r_{P_1}(x_i)-r_{P_2}(x_i)|^q+|d_{P_1}(x_i)-d_{P_2}(x_i)|^q)\Big]^{1/q}.\tag{21}$$

其中

$$\mu_{P_j}(x_i)=r_{P_j}(x_i)\cos(\theta_{P_j}(x_i)),$$
$$\nu_{P_j}(x_i)=r_{P_j}(x_i)\sin(\theta_{P_j}(x_i)),$$
$$d_{P_j}(x_i)=1-\frac{2\theta_{P_j}(x_i)}{\pi},$$
$$\theta_{P_j}(x_i)\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big],\ j=1,2;\ i=1,2,\cdots,n,\ q>0.$$

定理1　1) 勾股模糊数的距离测度$D_h(p_1,p_2)$、$D_e(p_1,p_2)$和$D_m(p_1,p_2)$满足定义13中的3个条件; 2) 勾股模糊集的距离测度$D_h(P_1,P_2),D_e(P_1,P_2)$和$D_m(P_1,P_2)$以及$D_{wh}(P_1,P_2),D_{we}(P_1,P_2)$和$D_{wm}(P_1,P_2)$满足定义13中的3个条件.

4　基于勾股模糊集距离的多属性决策方法

多属性决策问题可描述如下: 设有m个决策方案$A_1,A_2,\cdots,A_m$,决策者根据n个属性$C_1,C_2,\cdots,C_n$对每个方案进行评判,从中选出一个最优方案,或对所有方案进行优选排序. 假定决策属性对应的权重分别为$w_1,w_2,\cdots,w_n$,满足条件$0\leqslant w_j\leqslant 1$且$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$. 已知方案$A_i$关于属性$C_j$的评估值$x_{ij}=\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数,则决策者需要综合上述勾股模糊数信息以选出最优方案.

下面给出基于勾股模糊集距离的多属性决策算法.

Step 1: 据式(12)比较所有方案关于同一属性C_j的勾股模糊数评估值$x_{ij}=\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle(i=1,2,\cdots,m)$,确定属性$C_j$下的最优值$x_j^+=\max_i\{\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle\}$和最劣值$x_j^-=\min_i\{\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle\}(j=1,2,\cdots,n)$,构造正理想属性值向量$x^+=(x_1^+,x_2^+,\cdots,x_n^+)$和负理想属性值向量$x^-=(x_1^-,x_2^-,\cdots,x_n^-)$;

Step 2: 利用本文建立的勾股模糊集距离公式,比

如海明距离公式,计算每个方案的属性值向量$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})(i = 1, 2, \cdots, m)$与$x^+ = (x_1^+, x_2^+, \cdots, x_n^+)$和$x^- = (x_1^-, x_2^-, \cdots, x_n^-)$之间的距离$D(x_i, x^+)$和$D(x_i, x^-)$;

Step 3: 计算$\lambda_i = \dfrac{D(x_i, x^-)}{D(x_i, x^-) + D(x_i, x^+)}, i = 1, 2, \cdots, m$,根据$\lambda_i$的大小对方案进行选优排序,若$\lambda_i > \lambda_k$,则方案$A_i$优于方案$A_k$,记为$A_i \succ A_k$.

5 应用实例

考虑一个投资的决策问题(取自参考文献[11]):某公司计划将一笔资金投向某一项目,经过考察,选定了5个公司作为候选投资对象,分别是计算机公司A_1、家具公司A_2、汽车公司A_3、化工公司A_4和食品公司A_5. 投资者从6个方面综合考察每个公司的综合实力:技术实力G_1、期望利润G_2、市场竞争力G_3、抗风险能力G_4、管理能力G_5和企业文化G_6. 6个属性的权重向量为$w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$. 投资者通过调研和咨询有关专家,得到了5个公司关于6个属性的评估值,评估结果由勾股模糊数的形式给出,结果见表1 ~ 表3.

表 1 各公司的评估结果

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
G_1	$\langle 0.2, 0.5\rangle$	$\langle 0.3, 0.5\rangle$	$\langle 0.4, 0.3\rangle$	$\langle 0.4, 0.7\rangle$	$\langle 0.6, 0.8\rangle$
G_2	$\langle 0.3, 0.8\rangle$	$\langle 0.8, 0.5\rangle$	$\langle 0.7, 0.7\rangle$	$\langle 0.6, 0.8\rangle$	$\langle 0.4, 0.7\rangle$
G_3	$\langle 0.6, 0.8\rangle$	$\langle 0.5, 0.6\rangle$	$\langle 0.6, 0.7\rangle$	$\langle 0.4, 0.7\rangle$	$\langle 0.7, 0.4\rangle$
G_4	$\langle 0.3, 0.7\rangle$	$\langle 0.5, 0.6\rangle$	$\langle 0.5, 0.8\rangle$	$\langle 0.7, 0.5\rangle$	$\langle 0.3, 0.4\rangle$
G_5	$\langle 0.2, 0.4\rangle$	$\langle 0.4, 0.7\rangle$	$\langle 0.5, 0.8\rangle$	$\langle 0.5, 0.7\rangle$	$\langle 0.5, 0.6\rangle$
G_6	$\langle 0.8, 0.4\rangle$	$\langle 0.6, 0.5\rangle$	$\langle 0.7, 0.4\rangle$	$\langle 0.5, 0.8\rangle$	$\langle 0.4, 0.7\rangle$

