

基于量化测量值的实时状态估计的PCRLB

胡 斌¹, 沈志萍^{2,3}, 苏为洲^{1†}

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640; 2. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 3. 河南师范大学 大数据统计分析与优化控制河南省工程实验室, 河南 新乡 453007)

摘 要: 针对网络化系统中的实时量化估计问题, 研究基于量化测量值的离散时间系统实时状态估计均方误差的后验克拉美罗下界(PCRLB). 给出量化律的最优实时重构值和最小实时均方失真函数. 利用系统模型和量化律的最小实时均方失真函数, 得到实时状态估计的PCRLB. 所得到的PCRLB反映量化效应, 尤其是量化律的实时均方失真函数对实时状态估计性能的影响. 仿真算例表明, 当基于通信网络的系统具有不稳定特征根时, 在低比特率量化律的情形下, 实时状态估计的PCRLB可能不是有界的.

关键词: 状态估计; 量化; 后验克拉美罗下界; 失真函数

中图分类号: TP273

文献标志码: A

PCRLB in real-time state estimation with quantized measurements

HU Bin¹, SHEN Zhi-ping^{2,3}, SU Wei-zhou^{1†}

(1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2. College of Mathematics and Information Science, He'nan Normal University, Xinxian 453007, China; 3. He'nan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimization Control, He'nan Normal University, Xinxian 453007, China)

Abstract: This paper studies the posterior Cramér-Rao lower bound(PCRLB) of the mean-square error in real-time state estimation for a discrete-time system with quantized measurements in the area of networked systems. The optimal real-time reconstruction and the minimum real-time mean-square distortion function of quantization law are presented. Then the PCRLB is obtained in terms of the model of the system and the minimum real-time mean-square distortion function of the quantization law adapted in the system. The proposed PCRLB shows the quantization effect, especially the influence of the real-time mean-square distortion function on the performance of the state estimation. It is found that in the case when the system with a communication network is unstable, the PCRLB may not be bounded for a quantization law with a low bit-rate.

Keywords: state estimation; quantization; posterior Cramér-Rao lower bound; distortion function

0 引 言

近年来, 网络化系统已广泛应用于传感器网络、工业控制网络和微机电系统. 网络化系统中的通信网络将分布在不同空间位置上的组成单元(如执行器、传感器和控制器)连接起来, 以达到通过数据共享来控制一个或者多个回路系统的目的. 在这些系统的设计中, 由于量化误差会在一定程度上影响系统的性能, 甚至破坏系统的稳定性, 基于量化测量值的实时状态估计就成为其中一个关键问题, 这引起了很多关于网络化系统实时状态估计的研究兴趣^[1-3]. 后

验克拉美罗下界(PCRLB)就是一个分析基于量化测量值的状态估计最优性能的有效工具.

Curry^[4]针对离散时间线性系统, 给出了基于给定量化的状态估计的最优批处理算法. 利用基于过去时刻量化测量值的状态估计误差具有高斯分布的假设, Msechu等^[5]考虑了一种基于卡尔曼滤波的实时迭代算法. 同时, 为了从测量值中提取新息来进行编码, 状态估计算法也被用于差分编码器(或预测编码器)中^[6]. 但是, 由于量化律的非线性特性, 分析含有量化律的实时状态估计性能是很困难

收稿日期: 2017-06-01; 修回日期: 2017-09-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273109, 61673183).

责任编委: 虞文斌.

作者简介: 胡斌(1988—), 男, 博士生, 从事网络控制系统、估计理论和信号处理的研究; 苏为洲(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络反馈系统的分析与设计、网络系统分布式估计与信号处理等研究.

†通讯作者. E-mail: wzhsu@scut.edu.cn

的. Papadopoulos等^[7]研究了用静态线性系统的量化测量值进行信号重构的克拉美罗下界,并提出了一种量化律的设计方法; Ribeiro等^[8]给出了在一比特量化律下估计性能的克拉美罗下界和相对应的最优设计方法; Zhou等^[9]利用粒子滤波近似地得到了基于量化测量值的状态估计量的PCRLB.

