

基于推广的概率分布区间分解法的时滞系统稳定性分析

刘健辰[†], 时光

(辽宁工程技术大学 电气与控制工程学院, 辽宁 葫芦岛 125105)

摘要: 基于推广的概率分布区间分解法, 研究一类具有随机时滞系统的概率分布相关稳定性问题. 充分利用随机时滞的概率分布信息, 获得一系列稳定性判据; 通过严格的数学证明, 表明通过增加概率区间数可以逐渐降低稳定性判据的保守性, 从而建立一组新的分层结构 LMI 条件; 严格证明了在采用相同概率区间划分的条件下, 所得到的稳定性判据的保守性低于不考虑时滞概率分布的时变时滞分解法所得到的结果, 并且分析和比较了两种方法的计算量.

关键词: 随机时滞系统; 概率分布相关稳定性; 概率分布区间分解; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Stability analysis for delays systems based on generalized probability-distribution-interval decomposition approach

LIU Jian-chen[†], SHI Guang

(Faculty of Electrical and Control Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China)

Abstract: Based on the generalized probability-distribution-interval decomposition, the problem of probability-distribution-dependent stability analysis for a class of systems with stochastic delays is investigated. The information of the probability distribution of stochastic delay is fully employed and a series of sufficient stability criteria are obtained. It is illustrated by rigorous mathematical proof that the conservatism of the proposed stability criteria can be reduced progressively by increasing the number of the probability interval, which establishes a novel hierarchy of LMI conditions. It is rigorously proved that, with the same decomposition of probability interval, the conservatism of the proposed stability criteria is less than the one obtained by time-varying delay decomposition approach in which the probability-distribution of delay is ignored. The computation burden of the proposed method and the time-varying delay decomposition approach is analyzed and compared.

Keywords: stochastic delay system; probability-distribution-dependent stability; probability-interval decomposition; linear matrix inequalities(LMIs)

0 引言

时滞现象广泛存在于各类自然和工程系统中, 随着网络化控制、电力系统广域控制等新兴应用背景的出现, 吸引了大量国内外研究者的关注. 从系统分析的角度, 由于 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (LKF) 方法固有的保守性, 研究者一直在努力寻求降低稳定性判据保守性的途径. 已有的主要研究成果构成了 4 条技术路线: 1) 离散化 LKF 法^[1], 该类方法通过分解积分区间和将任意矩阵函数限制为分段连续函数, 实现了对完整 LKF 的近似. 2) 平方和 (SOS) 法^[2], 该类方法通过将任意矩阵函数参数化为高阶多项式, 利

用多项式松弛技术, 将稳定性分析转化为平方和问题. 3) 定界不等式法^[3], 该类方法将时滞状态投影到 Legendre 多项式上, 进而利用 Bessel 不等式, 实现对交叉项的精确定界. 研究发现, Jensen 不等式法^[1]和 Wirtinger 不等式法^[4]是 Legendre 多项式阶数为 0 和 1 时的特例, 且改进的 Jensen 不等式法^[5]和自由矩阵积分不等式法^[6]也可以归入该类方法. 4) 时滞分解法, 该类方法基于分解时滞变化区间, 分为定常时滞分解法^[7]和时变时滞分解法^[8]. 值得注意的是, 这 4 种方法各自构成了一个具有分层结构的 LMI 条件集合, 即通过“精细化”相关参数 (分别为离散化步长、一

收稿日期: 2016-09-16; 修回日期: 2017-02-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61304090); 辽宁省教育厅科学研究一般项目 (L2013130).

作者简介: 刘健辰 (1978—), 男, 讲师, 博士, 从事网络化控制和模糊控制等研究; 时光 (1981—), 男, 讲师, 博士, 从事非线性控制理论和应用等研究.

[†]通讯作者. E-mail: liujian4587@hotmail.com

般多项式阶数、Legendre多项式阶数和时滞区间分解数), 可以不断减小相应LMI条件的保守性, 使得充分条件逐渐趋向于必要条件. 但是, 上述4种稳定性分析方法都是基于将时滞建模为区间时变参数, 仅仅利用了时滞的变化范围和变化率上界两个时滞信息. 如果可以对更多的时滞信息加以充分利用, 则有望进一步降低稳定性分析的保守性.

另一方面, 已有研究发现, 在很多工程实际中时滞常常呈现随机性质^[9-13]. Johan^[9]发现CAN总线和以太网中的随机时滞呈现多模正态分布, 各个模态对应于不同的网络负荷情况; Peng等^[10]发现在TCP/IP协议通信网络中, 时滞呈现显著的不规则特性, 进而基于变电站自动化技术上海重点实验室的Modbus TCP/IP互联控制与仿真平台, 验证了通信时滞服从正态分布^[11]; Lu等^[12]对于中国南方电网的实测结果也表明时滞分布呈现近似的三模正态分布; Zhang等^[13]基于广西电网WAMS中通信时滞的实测数据, 结合对WACS中各个环节时滞成分的产生机理分析, 发现该广域控制系统中的闭环时滞可以采用正态分布近似建模. 因此, 将时滞建模为满足一定概率分布的随机过程是合理的, 而且通常可以根据机理分析或利用历史数据估测随机时滞的统计分布信息.

