第 33 卷 第 10 期 控 制 与 决 策 Vol.33 No.10
2018 年 10 月 Control and Decision Oct. 2018

文章编号: 1001-0920(2018)10-1871-08 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.0570

考虑延时效应和记忆效应的供应链广告策略

于 浍[1], 陈东彦[1,2†], 黄春丽[2]

(1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院，哈尔滨 150080；2. 哈尔滨理工大学 管理学院，哈尔滨 150080)

摘 要: 研究考虑延时效应和记忆效应的供应链广告策略问题,建立泛函微分方程以刻画广告延时和记忆双重效应对产品品牌信誉变化的影响,运用微分对策理论给出制造商和零售商在分散式决策和集中式决策下的最优广告投入水平、广告排期以及相应的产品品牌信誉,并对不同决策机制下供应链成员的均衡策略进行比较分析. 研究表明:集中式决策能激励制造商和零售商的广告投入; 延时效应与记忆效应分别影响供应链成员广告时序策略与广告排期策略的制定,同时,还会影响供应链决策机制的选择.

关键词: 动态广告策略；延时效应；记忆效应；微分对策

中图分类号: F224.32 **文献标志码:** A

Advertising strategies for supply chain with lagged and memory effects

YU Hui[1], *CHEN Dong-yan*[1,2†], *HUANG Chun-li*[2]

(1. School of Applied Science，Harbin University of Science and Technology，Harbin 150080，China；2. School of Management，Harbin University of Science and Technology，Harbin 150080，China)

Abstract: The problem for a class of advertising strategies in a supply chain is studied based on the impacts of the lagged and memory effects. The functional differential equation is developed to depict the impacts of lagged and memory effects on the evolution of product's brand goodwill. By applying the differential game theory, the optimal advertising investment levels of manufacturers and retailers, advertising scheduling and the brand goodwill of products are obtained in the decentralized and centralized decisions. Also, the paper comparatively analyzes the optimal equilibrium strategies in the two decision systems. The results show that the centralized decision can simulate the advertising investment of supply chain members; meanwhile, the lagged effect and memory effect not only influence the determination of advertising timing schemes and advertising schedule policies, respectively, but also affect the choice of decision mechanism.

Keywords: dynamic advertising strategy；lagged effect；memory effect；differential game

0 引 言

随着市场经济的发展,广告作为企业营销中最重要的促销手段切实发挥着不可替代的作用. 尽管广告的“双刃”现象早有显现,但实际上企业仍乐于相信广告能拉动需求,提升收益. 然而,一味地广告投入会造成企业资金流失,严重者甚至影响企业运作发展. 例如:苏宁云商2013年的广告费用与2012年相比增长了7.9 %,但其净利润却下降了86.11 %;海信电器的广告费用同比增长15.39 %,其净利润则出现1.2 %的下滑[1]. 因此,如何以提升企业知名度和市场占有率为目的进行合理的广告投入一直是企业管理者的难题,也被学者们所关注.

有关广告策略的理论研究主要针对静态和动态两种模型,研究结果对实际有着重要的指导意义. 在动态广告模型中,决策者以企业长远利益最大化为决策目标进行广告投放,即决策者为战略型的;而在静态广告模型中,决策者以当前利益最大化为目标,为“近视”型的. 从战略型决策者角度出发,如何确定企业的最优广告投入一直受到学者的广泛关注. 1962年,Nerlove和Arrow提出了经典的Nerlove-Arrow(N-A)动态模型,刻画广告投入对产品品牌信誉变化的影响[2]. Jϕrgensen等[3]和张庶萍等[4]在改进的N-A模型基础上研究了供应链合作广告策略问题,研究中均假设制造商广告投入能够促进产品品牌信誉的积累,零售商广告投入能够促进产品销售量的提高,研究发现,集中式决策下整个供应链的利润高于分散式

收稿日期: 2017-05-09；**修回日期:** 2017-10-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11271103).

责任编委: 黄敏.

作者简介: 于浍(1987−), 女, 讲师, 博士, 从事系统优化与供应链管理的研究；陈东彦(1964−), 女, 教授, 博士生导师, 从事时滞系统鲁棒控制、最优化方法以及系统优化与供应链管理等研究.

†通讯作者. E-mail: dychen_2004@hotmail.com

决策. 张智勇等[5] 在Jϕrgensen等的研究基础上,利用微分对策理论研究了双渠道供应链的动态定价和协调问题. He等[6] 和Zhou等[7] 对文献[4]的模型进行了改进,研究了多制造商与单一零售商之间的广告策略问题. Zhang等[8] 建立了基于产品参考价格的动态广告模型,应用微分对策理论得到了Stackelberg博弈与合作博弈下供应链成员的最优决策,并设计了双边补贴契约协调供应链. 陈东彦等[9] 基于N-A模型考虑了广告投入水平对产品品牌信誉影响的抑制作用,研究发现,广告投入水平上限越高,成员投入的广告就越多. 近年来,陈春秋等[10] 将动态广告模型应用到供应链低碳化问题中.