本文以网络化系统为研究背景,针对离散时间线性系统,研究基于量化测量值的实时状态估计性能的PCRLB. 首先研究量化律的最优实时重构值和基于过去时刻量化测量值的最小实时均方失真函数;然后利用系统的模型和量化律的最小实时均方失真函数,得到实时状态估计的PCRLB. 基于Lloyd-Max量化器的仿真算例表明,当系统具有不稳定特征根时,在低比特率情形下的PCRLB可能不是有界的.

1 问题描述

本文研究的网络化系统如图1所示.

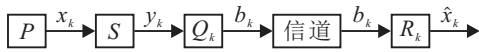


图1 网络化系统

信源信号由对象 P 产生,并被传感器 S 测量,分别由如下状态方程和观测方程描述:

$$x_k = Ax_{k-1} + w_{k-1}, \quad (1)$$

$$y_k = Hx_k + v_k. \quad (2)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, $y_k \in \mathbf{R}$ 是测量值, $w_k \in \mathbf{R}^n$ 是驱动噪声, $v_k \in \mathbf{R}$ 是测量噪声, A 和 H 是具有适当维数的常数矩阵. 来自传感器的测量值 y_k 由量化器 Q_k 进行编码,量化器 Q_k 的输出 b_k 经由具有固定率为 q 比特/采样时刻的无噪声数字信道发送到远程设备. 接着,远程设备的接收器 R_k 根据接收到的码字估计对象的状态.

假设1 对象的初始状态 x_0 服从均值为 $\hat{x}_0$ 、方差为 M_0 的高斯分布, w_k 和 v_k 分别为常数方差 W 和 V 的零均值高斯白噪声, x_0 、 w_k 、 v_k 互不相关.

在时刻 k , 因为通信信道只能传输 q 比特的信息,所以连续取值的测量值 y_k 在传输前必须离散化,即量化器 Q_k 需要把测量值空间 $\mathbf{R}$ 划分成 2^q 个区间:

$$[\tau_k^i, \tau_k^{i+1}), i = 0, 1, \dots, 2^q - 1.$$

其中: $\{\tau_k^i\}_{i=0}^{2^q}$ 是阈值集合,且 $\tau_k^0 = -\infty, \tau_k^{2^q} = \infty$. 因此,量化律 $Q_k(\cdot)$ 描述为

$$b_k = Q_k(y_k) = i, y_k \in [\tau_k^i, \tau_k^{i+1}), \quad (3)$$

其中 b_k 是用于传输的码字.

记量化测量值序列 $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ 为 $b_{1:k}$, 基于接收到的二进制数据序列 $b_{1:k}$ 的状态估计量为 $\hat{x}_{k|k}$. 状态估计量的性能 J_k 由其均方误差度量,即

$$J_k = \text{tr}(E\{(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T\}). \quad (4)$$

由于量化律的非线性特性,计算基于量化测量值 $b_{1:k}$ 的最优状态估计量是很困难的. 本文研究的问题是:给定一个时变的量化律 Q_k , 如何求基于量化测量值的实时状态估计性能的PCRLB. 显然,这个下界与系统模型(1)、(2)和测量值 y_k 基于量化测量值 $b_{1:k}$ 的重构值精度有关. 重构值的性能由其均方误差度量,称为实时均方失真函数.

2 实时均方失真函数

本节研究量化律 Q_k 在采样时刻 k 基于过去时刻量化测量值 $b_{1:k-1}$ 的实时均方失真函数.

记基于量化测量值 $b_{1:k-1}$ 和 $b_k = i$ 的 y_k 重构值为 $\bar{y}_{k|k-1}^i$. 重构值 $\bar{y}_{k|k-1}^i$ 关于 $b_{1:k-1}$ 和 $b_k = i$ 的条件均方误差记为 $D_{k|k-1}^i$, 即

$$\begin{aligned} D_{k|k-1}^i &= E\{(y_k - \bar{y}_{k|k-1}^i)^2 | b_k = i, b_{1:k-1}\} = \\ &= \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} (y_k - \bar{y}_{k|k-1}^i)^2 p(y_k | b_k = i, b_{1:k-1}) dy_k, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $p(y_k | b_k = i, b_{1:k-1})$ 是 y_k 关于 $b_{1:k-1}$ 和 $b_k = i$ 的条件概率密度函数.