引入随机时滞所包含的丰富统计信息, 将有助于提高稳定性分析的性能, 且具备工程实践的可行性. 但是, 除了文献[14]中提出的概率分布区间分解法, 目前这个方面的研究工作还很少. 在文献[14]中, Peng等针对随机时滞呈现斜正态分布时, 大幅值时滞出现的概率非常小的特点, 提出将整个时滞变化区间分解为高/低两个子区间. 数值算例表明, 基于这种模型变换提出的稳定性判据可以大大降低保守性. 随后, 这种方法被进一步应用到不确定系统^[15]、模糊系统^[16]、离散时间系统^[17]和电力系统^[11]等.

另外, 文献[14]的概率分布区间分解法还有一些重要方面需要推广和完善. 受此启发, 本文提出推广的概率分布区间分解法, 用于随机时滞系统的稳定性分析. 本文的主要贡献体现在以下3个方面: 1) 为了更加充分地利用时滞概率分布信息, 有必要将概率分布区间分解法从两个概率子区间推广到多个概率子区间的一般情况. 但是, 这种推广并非简单而不重要的(not trivial). 可以发现, 在稳定性判据的推导过程中会出现拉普拉斯矩阵, 其固有的零特征值会导致无法获得严格的LMI条件. 为了克服该问题, 本文提出一种矩阵变换方法用以消除该零特征值. 2) 文献[14]仅仅通过数值算例表明了引入时滞概率分布信息的优势, 但对此缺乏严格的数学证明. 本文严格证明了

随着增加概率区间数, 稳定性判据的保守性是逐渐降低的, 从而建立了一种不同于已有4种技术路线的新的分层结构LMI条件. 3) 概率分布区间分解法与文献[8]提出的时变时滞分解法都是基于对时滞变化区间的分解, 存在很大的相似性, 那么有必要分析两种方法的关系. 本文严格证明了在采用相同区间划分的条件下, 前者的保守性低于后者, 并且分析了影响两种方法求解速度的各种因素, 定量比较了两种方法的计算量.

下文中, $\text{diag}(A, B)$ 表示对角块矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$;

$\text{col}(A, B)$ 表示列块矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$; $e_i (i = 1, 2, \dots)$ 表示块元矩阵, 例如 $e_2 = [0 \ I \ 0 \ \dots \ 0]$; $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{I}$ 分别表示适维零矩阵和单位矩阵; $*$ 表示对称矩阵中的对应块元素; $\otimes$ 表示 Kronecker 积; $B^\dagger$ 表示矩阵 B 的右正交补; $E\{\cdot\}$ 表示数学期望.

1 问题描述

考虑如下时滞系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $\phi(t)$ 为 $[-\bar{\tau}, 0]$ 上的连续函数. 假设时滞 $\tau(t)$ 服从一定的概率分布, 且满足

$$0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, \quad (2)$$

其中 $\bar{\tau}$ 为时滞上界.

将随机时滞 $\tau(t)$ 的整个概率区间 $[0, \bar{\tau}]$ 划分为 m 个子区间, 即

$$[d_0, d_1) \cup [d_1, d_2) \cup \dots \cup [d_{m-1}, d_m], \quad (3)$$

其中 $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_m = \bar{\tau}$.

定义随机变量 $\delta_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, m$, 以指示随机时滞 $\tau(t)$ 是否处于区间 $[d_{l-1}, d_l)$ 内, 即

$$\delta_l(t) = \begin{cases} 1, \tau(t) \in [d_{l-1}, d_l); \\ 0, \tau(t) \notin [d_{l-1}, d_l). \end{cases} \quad (4)$$

考虑到 $\delta_l(t)$ 服从 Bernoulli 分布, 则有

$$\begin{cases} \text{prob}\{\delta_l(t) = 1\} = E\{\delta_l(t)\} := \bar{\delta}_l, \\ \text{prob}\{\delta_l(t) = 0\} = 1 - E\{\delta_l(t)\} := 1 - \bar{\delta}_l, \end{cases}$$

其中 $\bar{\delta}_l$ 表示随机时滞 $\tau(t)$ 处于区间 $[d_{l-1}, d_l)$ 内的概率. 如果已知 $\tau(t)$ 的概率密度函数, 则可对其在 $[d_{l-1}, d_l)$ 内积分来计算 $\bar{\delta}_l$; 如果已知 $\tau(t)$ 的数据样本集合, 则可用 $[d_{l-1}, d_l)$ 内的样本数除以总样本数来估算 $\bar{\delta}_l$. 为了便于后文的证明, 假设 $\bar{\delta}_l > 0$, $l = 1, 2, \dots, m$.

根据概率区间划分(3)和随机变量 $\delta_l(t)$ 的定义(4), 系统(1)可以等价表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi(t) + \sum_{l=1}^m (\delta_l(t) - \bar{\delta}_l) \psi_l(t), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= Ax(t) + \sum_{l=1}^m \bar{\delta}_l A_d x(t - \tau_l(t)), \\ \psi_l(t) &= A_d x(t - \tau_l(t)). \end{aligned}$$

在给出本文主要结论之前,首先引入如下定义和引理.