表 2 各评估结果对应的排序值

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
G_1	0.361 2	0.409 1	0.545 2	0.363 3	0.409 7
G_2	0.267 9	0.636 2	0.5	0.409 7	0.363 3
G_3	0.409 7	0.454 9	0.454 9	0.363 3	0.636 7
G_4	0.315 5	0.454 9	0.363 8	0.590 4	0.454 8
G_5	0.408 4	0.363 3	0.363 8	0.409 6	0.454 9
G_6	0.683 2	0.545 1	0.636 7	0.363 8	0.363 3

表 3 各评估结果对应的(r_p, d_p)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
G_1	(0.538 5, 0.242 2)	(0.583 1, 0.344 0)	(0.5, 0.590 3)	(0.806 2, 0.330 5)	(1, 0.409 7)
G_2	(0.854 4, 0.228 4)	(0.943 4, 0.644 4)	(0.989 9, 0.5)	(1, 0.409 7)	(0.806 2, 0.330 5)
G_3	(1, 0.409 7)	(0.781 0, 0.442 3)	(0.922 0, 0.451 1)	(0.806 2, 0.330 5)	(0.806 2, 0.669 5)
G_4	(0.761 6, 0.257 8)	(0.781 0, 0.442 3)	(0.943 4, 0.355 6)	(0.860 2, 0.605 1)	(0.5, 0.409 7)
G_5	(0.447 2, 0.295 2)	(0.806 2, 0.330 5)	(0943 4, 0.355 6)	(0.860 2, 0.394 9)	(0.781 0, 0.442 3)
G_6	(0.894 4, 0.704 8)	(0.781 0, 0.557 7)	(0.806 2, 0.669 5)	(0.943 4, 0.355 6)	(0.806 2, 0.330 5)

利用式(12)比较各属性下每个方案的评估值,构造正理想点和负理想点为

$$x^+ = (\langle 0.4, 0.3\rangle, \langle 0.8, 0.5\rangle, \langle 0.7, 0.4\rangle, \langle 0.7, 0.5\rangle, \langle 0.5, 0.6\rangle, \langle 0.8, 0.4\rangle),$$

$$x^- = (\langle 0.2, 0.5\rangle, \langle 0.3, 0.8\rangle, \langle 0.4, 0.7\rangle, \langle 0.3, 0.7\rangle, \langle 0.4, 0.7\rangle, \langle 0.4, 0.7\rangle).$$

正理想点各值对应的(r_p, d_p)向量为

$$((0.5, 0.590\,3),\ (0.943\,4, 0.644\,4),\ (0.806\,2, 0.669\,5),\ (0.860\,2, 0.605\,1),\ (0.781\,0, 0.442\,3),\ (0.894\,4, 0.704\,8));$$

负理想点各值对应的(r_p, d_p)向量为

$$((0.538\,5, 0.242\,2), (0.854\,4, 0.228\,4), (0.806\,2, 0.330\,5), (0.761\,6, 0.257\,8), (0.806\,2, 0.330\,5), (0.806\,2, 0.330\,5)).$$

若不考虑各因素的权重,利用勾股模糊集海明距离公式,即式(16)计算各方案与正理想点和负理想点之间的距离,然后计算各$\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$值,得

$$\lambda_1 = 0.341\,5,\ \lambda_2 = 0.528,\ \lambda_3 = 0.595,\ \lambda_4 = 0.428\,1\ \lambda_5 = 0.441,$$

故方案排序为$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1$.

为了验证所给方法的科学性,用Yager建立的勾股模糊数加权平均算子计算每个方案的综合评估值. 由式(7),得

$$\mathrm{PFWA}(A_1) = \langle 0.4, 0.6\rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_2) = \langle 0.516\,7, 0.566\,7\rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_3) = \langle 0.566\,7, 0.616\,7\rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_4) = \langle 0.516\,7, 0.7\rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_5) = \langle 0.483\,3, 0.6\rangle.$$

由式(12)计算各方案综合评估值的排序值,得

$$V_1 = 0.409\,4,\ V_2 = 0.477\,5,\ V_3 = 0.477\,5,\ V_4 = 0.417\,2,\ V_5 = 0.447\,4,$$

故方案排序为$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1$. 与本文方法的排序结果略有差异.