使条件均方误差 $D_{k|k-1}^i$ 最小的最优重构值满足

$$\frac{\partial D_{k|k-1}^i}{\partial \bar{y}_{k|k-1}^i} = -2 \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} (y_k - \bar{y}_{k|k-1}^i) \times p(y_k | b_k = i, b_{1:k-1}) dy_k = 0.$$

进而有

$$\begin{aligned} \bar{y}_{k|k-1}^i &= \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} y_k p(y_k | b_k = i, b_{1:k-1}) dy_k = \\ &= \int \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} y_k p(y_k, x_k | b_k = i, b_{1:k-1}) dy_k dx_k. \end{aligned} \quad (6)$$

根据贝叶斯法则,在区间 $[\tau_k^i, \tau_k^{i+1})$ 中, y_k 和 x_k 关于 $b_{1:k-1}$ 和 $b_k = i$ 的条件联合概率密度函数 $p(y_k, x_k | b_k = i, b_{1:k-1})$ 可以表示为

$$\begin{aligned} p(y_k, x_k | b_k = i, b_{1:k-1}) &= \\ &= \frac{p(y_k, x_k | b_{1:k-1})}{p(b_k = i | b_{1:k-1})} = \\ &= \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | b_{1:k-1})}{p(b_k = i | b_{1:k-1})}, y_k \in [\tau_k^i, \tau_k^{i+1}). \end{aligned} \quad (7)$$

给定条件概率密度函数 $p(y_k | x_k)$, 测量值 y_k 在区间 $[\tau_k^i, \tau_k^{i+1})$ 中的质心记为 $\hat{y}_k^i(x_k)$, 即

$$\hat{y}_k^i(x_k) = \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} y_k p(y_k | x_k) dy_k / \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} p(y_k | x_k) dy_k. \quad (8)$$

从而,联立式(6)~(8),最优重构值 $\bar{y}_{k|k-1}^i$ 可以写成

$$\bar{y}_{k|k-1}^i =$$

$$\begin{aligned} & \int \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} y_k p(y_k | x_k) dy_k \frac{p(x_k | b_{1:k-1})}{p(b_k = i | b_{1:k-1})} dx_k = \\ & \int \hat{y}_k^i(x_k) \frac{\int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} p(y_k, x_k | b_{1:k-1}) dy_k}{p(b_k = i | b_{1:k-1})} dx_k = \\ & \int \hat{y}_k^i(x_k) p(x_k | b_k = i, b_{1:k-1}) dx_k. \end{aligned} \quad (9)$$

由于 $p(x_k | b_k = i, b_{1:k-1})$ 是 x_k 关于 $b_k = i$ 和 $b_{1:k-1}$ 的条件概率密度函数, 最优重构值 $\bar{y}_{k|k-1}^i$ 实际上是 $\hat{y}_k^i(x_k)$ 关于 $b_k = i$ 和 $b_{1:k-1}$ 的条件均值.

一般地, 条件均方误差 $D_{k|k-1}^i$ 对 b_k 求得的均值定义为量化律 Q_k 的实时均方失真函数 $D_{k|k-1}$, 即

$$D_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2^q-1} D_{k|k-1}^i p(b_k = i | b_{1:k-1}). \quad (10)$$

记最小的实时均方失真函数为 $D_{k|k-1}^{\min}$. 将式(6)代入(10), 可得

$$\begin{aligned} D_{k|k-1}^{\min} = \\ E\{y_k^2 | b_{1:k-1}\} - \sum_{i=0}^{2^q-1} (\bar{y}_{k|k-1}^i)^2 p(b_k = i | b_{1:k-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $E\{y_k^2 | b_{1:k-1}\} = \int y_k^2 p(y_k | b_{1:k-1}) dy_k$.