定义1^[17] 对于 n 阶矩阵 $A = [a_{ij}]$,如果对于所有 $i = 1, 2, \dots, n$,满足 $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$,则称其为对角占优矩阵.进而,如果矩阵 A 严格满足不等式 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$,则称其为严格对角占优矩阵.

引理1^[17] 设 n 阶Hermite矩阵 A 是严格对角占优的,且其对角元素均大于0,则 A 是正定的.

引理2^[18] 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, p 阶矩阵 B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$,则 $A \otimes B$ 的特征值为 $\lambda_i \mu_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, p$.

引理3 假设矩阵 A 和 B 是正定的,则矩阵 $A \otimes B$ 也为正定的.

证明 根据正定矩阵的所有特征值均为正数,由引理2可直接得证. $\square$

为简化叙述,记 $x_t = x(t)$, $\delta_l = \delta_l(t)$, $\psi_l = \psi_l(t)$, $\chi_l = \chi_l(t)$, $\tau = \tau(t)$, $\tau_l = \tau_l(t)$.

2 概率分布相关稳定性判据

首先基于Lyapunov-Krasovskii泛函方法,给出系统(5)的概率分布相关稳定性判据.

定理1 对于概率区间划分(3),如果存在适维矩阵 $P > 0, Q_i > 0, R_i > 0$ 和 $U_i (i = 1, 2, \dots, m)$,使得以下LMIs成立:

$$\begin{bmatrix} R_i & U_i^T \\ U_i & R_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6)$$

$$f(m, P, Q_i, R_i, U_i) = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & * & * \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & * \\ \Theta_{31} & 0 & \Theta_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

则系统(1)渐近稳定. 其中

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= 2e_1^T P \Upsilon + \sum_{i=1}^m (e_{2i-1}^T Q_i e_{2i-1} - e_{2i+1}^T Q_i e_{2i+1}) - \\ &\sum_{i=1}^m \left[\bar{\delta}_i \begin{bmatrix} e_{2i-1} - e_{2i} \\ e_{2i} - e_{2i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_i & U_i^T \\ U_i & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2i-1} - e_{2i} \\ e_{2i} - e_{2i+1} \end{bmatrix} + \right. \\ &\left. (1 - \bar{\delta}_i)(e_{2i-1} - e_{2i+1})^T R_i (e_{2i-1} - e_{2i+1}) \right], \end{aligned}$$

$$\Theta_{21} = \text{col}(d_1 R_1 \Upsilon, \dots, (d_m - d_{m-1}) R_m \Upsilon),$$

$$\Theta_{22} = -\text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_m),$$

$$\Theta_{31} = \text{col}(d_1 (\mathbf{F}^{\dagger T} \bar{\Delta} \mathbf{F}^{\dagger} \otimes R_1) \bar{\Psi}, \dots, (d_m - d_{m-1}) (\mathbf{F}^{\dagger T} \bar{\Delta} \mathbf{F}^{\dagger} \otimes R_m) \bar{\Psi}),$$

$$\Theta_{33} = -\text{diag}((\mathbf{F}^{\dagger T} \bar{\Delta} \mathbf{F}^{\dagger} \otimes R_1), \dots, (\mathbf{F}^{\dagger T} \bar{\Delta} \mathbf{F}^{\dagger} \otimes R_m)),$$

$$\bar{\Psi} = \text{col}(\Gamma_1 - \Gamma_2, \Gamma_1 - \Gamma_3, \dots, \Gamma_1 - \Gamma_m),$$

$$\Upsilon = Ae_1 + \sum_{l=1}^m \bar{\delta}_l A_d e_{2l},$$

$$\Gamma_i = A_d e_{2i}, i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\mathbf{F}^{\dagger} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/m & 1/m & \cdots & 1/m \\ -(m-1)/m & 1/m & \cdots & 1/m \\ 1/m & -(m-1)/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/m & 1/m & \cdots & -(m-1)/m \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 (1 - \bar{\delta}_1) & -\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 & \cdots & -\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_m \\ -\bar{\delta}_2 \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 (1 - \bar{\delta}_2) & \cdots & -\bar{\delta}_2 \bar{\delta}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\delta}_m \bar{\delta}_1 & -\bar{\delta}_m \bar{\delta}_2 & \cdots & \bar{\delta}_m (1 - \bar{\delta}_m) \end{bmatrix}.$$

证明 采用如下Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$\begin{aligned} V_t &= x_t^T P x_t + \sum_{i=1}^m \int_{t-d_i}^{t-d_{i-1}} x_s^T Q_i x_s ds + \\ &\sum_{i=1}^m (d_i - d_{i-1}) \int_{t-d_i}^{t-d_{i-1}} \int_s^t \dot{x}_v^T R_i \dot{x}_v dv ds. \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $P > 0, Q_i > 0, R_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$.