在上述动态广告策略研究中,其基本假设均为广告效果是即时的. 事实上,有时一定数量的广告投入并不会给产品品牌信誉和销售量带来立竿见影的效果(即时效应),广告效果往往经过一段时间才有所体现,这种现象称为延时效应;同时,某种广告可以从众多广告中区分出来并被消费者记住,这种能力称为记忆效应. 对于即时效应不明显的商品,要达到广告的预期效果常常需要延时效应和记忆效应等联合作用. 大量实证研究已证实延时效应和记忆效应的存在性,并指出媒体形式和消费者的购物心理等将影响广告延迟时间和记忆时间[11-12]. Leone等[13] 研究表明延时效应平均持续6～9个月;Wansink等[14] 则发现高达70 %产品的展示广告在促销结束3个月后仍能被消费者回忆起目标品牌. 面对消费者复杂的购买行为,管理者如何制定合理的广告策略变得至关重要. Hartl等[15] 提出了在泛函微分方程约束下的极大值原理,并将理论结果应用到考虑延时和记忆双重效应影响的企业广告策略中,但未考虑不确定性因素对品牌信誉动态模型的影响. 而在文献[16]中,Gozzi等以新产品的市场营销情况为问题来源,建立考虑延时和记忆双重效应影响的随机品牌信誉模型,研究了随机时滞微分方程的最优控制问题,并提出最优控制问题的验证性定理;随后,给出了企业的最优广告策略,并探究广告效应对最优广告决策的影响[17]. Aravindakshan等[18] 分析了记忆时间对企业最优广告策略的影响. 上述研究均针对单一企业展开,而制造商大多是通过经销商和零售商销售产品,因此,从供应链整体视角进行研究是十分必要的.

本文将延时效应和记忆效应引入供应链广告决策中,研究考虑延时和记忆双重效应影响的供应链成员的广告策略. 通常情况下,产品进入市场前,消费者对产品还不了解,制造商为了打开产品市场而进行一系列战略规划,使产品迅速累积出一定的品牌信誉,即获得品牌信誉的初值;产品进入市场后,制造商和零售商对产品进行广告宣传,产品品牌信誉将随时间动态变化,其变化率直接受制造商广告投入和品牌信誉自身衰减的影响,而不受零售商广告的影响. 零售商广告直接影响产品销售量. 由于广告效应具有延时性和记忆性,使得制造商广告投入对品牌信誉影响的正效应及品牌信誉自身衰减的负效应均不会立刻产生. 因此,本文充分考虑两种广告效应对品牌信誉动态变化的影响,建立相应的品牌信誉泛函微分方程,运用微分对策理论解决考虑延时效应和记忆效应影响的供应链广告策略问题,并给出分散式决策和集中式决策下供应链成员的最优广告投入、产品品牌信誉等. 最后,分析广告延迟时间和记忆时间对供应链成员广告策略制定的影响.

1 模型描述

考虑由单一制造商M和单一零售商R组成的供应链,为了提升产品品牌信誉和拉动产品需求,制造商和零售商分别进行全国性广告和地方性广告宣传. 设t时刻制造商和零售商的广告投入水平分别为$U_M(t)$和$U_R(t)$,借鉴文献[18]的模型,建立如下泛函微分方程来描述考虑延时效应和记忆效应双重影响的产品品牌信誉$G(t)$的动态变化过程:

$$\dot{G}=\begin{cases}0,\ t\in[0,\tau);\\ -\delta G(t-\tau),\ t\in[\tau,d);\\ \lambda U_M(t-d)-\delta G(t-\tau),\ t\in[d,\infty);\end{cases}\tag{1}$$

$$G(0)=G_0.$$

其中:G_0为产品品牌信誉的初值;δ为品牌信誉的衰减率;λ为制造商的广告投入水平对产品品牌信誉变化率的影响因子;τ为消费者对广告作用记忆时间;d为全国性广告作用延迟时间,且不失一般性假设$d>\tau$.

根据文献[4]的研究,产品销售量$S(t)$受零售商地方性广告投入和产品品牌信誉的共同影响,零售商广告投入直接促进产品销量,而制造商广告投入则通过提升产品品牌信誉间接影响产品销售量,因此假设

$$S(t)=\alpha G(t)+\beta U_R(t).\tag{2}$$

其中:α为产品品牌信誉对产品销售量的影响因子,β为零售商广告投入水平对产品销量的影响因子.

此外,制造商和零售商的广告投入均需要支出一定的广告成本,通常,广告投入成本是其自身广告投入水平的增函数且呈上凸的特点,常假设其为二次函

数形式[6],即

$$C(U_M(t))=\frac{1}{2}k_MU_M^2(t),\tag{3}$$

$$C(U_R(t))=\frac{1}{2}k_RU_R^2(t),\tag{4}$$

其中$k_M,k_R>0$分别为制造商和零售商的广告成本系数.