3 状态重构的PCRLB

研究基于量化测量值的状态估计的PCRLB. 记

$$\begin{aligned} X_{0:k} &= [x_0^T, x_1^T, \dots, x_k^T]^T, \\ X_{1:k} &= [x_1^T, x_2^T, \dots, x_k^T]^T. \end{aligned}$$

$X_{1:k}$ 基于量化测量值 $b_{1:k}$ 的无偏估计量记为 $\hat{X}_{1:k|1:k}$. 估计量 $\hat{X}_{1:k|1:k}$ 的估计误差方差矩阵记为 $M_{1:k|1:k}$, 即

$$M_{1:k|1:k} = E\{(X_{1:k} - \hat{X}_{1:k|1:k})(X_{1:k} - \hat{X}_{1:k|1:k})^T\}.$$

引理1 无偏估计量 $\hat{X}_{1:k|1:k}$ 的估计误差方差矩阵 $M_{1:k|1:k}$ 的PCRLB具有如下形式^[10]:

$$M_{1:k|1:k} \geq F_{1:k}^{-1}, \quad (12)$$

其中 $F_{1:k}$ 为如下定义的Fisher信息矩阵:

$$F_{1:k} = E\{-\Delta_{X_{1:k}}^{X_{0:k}} \log p(X_{0:k}, b_{1:k})\}.$$

根据贝叶斯法则, 联合概率密度函数 $p(X_{0:k}, b_{1:k})$ 可以写成

$$\begin{aligned} p(X_{0:k}, b_{1:k}) &= p(x_k, b_k | X_{0:k-1}, b_{1:k-1}) \times \\ & p(X_{0:k-1}, b_{1:k-1}). \end{aligned}$$

由系统模型(1)和(2)的因果性, 可得

$$p(x_k, b_k | X_{0:k-1}, b_{1:k-1}) = p(b_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}),$$

其中 $p(x_k | x_{k-1})$ 和 $p(b_k | x_k)$ 由系统模型(1)、(2)和量化律 Q_k 确定.

估计量 $\hat{X}_{1:k|1:k}$ 可以划分成 k 个大小为 $n \times 1$ 的块, 其第 k 个块正是基于量化测量值 $b_{1:k}$ 的状态 x_k 的估计量 $\hat{x}_{k|k}$. 估计误差方差矩阵 $M_{1:k|1:k}$ 也可以划分

成 $k \times k$ 个大小为 $n \times n$ 的块, 其第 $\{k, k\}$ 个块正是估计量 $\hat{x}_{k|k}$ 的估计误差方差矩阵, 记为 M_k . 由于状态估计性能 $J_k = \text{tr}(M_k)$, 本节接下来的工作是研究 M_k 的PCRLB.

记 $F_{1:k}^{-1}$ 的第 $\{k, k\}$ 个块的逆为 F_k , 由式(12)可得

$$M_k \geq F_k^{-1}. \quad (13)$$

F_k 正是 M_k 对应的Fisher信息矩阵. Tichavský等^[11]给出了一种计算 F_k 的迭代方法.

引理2 式(13)中的 F_k 可以如下迭代地计算:

$$F_k = D_k^{22} - D_k^{21}(F_{k-1} + D_k^{11})^{-1} D_k^{12}. \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} D_k^{11} &= E\{-\Delta_{x_{k-1}}^{x_{k-1}} \log p(x_k | x_{k-1})\}, \\ D_k^{12} &= E\{-\Delta_{x_{k-1}}^{x_k} \log p(x_k | x_{k-1})\} = (D_k^{21})^T, \\ D_k^{22} &= E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(x_k | x_{k-1})\} + \\ & E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k | x_k)\}. \end{aligned}$$

初始Fisher信息矩阵 F_0 可以由先验概率密度函数 $p(x_0)$ 计算得到, 即

$$F_0 = E\{-\Delta_{x_0}^{x_0} \log p(x_0)\}. \quad (15)$$

定理1 对于系统模型(1)、(2)和量化律(3), 基于量化测量值的实时状态估计的Fisher信息矩阵可以如下迭代地计算:

$$\begin{aligned} F_k &= (AF_{k-1}^{-1}A^T + W)^{-1} + H^T V^{-2} H \times \\ & \left[V - E\{D_{k|k-1}^{\min}\} + E\left\{\sum_{i=0}^{2^q-1} \int [\hat{y}_k^i(x_k) - \right. \right. \\ & \left. \left. \bar{y}_{k|k-1}^i]^2 p(b_k = i, x_k | b_{1:k-1}) dx_k \right\} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