对 V_t 沿系统(5)的轨迹,取无穷小算子 $L\{V_t\} = E\{\dot{V}_t\}$,可得

$$\begin{aligned} L\{V_t\} &= 2x_t^T P \varphi_t + \sum_{i=1}^m [x_{t-d_{i-1}}^T Q_i x_{t-d_{i-1}} - x_{t-d_i}^T Q_i x_{t-d_i}] + \\ E\left\{ \sum_{i=1}^m \left[(d_i - d_{i-1})^2 \dot{x}_t^T R_i \dot{x}_t - \right. \right. \\ &\left. \left. (d_i - d_{i-1}) \int_{t-d_i}^{t-d_{i-1}} \dot{x}_s^T R_i \dot{x}_s ds \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

注意到 $E\{\delta_l - \bar{\delta}_l\} = 0, E\{(\delta_l - \bar{\delta}_l)^2\} = \bar{\delta}_l(1 - \bar{\delta}_l), E\{(\delta_l - \bar{\delta}_l)(\delta_k - \bar{\delta}_k)\} = -\bar{\delta}_l \bar{\delta}_k (\forall l \neq k)$,可得

$$\begin{aligned} E\left\{ \sum_{i=1}^m (d_i - d_{i-1})^2 \dot{x}_t^T R_i \dot{x}_t \right\} &= \\ E\left\{ \sum_{i=1}^m \left[(d_i - d_{i-1})^2 \left(\varphi_t + \sum_{l=1}^m (\delta_l - \bar{\delta}_l) \psi_l \right)^T \right. \right. \\ &\left. \left. R_i \left(\varphi_t + \sum_{l=1}^m (\delta_l - \bar{\delta}_l) \psi_l \right) \right] \right\} = \\ \sum_{i=1}^m (d_i - d_{i-1})^2 (\varphi_t^T R_i \varphi_t + \chi_i), \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\chi_i = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix}^T (\bar{\Delta} \otimes R_i) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix}.$$

接下来,由 Jensen 不等式^[1]和反凸不等式^[19]可知,如果存在矩阵 U_i 满足式(6),则有

$$\nu_i \leq \begin{cases} \eta_{1i}, \tau \in [d_{i-1}, d_i), \\ \eta_{2i}, \tau \notin [d_{i-1}, d_i). \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\nu_i = -(d_i - d_{i-1}) \int_{t-d_i}^{t-d_{i-1}} \dot{x}_s^T R_i \dot{x}_s ds,$$

$\eta_{1i} =$

$$- \begin{bmatrix} x_{t-d_{i-1}} - x_{t-\tau_i} \\ x_{t-\tau_i} - x_{t-d_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_i & U_i^T \\ U_i & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-d_{i-1}} - x_{t-\tau_i} \\ x_{t-\tau_i} - x_{t-d_i} \end{bmatrix},$$

$$\eta_{2i} = -(x_{t-d_{i-1}} - x_{t-d_i})^T R_i (x_{t-d_{i-1}} - x_{t-d_i}).$$

结合式(11)和(4),可得

$$\begin{aligned} E \left\{ \sum_{i=1}^m \nu_i \right\} &= E \left\{ \sum_{i=1}^m (\delta_i \nu_i + (1 - \delta_i) \nu_i) \right\} \leq \\ &\sum_{i=1}^m (\bar{\delta}_i \eta_{1i} + (1 - \bar{\delta}_i) \eta_{2i}). \end{aligned} \quad (12)$$

这样,综合式(9)、(10)和(12),可得

$$\begin{aligned} L\{V_t\} &\leq \xi_t^T \left\{ \Theta_{11} + \sum_{i=1}^m (d_i - d_{i-1})^2 (\Upsilon^T R_i \Upsilon + \right. \\ &\quad \left. \Psi^T (\bar{\Delta} \otimes R_i) \Psi) \right\} \xi_t. \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\xi_t = \text{col}(x_t, x_{t-\tau_1}, x_{t-d_1}, \dots, x_{t-\tau_m}, x_{t-d_m}),$$

$$\Psi = \text{col}(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m).$$

注意 $\bar{\Delta}$ 中元素 $\bar{\Delta}_{ij}$ 满足 $\sum_{j=1}^m \bar{\Delta}_{ij} = 0 (\forall i)$ 和 $\bar{\Delta}_{ij} \leq 0 (i \neq j)$, 这意味着 $\bar{\Delta}$ 为拉普拉斯矩阵. 因此 $\bar{\Delta}$ 固有一个零特征值^[20], 这将导致矩阵 $\bar{\Delta} \otimes R_i$ 不可逆, 也无法由式(13)直接取得严格的 LMI 条件.

为了克服该问题,利用关系式

$$\bar{\Psi} = (F \otimes I) \Psi \quad (14)$$

构造如下矩阵变换:

$$\Psi^T (\bar{\Delta} \otimes R_i) \Psi = \bar{\Psi}^T (F^{\dagger T} \bar{\Delta} F^{\dagger} \otimes R_i) \bar{\Psi}, \quad (15)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times m}.$$

易于计算

$$F^{\dagger T} \bar{\Delta} F^{\dagger} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1, i \neq 2}^m \bar{\delta}_2 \bar{\delta}_i & -\bar{\delta}_2 \bar{\delta}_3 & \cdots & -\bar{\delta}_2 \bar{\delta}_m \\ -\bar{\delta}_3 \bar{\delta}_2 & \sum_{i=1, i \neq 3}^m \bar{\delta}_3 \bar{\delta}_i & \cdots & -\bar{\delta}_3 \bar{\delta}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\delta}_m \bar{\delta}_2 & -\bar{\delta}_m \bar{\delta}_3 & \cdots & \sum_{i=1, i \neq m}^m \bar{\delta}_m \bar{\delta}_i \end{bmatrix}.$$

考虑到 $\bar{\delta}_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$, 根据定义1可知 $F^{\dagger T} \bar{\Delta} F^{\dagger}$ 为严格对角占优矩阵, 且其对角元素大于0. 因此, 由引理1有 $F^{\dagger T} \bar{\Delta} F^{\dagger} > 0$. 这样, 矩阵变换(15)确保了去除 $\bar{\Delta}$ 中固有的零特征值. 再考虑到 $R_i > 0$, 由引理3可得 $F^{\dagger T} \bar{\Delta} F^{\dagger} \otimes R_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$.