若计算结果保留小数点后8位有效数字,则有

$$V_2 = 0.477\,484\,11,\ V_3 = 0.477\,485\,40,$$

即有$V_3 > V_2$,则得到方案排序为$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1$,与本文方法的排序结果相同.

如果考虑各因素的权重 $w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$, 利用勾股模糊集加权海明距离公式, 即式(19)计算各方案与正理想点和负理想点之间的距离, 然后计算各 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, 5)$ 值, 得

$$\lambda_1 = 0.324\,8,\ \lambda_2 = 0.452\,9,$$
$$\lambda_3 = 0.559\,3,\ \lambda_4 = 0.386\,6,\ \lambda_5 = 0.530\,2,$$

故方案排序为 $A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$.

同样用 Yager 建立的勾股模糊数加权平均算子计算每个方案的综合评估值, 由式(7), 得

$$\mathrm{PFWA}(A_1) = \langle 0.405, 0.625 \rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_2) = \langle 0.485, 0.575 \rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_3) = \langle 0.55, 0.62 \rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_4) = \langle 0.49, 0.69 \rangle,$$
$$\mathrm{PFWA}(A_5) = \langle 0.53, 0.57 \rangle.$$

由式(12)计算各方案综合评估值的排序值, 得

$$V_1 = 0.400\,2,\ V_2 = 0.459\,4,$$
$$V_3 = 0.468\,5,\ V_4 = 0.409\,5,\ V_5 = 0.482,$$

故方案排序为 $A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$. 虽然所得结果与本文所提方法的排序结果略有差异, 但不同决策方法导致这种微小差异是可以接受的, 所以该实例验证了本文方法的科学性.

6 结　论

勾股模糊集是模糊集理论的最新扩展, 是针对直觉模糊集的直接推广. 勾股模糊集既保留了直觉模糊集处理不确定信息的优势, 又拓宽了直觉模糊集的应用范围, 为人们处理复杂的不确定信息提供了新的有力工具. 要将勾股模糊信息应用于处理复杂环境下的实际问题, 首先要解决勾股模糊数的排序问题, 同时建立相应的测度公式. 本文分析比较了3种勾股模糊数的排序方法, 指出了其中两种排序方法的不足; 通过分析勾股模糊数的特点, 提炼出了4个能够完全刻画勾股模糊数信息的参数, 据此建立了勾股模糊数和勾股模糊集之间的距离公式; 随后, 给出了基于勾股模糊集距离的多属性决策方法, 并通过实例验证了所提方法的科学性.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Outline of a new approach to analysis of complex systems and decision processes interval-valuec fuzzy sets[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[4] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.

[5] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers and decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.

[6] Peng X D, Yang Y. Some results for Pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 30(11): 1133-1160.

[7] Peng X D, Yang Y. Fundamental properties of interval valued Pythagorean fuzzy aggregation operators[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 444-487.

[8] Zhang X L, Xu Z S. Extension of TOPSIS to multi-criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(12): 1061-1078.

[9] Zhang X L. Multicriteria Pythagorean fuzzy decision analysis: A hierarchical QUALIFLEX approach with the closeness index-based ranking methods[J]. Information Sciences, 2016, 330(1): 104-124.

[10] Ren P J, Xu Z S, Gou X J. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 42(1): 246-259.

[11] Garg H. A new generalized Pythagorean fuzzy information aggregation using Einstein operations and its application to decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(9): 886-920.

[12] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and systems: Theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[13] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 78(3): 305-316.

[14] Chaudhuri B B, Rosenfeld A. A modified Hausdorff distance between fuzzy sets[J]. Information Sciences, 1999, 118(1/2/3/4): 159-171.

[15] Szmidt E, Kacprzyk J. Distance between intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(3): 505-518.

[16] Grzegorzewski P. Distance between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 148(2): 319-328.

[17] Hatzimichailidis A G, Papakostas G A, Kaburlasos V G. A novel distance measure of intuitionistic fuzzy sets and its application to pattern recognition problems[J]. Int J of Intelligent Systems, 2012, 27(4): 396-409.

[18] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.

[19] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.

[20] Hong D H, Choi C H. Multicriteria fuzzy decision making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy sets and Systems, 2000, 114(1): 103-113.

[21] Takahashi W. Nonlinear functional analysis: Fixed point theory and its applications[M]. Yokohama: Yokohama Publishers, 2000.

（责任编辑：齐　霁）