证明 由式(1)和假设1可得

$$\begin{aligned} -\log p(x_k | x_{k-1}) &= \\ c_1 + \frac{1}{2}(x_k - Ax_{k-1})^T W^{-1}(x_k - Ax_{k-1}), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 c_1 为常数. 从而, 引理2中的 D_k^{11} 、 D_k^{12} 、 D_k^{21} 和 D_k^{22} 可以写成

$$\begin{aligned} D_k^{11} &= A^T W^{-1} A, \\ D_k^{12} &= (D_k^{21})^T = -A^T W^{-1}, \\ D_k^{22} &= W^{-1} + E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k | x_k)\}. \end{aligned}$$

注意到

$$\nabla_{x_k} [\log p(b_k | x_k)] = \frac{1}{p(b_k | x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} p(b_k | x_k), \quad (18)$$

由量化律(3)可得

$$p(b_k = i | x_k) = \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} p(y_k | x_k) dy_k. \quad (19)$$

根据式(2)和假设1可得

$$p(y_k | x_k) = \mathcal{N}(Hx_k, V),$$

其中 $\mathcal{N}(Hx_k, V)$ 是均值为 Hx_k 、方差为 V 的高斯分

布概率密度函数. 从而, 式(19)可以写成

$$p(b_k = i|x_k) = \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp \left\{ -\frac{(y_k - Hx_k)^2}{2V} \right\} dy_k. \quad (20)$$

对等式(20)两边求关于 x_k 的偏导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} p(b_k = i|x_k) &= H^T V^{-1} \times \int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} (y_k - Hx_k) \times \\ &\exp \left\{ -\frac{(y_k - Hx_k)^2}{2V} \right\} dy_k. \end{aligned} \quad (21)$$

同时, 式(8)可以写成

$$\hat{y}_k^i(x_k) = \frac{\int_{\tau_k^i}^{\tau_k^{i+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} y_k \exp \left\{ -\frac{(y_k - Hx_k)^2}{2V} \right\} dy_k}{p(b_k = i|x_k)}. \quad (22)$$

将式(21)和(22)代入(18), 可得

$$\nabla_{x_k} [\log p(b_k = i|x_k)] = H^T V^{-1} [\hat{y}_k^i(x_k) - Hx_k]. \quad (23)$$

根据文献[12]可得

$$\begin{aligned} E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k|x_k)\} &= \\ E\{\nabla_{x_k} [\log p(b_k|x_k)] \nabla_{x_k}^T [\log p(b_k|x_k)]\}. \end{aligned} \quad (24)$$

将式(23)代入(24), 可得

$$\begin{aligned} E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k|x_k)\} &= \\ H^T V^{-2} H E\left\{ \sum_{i=0}^{2^q-1} [\hat{y}_k^i(x_k) - Hx_k]^2 p(b_k = i|x_k) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

注意到

$$\sum_{i=0}^{2^q-1} \hat{y}_k^i(x_k) p(b_k = i|x_k) = Hx_k.$$

从而, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^q-1} [\hat{y}_k^i(x_k) - Hx_k]^2 p(b_k = i|x_k) &= \\ \sum_{i=0}^{2^q-1} [\hat{y}_k^i(x_k)]^2 p(b_k = i|x_k) - (Hx_k)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

将式(26)代入(25), 可得

$$\begin{aligned} E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k|x_k)\} &= H^T V^{-2} H \times \\ \left[E\left\{ \sum_{i=0}^{2^q-1} [\hat{y}_k^i(x_k)]^2 p(b_k = i|x_k) \right\} - E\{(Hx_k)^2\} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} E\left\{ \sum_{i=0}^{2^q-1} [\hat{y}_k^i(x_k)]^2 p(b_k = i|x_k) \right\} &= \\ \int \left[\sum_{i=0}^{2^q-1} [\hat{y}_k^i(x_k)]^2 p(b_k = i|x_k) \right] p(x_k) dx_k &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^q-1} \int [\hat{y}_k^i(x_k)]^2 p(b_k = i|x_k) p(x_k) dx_k &= \\ \sum_{i=0}^{2^q-1} \int \left[\int [\hat{y}_k^i(x_k)]^2 p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k \right] \times \\ p(b_{1:k-1}) db_{1:k-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