这样,将式(15)代入(13),可知

$$\Theta_{11} - \Theta_{21}^T \Theta_{22}^{-1} \Theta_{21} - \Theta_{31}^T \Theta_{33}^{-1} \Theta_{31} < 0, \quad (16)$$

保证了 $L\{V_t\} \leq 0$. 最后,根据 Schur 补,可得式(16)等价于式(7). $\square$

注1 由定理1的推导过程可见,拉普拉斯矩阵引起的零特征值问题会导致无法获得严格 LMI 条件. 但在 $m = 2$ 时, $F^{\dagger T} \bar{\Delta} F^{\dagger} = \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 > 0$, 该问题是不存在的. 因此,文献[14]的方法不适用于 $m > 2$ 的情况. 利用本文提出的矩阵变换,消除了拉普拉斯矩阵引起的零特征值,从而有效克服了该问题.

注2 定理1采用 Jensen 不等式进行二次积分项定界,如果使用 Wirtinger 不等式^[4]或改进的 Jensen 不等式^[6]等更加精确的定界技术,可以进一步降低稳定性判据的保守性,但是计算量也会增加.

如下的定理将证明,由定理1所给出的稳定性判据的保守性会随着概率区间数的增加而逐步减小.

定理2 在概率区间划分(3)的基础上,将其中某个子区间分解为两个子区间,得到具有 $m+1$ 个子区间的新概率区间划分,则以下两个结论成立:

1) 对于新的概率区间划分,如果存在矩阵 $\tilde{P} > 0, \tilde{Q}_i > 0, \tilde{R}_i > 0$ 和 $\tilde{U}_i (i = 1, 2, \dots, m+1)$ 满足

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_i & \tilde{U}_i^T \\ \tilde{U}_i & \tilde{R}_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (17)$$

$$f(m+1, \tilde{P}, \tilde{Q}_i, \tilde{R}_i, \tilde{U}_i) < 0, \quad (18)$$

则系统(1)渐近稳定.

2) 如果对于概率区间划分(3),存在矩阵 $P > 0, Q_i > 0, R_i > 0$ 和 $U_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 满足式(6)和(7),则对于新的 $m+1$ 概率区间划分,存在矩阵 $\tilde{P} > 0, \tilde{Q}_i > 0, \tilde{R}_i > 0$ 和 $\tilde{U}_i (i = 1, 2, \dots, m+1)$ 满足式(17)和(18).

证明 对结论1)和结论2)分别给出证明.

结论1)的证明:不失一般性,将概率区间划分(3)中的最后一个概率区间 $[d_m, d_{m+1}]$ 分解为两个子区间. 这样,得到新的概率区间划分为

$$[\tilde{d}_0, \tilde{d}_1] \cup \cdots \cup [\tilde{d}_{m-1}, \tilde{d}_m] \cup [\tilde{d}_m, \tilde{d}_{m+1}]. \quad (19)$$

假设概率区间划分(19)中各个子区间对应的概率为 $\tilde{\delta}_i (i = 1, 2, \cdots, m+1)$, 则 $\tilde{d}_i$ 和 $\tilde{\delta}_i$ 满足 $\tilde{d}_i = d_i (i = 0, 1, \cdots, m-1), d_{m-1} < \tilde{d}_m < d_m, \tilde{d}_{m+1} = d_m, \tilde{\delta}_i = \delta_i (i = 1, 2, \cdots, m-1), \tilde{\delta}_m + \tilde{\delta}_{m+1} = \delta_m$.

这样,由定理1可以直接得到1)部分的结论.

结论2)的证明:由定理1的证明过程可知,式(7)等价于

$$\Theta_{11} + \sum_{i=1}^m (d_i - d_{i-1})^2 (\Upsilon^T R_i \Upsilon + \Psi^T (\bar{\Delta} \otimes R_i) \Psi) < 0. \quad (20)$$

另一方面,式(18)等价于

$$\tilde{\Theta}_{11} + \sum_{i=1}^{m+1} (\tilde{d}_i - \tilde{d}_{i-1})^2 (\tilde{\Upsilon}^T \tilde{R}_i \tilde{\Upsilon} + \tilde{\Psi}^T (\tilde{\Delta} \otimes \tilde{R}_i) \tilde{\Psi}) < 0. \quad (21)$$

其中: $\tilde{\Theta}_{11}, \tilde{\Upsilon}, \tilde{\Delta}$ 和 $\tilde{\Psi}$ 的具体展开式可由式(7)得到,且易于证明满足

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= P, \tilde{Q}_i = Q_i, \tilde{R}_i = R_i, \tilde{U}_i = U_i, \\ i &= 1, 2, \cdots, m-1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_m &> 0, \tilde{Q}_{m+1} = Q_m, \\ \tilde{R}_m &= \tilde{R}_{m+1} = R_m, \tilde{U}_m = \tilde{U}_{m+1} = U_m \end{aligned} \quad (23)$$

的矩阵 $\tilde{P}, \tilde{Q}_i, \tilde{R}_i$ 和 $\tilde{U}_i (i = 1, 2, \cdots, m+1)$,可以使得如下关系式成立:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^\dagger)^T \tilde{\Theta}_{11} (\mathbf{H}^\dagger) &= \Theta_{11}, \\ \sum_{i=1}^{m+1} (\tilde{d}_i - \tilde{d}_{i-1})^2 \mathbf{H}^{\dagger T} (\tilde{\Upsilon}^T \tilde{R}_i \tilde{\Upsilon} + \tilde{\Psi}^T (\tilde{\Delta} \otimes \tilde{R}_i) \tilde{\Psi}) \mathbf{H}^\dagger &\leq \\ \sum_{i=1}^m (d_i - d_{i-1})^2 (\Upsilon^T R_i \Upsilon + \Psi^T (\bar{\Delta} \otimes R_i) \Psi). \end{aligned} \quad (24)$$

$$(25)$$

这里

$$\mathbf{H}^\dagger = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & I & & & \\ & & & I & & \\ & & & & I & \\ & & & & & I \end{bmatrix},$$

矩阵 $\mathbf{H}^\dagger$ 中未给定的元素均为零矩阵.

最后,用 $\mathbf{H}^{\dagger T}$ 和 $\mathbf{H}^\dagger$ 分别左乘、右乘式(21). 由 $\mathbf{H}^\dagger$ 列满秩及式(24)和(25)可知,如果存在矩阵 P, Q_i, R_i 和 $U_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 使得式(20)成立,则满足式

(22)和(23)的矩阵 $\tilde{P}, \tilde{Q}_i, \tilde{R}_i$ 和 $\tilde{U}_i (i = 1, 2, \cdots, m+1)$ 可以使式(17)和(21)成立. $\square$

注3 对于系统(1),定义集合

$$\mathbf{H}_m = \{\bar{\tau} > 0 | P > 0, Q_i > 0, R_i > 0, U_i, \text{式(6)和(7)}\},$$

则定理2可以等价表述为 $\mathbf{H}_m \subseteq \mathbf{H}_{m+1}, \forall m \geq 1$. 这意味着,由定理1给出的一系列稳定性判据构成了一个分层结构LMI条件. 与已有分层结构LMI条件不同,定理1所建立的LMI条件是基于对随机时滞统计信息的逐步精细化利用,具有更强的物理意义.

注4 随着增加区间划分数,可以逐步降低定理1给出的稳定性充分判据的保守性,但是计算量也随之增大. 具体而言,决定计算量的主要因素有求解变量数、LMI阶数和LMI耦合程度. 假设系统维数为 n ,区间划分数为 m ,则定理1的求解变量数为 $(2n^2 + n)m + 0.5(n^2 + n)$,即求解变量数随区间划分数线性增长. 定理1的LMI阶数和LMI耦合程度将在注7中分析.

3 与时变时滞分解法的关系

本节分析推广了概率分布区间分解法与时变时滞分解法^[8]之间的关系. 由于文献[8]采用了自由权矩阵方法^[21]进行交叉项定界,引入了大量的冗余求解变量. 因此,下面首先给出一个与文献[8]的结果等价,但计算量更小的稳定性判据.

定理3 对于概率区间划分(3),如果存在适维矩阵 $P > 0, Q_i > 0, R_i > 0$ 和 $U_i (i = 1, 2, \cdots, m)$,使得式(6)和

$$\begin{bmatrix} \Xi_0 + \Xi_k & \bar{\Gamma}^T \\ \bar{\Gamma} & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0, 1 \leq k \leq m \quad (26)$$

成立,则系统(1)渐近稳定. 其中

$$\Gamma = Ae_1 + A_d e_2,$$

$$\bar{\Gamma} =$$

$$\text{col}(d_1 R_1 \Gamma, (d_2 - d_1) R_2 \Gamma, \cdots, (d_m - d_{m-1}) R_m \Gamma),$$

$$\Xi_0 = 2e_1^T P \Gamma + e_1^T Q_1 e_1 - e_3^T Q_1 e_3 +$$

$$\sum_{i=2}^m (e_{i+1}^T Q_i e_{i+1} - e_{i+2}^T Q_i e_{i+2}),$$

$$\Xi_1 = - \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_2 - e_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & U_1^T \\ U_1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_2 - e_3 \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{i=2}^m (e_{i+1} - e_{i+2})^T R_i (e_{i+1} - e_{i+2}),$$

$$\Xi_k = - \begin{bmatrix} e_{k+2} - e_2 \\ e_2 - e_{k+3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_k & U_k^T \\ U_k & R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k+2} - e_2 \\ e_2 - e_{k+3} \end{bmatrix} -$$

$$(e_1 - e_3)^T R_1 (e_1 - e_3) -$$

$$\sum_{i=2, i \neq k}^m (e_{i+1} - e_{i+2})^T R_i (e_{i+1} - e_{i+2}),$$

$$2 \leq k \leq m.$$

注5 在采用相同LKF的情况下,由文献[22]可以证明定理3与文献[8]的稳定性判据是等价的.但是,定理3的求解变量要少得多,例如在系统维数 $n = 2$ 时,定理3与文献[8]中的稳定性条件所涉及的LMI变量数目分别为23和79($m = 2$),33和141($m = 3$).