由式(9)可得

$$\begin{aligned} \int \hat{y}_k^i(x_k) p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k &= \\ \int \hat{y}_k^i(x_k) p(x_k|b_k = i, b_{1:k-1}) p(b_k = i|b_{1:k-1}) dx_k &= \\ \bar{y}_{k|k-1}^i p(b_k = i|b_{1:k-1}) &= \\ \int \bar{y}_{k|k-1}^i p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k. \end{aligned} \quad (29)$$

从而, 得到

$$\begin{aligned} \int [\hat{y}_k^i(x_k)]^2 p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k &= \\ \int [\hat{y}_k^i(x_k) - \bar{y}_{k|k-1}^i]^2 p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k &+ \\ 2 \int [\hat{y}_k^i(x_k) - \bar{y}_{k|k-1}^i] \bar{y}_{k|k-1}^i p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k &+ \\ \int (\bar{y}_{k|k-1}^i)^2 p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k &= \\ \int [\hat{y}_k^i(x_k) - \bar{y}_{k|k-1}^i]^2 p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k &+ \\ (\bar{y}_{k|k-1}^i)^2 p(b_k = i|b_{1:k-1}). \end{aligned} \quad (30)$$

联立式(28)和(30), 代入式(27)可得

$$\begin{aligned} E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k|x_k)\} &= \\ H^T V^{-2} H \times \left[E\left\{ \sum_{i=0}^{2^q-1} \int [\hat{y}_k^i(x_k) - \bar{y}_{k|k-1}^i]^2 \times \right. \right. \\ p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k \Big\} &+ \\ E\left\{ \sum_{i=0}^{2^q-1} (\bar{y}_{k|k-1}^i)^2 p(b_k = i|b_{1:k-1}) \right\} &- E\{(Hx_k)^2\} \Big]. \end{aligned} \quad (31)$$

注意到

$$E\{y_k^2\} = E\{(Hx_k)^2\} + V,$$

从而, 由式(11)可得

$$\begin{aligned} E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k|x_k)\} &= \\ H^T V^{-2} H \times \left[E\left\{ \sum_{i=0}^{2^q-1} \int [\hat{y}_k^i(x_k) - \bar{y}_{k|k-1}^i]^2 \times \right. \right. \\ p(b_k = i, x_k|b_{1:k-1}) dx_k \Big\} &+ V - E\{D_{k|k-1}^{\min}\} \Big]. \end{aligned} \quad (32)$$

利用引理2和式(32), 可得

$$\begin{aligned} F_k &= \\ W^{-1} - W^{-1} A (F_{k-1} + A^T W^{-1} A)^{-1} A^T W^{-1} &+ \\ E\{-\Delta_{x_k}^{x_k} \log p(b_k|x_k)\} &= \\ (A F_{k-1}^{-1} A^T + W)^{-1} + H^T V^{-2} H \times \\ \left[V - E\{D_{k|k-1}^{\min}\} + E\left\{ \sum_{i=0}^{2^q-1} \int [\hat{y}_k^i(x_k) - \bar{y}_{k|k-1}^i]^2 \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$p(b_k = i, x_k | b_{1:k-1}) dx_k \Bigg\}. \quad \square$$

注1 定理1精确地描述了量化效应对状态估计均方误差下界的影响. 当 $q \rightarrow \infty$ 时, Fisher信息矩阵 F_k 迭代式(16)中的第2项趋近于 $H^T V^{-1} H$. 同时, 由文献[11]可知, 在这种情形下, F_k^{-1} 趋近于标准代数Riccati方程的解.

4 仿真分析

在网络化系统中, 卡尔曼滤波器的稳定性条件通常与系统的不稳定特征根有关^[13]. 因此, 不稳定的系统对于网络化系统具有非常重要的研究意义. 一个具有代表性的例子是文献[14]中基于通信网络的pendubot在不稳定平衡点附近线性化并根据采样周期离散化的系统模型.