以下定理将严格证明,若定理1和定理3采用了相同的概率区间划分,定理1的保守性将低于定理3.

定理4 对于相同的概率区间划分,如果存在矩阵集合 $\mathbf{Y} = \{P > 0, Q_i > 0, R_i > 0, U_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ 满足式(6)和(26),则 $\mathbf{Y}$ 也将满足式(6)和(7).

注6 文献[8]中的时变时滞分解法与本文所采用的概率分布区间分解法都是基于对时滞变化区间进行细分,但是文献[8]的方法仅仅利用了时滞上界信息,而本文的方法可以通过不断细分概率区间,逐渐利用更多的时滞概率分布信息,这是本文方法的保守性低于文献[8]的根本原因.

注7 假设系数为 n ,区间划分个数为 m ,比较分析定理1和定理3的计算量:

1) 定理1和定理3的决策变量数相同.

2) 定理1和定理3的LMI数目分别为 $N_1 = (m^2 + 6m + 2)n$ 和 $N_3 = (2m^2 + 6m + 1)n$.表1对比了定理1和定理3的LMI数目($n = 2$).由表1可知,当 $m > 1$ 时,定理1所涉及求解的LMI数目将比定理3少.定义定理1和定理3的LMI数目比为 $\lambda_1 = N_1/N_3 \times 100\%$.由表1可知,随着区间划分数的增大, λ_1 逐渐减小,但减小的速度逐渐减缓.

表1 定理1和定理3的LMI数目

m	1	2	3	4	5	6	7	8
定理1	18	36	58	84	114	148	186	228
定理3	18	42	74	114	162	218	282	354
λ_1	100	86	78	74	70	68	66	64

3) 定理1和定理3所涉及的最大耦合LMI阶数分别为 $(m^2 + 2m + 1)n$ 和 $(2m + 2)n$.表2对比了定理1和定理3的最大耦合LMI阶数,表中为定理1和定理3的最大耦合LMI阶数平方之比,可以表征LMI的耦合程度.由表2可知,定理1比定理3的耦合程度高得多,而且随着增加划分区间数而逐渐增大.

表2 定理1和定理3的耦合程度

m	1	2	3	4	5	6	7	8
定理1	8	18	32	50	72	98	128	162
定理3	8	12	16	20	24	28	32	36
$\lambda_1 / \%$	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16	20.25

综合以上3个因素,随着划分区间数 m 的增大,LMI数目和耦合程度呈现相反的变化趋势.这导致在 m 较小时,定理1的计算速度比定理3快;而随着 m

的增大,耦合程度对求解速度的影响逐渐增强,定理1的计算速度变得低于定理3.

4 数值算例

考虑系统(1),系统参数取为^[15]

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

假设随机时滞服从如图1所示的双模正态分布.为了方便对比,采用如下概率区间划分方法:首先将整个概率区间范围均匀划分为15个子区间,假设时滞上界为 $\bar{\tau}$,则第 i 个子区间为 $[d_{i-1}, d_i)$,其中 $d_0 = 0, d_i = \frac{i}{15}\bar{\tau} (i = 1, 2, \dots, 15)$,令 $d_i (i = 1, 2, \dots, 14)$ 为区间分点,以顺序(7, 3, 11, 1, 13, 5, 9, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)依次插入各个分点,每插入一个分点,概率区间数增加1个(例如,概率区间数 $m = 4$ 时的区间分点为(7, 3, 11),意味着概率区间划分为 $[0, d_3) \cup [d_3, d_7) \cup [d_7, d_{11}) \cup [d_{11}, \bar{\tau}]$).

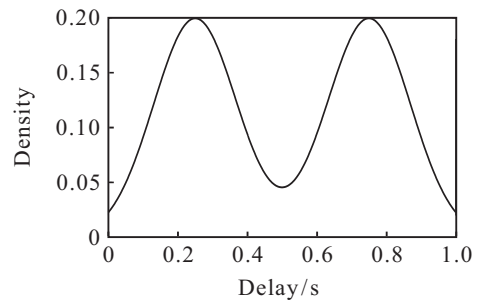


图1 双模正态分布概率密度函数

对于不同的概率区间划分,求解定理1和定理3,可以得到对应的最大允许时滞如图2所示.由图2可知,随着概率区间划分数的增大,由定理1得到的最大允许时滞逐渐增大,即稳定性充分判据的保守性逐渐下降.由图2还可以看出,随着增加概率区间数,定理3的最大时滞上限也是逐步增大的,但是在 $m = 4$ 后增长的幅度就变得非常小了.原因在于,增加概率区间数后,定理3并没有引入除了时滞上界以外的更多其他信息,细分概率区间的“效益”逐步丧失,而定理1却可以源源不断地利用新的时滞分布信息,持续改进稳定性分析的性能.

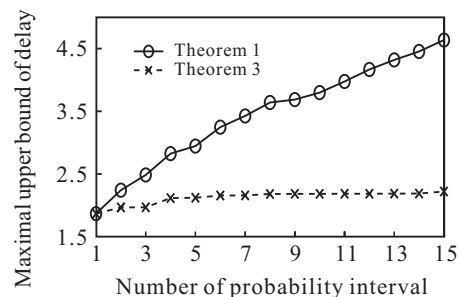


图2 对应不同概率区间数的最大时滞上限

表3给出了在软硬件环境(Matlab R2011a, Inter Core i5-4200M 2.50GHz, 4.00GB)下,定理1和定理3的求解时间.由表3可知:当 $m < 4$ 时,定理1的求解时间略小于定理3;当 $m \geq 4$ 时,定理1的求解时间迅速增大,而定理3的求解时间增长相对缓慢;在 $m = 15$ 时,定理1的求解时间甚至达到定理3的十几倍,这与注7中的理论分析是一致的.

表3 定理1和定理3的求解时间 s

m	2	4	8	10	12	14	15
定理1	0.235	0.510	2.712	7.018	19.48	46.10	56.38
定理3	0.248	0.325	0.882	1.464	2.103	3.604	4.553

5 结论

本文采用推广的概率分布区间分解法,研究了随机时滞系统的概率分布相关稳定性问题,将已有的概率分布区间分解法推广到多概率分布区间分解的一般情况;提出一种矩阵变换方法,消除了拉普拉斯矩阵引起的零特征值,获得了一系列严格的LMI充分稳定性判据;严格证明了,通过增加概率区间数,可以逐渐降低稳定性判据的保守性,从而建立了一组基于逐步精细化利用随机时滞统计信息的分层结构LMI条件;严格证明了,在采用相同区间划分的条件下,本文所提出方法的保守性低于时变时滞分解法;通过定量分析影响计算量的各种因素,比较了在相同概率区间划分情况下的两种方法的计算量.下一步的研究方向是将本文所提出的方法应用到离散时间随机时滞系统,以及采用Wirtinger不等式等更加精确的定界技术来降低保守性.

参考文献(References)

- [1] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Boston, MA: Birkhauser, 2003: 1-28.
- [2] Peet M, Papachristodoulou A. Positive forms and stability of linear time-delay systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2009, 47(6): 3237-3258.
- [3] Seuret A, Gouaisbaut F. Hierarchy of LMI conditions for the stability analysis of time-delay systems[J]. Systems and Control Letters, 2015, 81(1): 1-7.
- [4] Seuret A, Gouaisbaut F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2860-2866.
- [5] Kim J. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems[J]. Automatica, 2016, 64(1): 121-125.
- [6] Zeng H, He Y, Wu M, et al. Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying Delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2015, 60(10): 2768-2772.
- [7] Han Q L. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems[J]. Automatica, 2009, 45(2): 517-524.
- [8] Yue D, Tian E, Zhang Y. A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(13): 1493-1518.
- [9] Johan N. Real-time control systems with delays[D]. Lund: Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1998.
- [10] Peng C, Han Q, Yue D. Communication-delay-distribution dependent decentralized control for large-scale systems with IP-based communication networks[J]. IEEE Trans on Control System Technology, 2013, 21(3): 820-830.
- [11] Peng C, Zhang J. Delay-distributed-dependent load frequency control of power systems with probabilistic interval delays[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2016, 31(4): 3309-3317.
- [12] Lu C, Zhang X, Wang X, et al. Mathematical expectation modeling of wide-area controlled power systems with stochastic time delay[J]. IEEE Trans on Smart Grid, 2015, 6(3): 1511-1519.
- [13] Zhang F, Sun Y, Cheng L, et al. Measurement and modeling of delays in wide-area closed-loop control systems[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2015, 30(5): 2426-2433.
- [14] Peng C, Yue D, Tian E, et al. A delay distribution based stability analysis and synthesis approach for networked control systems[J]. J of the Franklin Institute, 2009, 346(4): 349-365.
- [15] Yue D, Tian E, Zhang Y, et al. Delay-distribution-dependent robust stability of uncertain systems with time-varying delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(4): 377-393.
- [16] Zhang Y, Yue D, Tian E. Robust delay-distribution-dependent stability of discrete-time stochastic neural networks with time-varying delay[J]. Neurocomputing, 2009, 72(4/5/6): 1265-1273.
- [17] Horn R A. 矩阵分析[M]. 第2版. 北京: 机械工业出版社, 2014: 337.
(Horn R A. Matrix Analysis[M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2014: 337.)
- [18] 方保铭. 矩阵论[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2013: 354.
(Fang B R. Matrix theory[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 354.)
- [19] Park P, Ko J, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.
- [20] Ren W, Cao Y. Distributed coordination of multi-agent networks: Emergent problems, models, and issues[M]. London: Springer, 2011: 7.
- [21] Wu M, He Y, She J. Stability analysis and robust control of time-delay systems[M]. Beijing: Science Press, 2010: 44-51.
- [22] Liu J, Zhang J. Note on stability of discrete-time time-varying delay systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2012, 6(2): 335-337.