考虑一个基于通信网络不稳定的系统模型

$$A = \begin{bmatrix} -3.5 & -1.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0], \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = 1.$$

这里采用的量化律是时变Lloyd-Max量化器, 其阈值集合 $\{\tau_k^i\}_{i=0}^{2^q}$ 由测量值 y_k 关于 $b_{1:k-1}$ 的条件概率密度函数 $p(y_k | b_{1:k-1})$ 唯一确定. 图2给出了当比特率 q 分别为1、2和4时, PCRLB F_k^{-1} 的迹通过对 10^4 次蒙特卡罗仿真结果取平均值得到的随时刻 k 变化的曲线.

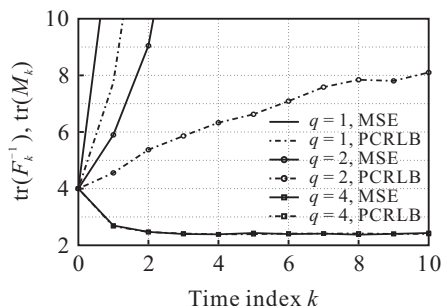


图2 基于时变Lloyd-Max量化器的状态估计均方误差(MSE)和PCRLB的迹的变化曲线

由图2可见, 由于 A 有单位圆外的不稳定特征根, PCRLB的迹曲线在低比特率的情形下会发散. 图2还给出了根据文献[5]中基于卡尔曼滤波的实时迭代算法得到的状态估计均方误差(MSE)曲线, 可知该算法的状态估计均方误差与其PCRLB的迹之间的差距随着比特率的增大而减小.

5 结论

本文针对网络化系统中的单输出离散时间线性系统, 研究基于量化测量值的实时状态估计性能的PCRLB. 首先给出了量化律的最优实时重构值和基于过去时刻量化测量值的最小实时均方失真函数; 然后利用系统的模型和量化律的最小实时均方

失真函数, 得到了PCRLB的迭代式, 反映了量化律的实时均方失真函数对实时状态估计性能的影响. 基于时变Lloyd-Max量化器的仿真算例表明, 当系统具有不稳定特征根时, 在低比特率情形下的PCRLB可能不是有界的. 同时, 文献[5]中基于卡尔曼滤波的实时迭代算法在比特率足够高的情形下能够达到该PCRLB.

参考文献(References)

- [1] Nair G N, Fagnani F, Zampieri S, et al. Feedback control under data rate constraints: An overview[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 108-137.
- [2] Tatikonda S, Sahai A, Mitter S K. Stochastic linear control over a communication channel[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1549-1561.
- [3] You K Y, Xie L H, Sun S L, et al. Multiple-level quantized innovation Kalman filter[J]. Proc of IFAC, 2008, 41(2): 1420-1425.
- [4] Curry R E. Estimation and control with quantized measurements[M]. Cambridge: MIT Press, 1970: 12-13.
- [5] Msechu E J, Roumeliotis S I, Ribeiro A, et al. Decentralized quantized Kalman filtering with scalable communication cost[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(8): 3727-3741.
- [6] Gibson J D. Adaptive prediction in speech differential encoding systems[J]. Proc of the IEEE, 1980, 68(4): 488-525.
- [7] Papadopoulos H C, Wornell G W, Oppenheim A V. Sequential signal encoding from noisy measurements using quantizers with dynamic bias control[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2001, 47(3): 978-1002.
- [8] Ribeiro A, Giannakis G B. Bandwidth-constrained distributed estimation for wireless sensor Networks — Part I: Gaussian case[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(3): 1131-1143.
- [9] Zhou Y, Li J, Wang D. Posterior Cramér-Rao lower bounds for target tracking in sensor networks with quantized range-only measurements[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2010, 17(2): 157-160.
- [10] Van Trees H L. Detection, estimation, and modulation theory[M]. New York: John Wiley & Sons, 1968: 72-73.
- [11] Tichavský P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(5): 1386-1396.
- [12] DeGroot M H, Schervish M J. Probability and statistics[M]. 4th ed. Boston: Addison-Wesley, 2012: 514-516.
- [13] 游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述[J]. 自动化学报, 2013, 39(2): 101-118.
- [14] (You K Y, Xie L H. Survey of recent progress in networked control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(2): 101-118.)
- [14] Schenato L, Sinopoli B, Franceschetti M, et al. Foundations of control and estimation over lossy networks[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(1): 163-187.