供应链中战略型企业的最终目标是获得更大的长远经济效益. 假设供应链可以长期运作,制造商和零售商的边际利润分别为ρ_M和ρ_R,并且拥有相同的折现率$\rho>0$. 于是,制造商、零售商和整个供应链的利润函数可表示为

$$J_M=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}\{\rho_MS(t)-C(U_M(t))\}\mathrm{d}t,\tag{5}$$

$$J_R=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}\{\rho_RS(t)-C(U_R(t))\}\mathrm{d}t,\tag{6}$$

$$J_{MR}=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}\{(\rho_M+\rho_R)S(t)-C(U_M(t))-C(U_R(t))\}\mathrm{d}t.\tag{7}$$

本文将利用微分对策理论在供应链企业的不同决策机制下分别研究其最优广告策略,并分析广告延迟时间和记忆时间对供应链决策的影响.

2 分散式决策下广告策略

在分散式决策下,制造商和零售商是独立的经济主体,双方均以自身利润最大化为决策目标制定最优广告策略. 因此,制造商和零售商的最优决策问题分别为

$$\begin{aligned}&\max\ J_M,\\&\text{s.t. 式(1)};\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\max\ J_R,\\&\text{s.t. 式(1)}.\end{aligned}$$

可利用极大值原理进行求解. 在不同时间区域内,供应链成员的Hamilton函数分别为

$$H_i=\rho_i[\alpha G(t)+\beta U_R(t)]-\frac{1}{2}k_iU_i^2(t),\quad t\in[0,\tau);\tag{8}$$

$$H_i=\rho_i[\alpha G(t)+\beta U_R(t)]-\frac{1}{2}k_iU_i^2(t)+p_i(t)[-\delta G(t-\tau)],\ t\in[\tau,d);\tag{9}$$

$$H_i=\rho_i[\alpha G(t)+\beta U_R(t)]-\frac{1}{2}k_iU_i^2(t)+p_i(t)[\lambda U_M(t-d)-\delta G(t-\tau)],\quad t\in[d,\infty).\tag{10}$$

其中: $i=M$或R, p_M和p_R分别为制造商和零售商的伴随向量. 为了求解分散式决策下制造商和零售商的最优广告策略,首先介绍如下引理.

引理1[19] 设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=g(t,y(t),y(t-\tau),u(t),u(t-d));\\y(t)=y_0(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0];\\u(t)=u_0(t),\ t\in[t_0-d,t_0].\end{cases}$$

性能指标为

$$J(u(\cdot))=\int_{t_0}^{\infty}L(t,y(t),y(t-\tau),u(t),u(t-d))\mathrm{d}t.$$

其中: $y_0(t)$是区间$[t_0-\tau,t_0]$上的连续函数; $u_0(t)$是区间$[t_0-d,t_0]$上的分段连续函数; $g(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$关于所有变元是连续可微的,偏导数是一致有界的; 而$L(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$关于所有变元是连续可微的,偏导数是有界的. 设$u^*(t)$是最优控制, $y^*(t)$是由此产生的最优轨线,则存在与$u^*(t)$和$y^*(t)$对应的最优伴随向量$p^*(t)$且满足

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)}+\frac{\partial H(t+d)}{\partial u(t)}=0,$$

$$\dot{p}(t)=-\frac{\partial H(t)}{\partial y(t)}-\frac{\partial H(t+\tau)}{\partial y(t)},$$

其中哈密顿函数

$$H=L(t,y(t),y(t-\tau),u(t),u(t-d))+p(t)^{\mathrm{T}}g(t,y(t),y(t-\tau),u(t),u(t-d)).$$

定理1 在分散式决策下,制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$U_M^N(t)=\begin{cases}0,\ t\in[0,d);\\\max\Big\{\dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\rho d}}{k_M}\Big[\dfrac{\alpha\rho_M}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}}+p_{MH}(t+d)\Big],0\Big\},\\\quad t\in[d,\infty);\end{cases}$$

$$U_R^N(t)=\frac{\beta\rho_R}{k_R},\ t\geqslant0.$$

其中

$$p_{MH}(t)=\mathrm{e}^{\rho t-\frac{W_0(-\delta\tau)}{\tau}t}+\mathrm{e}^{\rho t-\frac{W_{-1}(-\delta\tau)}{\tau}t},$$

$W_0(\cdot)$和$W_{-1}(\cdot)$为朗伯函数在实数域内的两支.

证明 首先,求解制造商的最优广告投入水平,即在动态方程(1)约束下求解优化问题

$$\max_{U_M\geqslant0}J_M=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}\Big\{\rho_M[\alpha G(t)+\beta U_R(t)]-\frac{1}{2}k_MU_M^2(t)\Big\}\mathrm{d}t.$$

当$t\in[0,d)$时,利用式(8)和(9),由$\dfrac{\partial H_M}{\partial U_M}=0$,得$U_M(t)=0$.

当$t\in[d,\infty)$时,利用式(10),应用引理1得

$$-k_MU_M(t)+\lambda\mathrm{e}^{-\rho d}p_M(t+d)=0,\tag{11}$$

$$\dot{p}_M(t)=\rho p_M(t)-\alpha\rho_M+\delta \mathrm{e}^{-\rho\tau}p_M(t+\tau). \quad (12)$$

由式(11)知

$$U_M(t)=\max\Big\{\frac{\lambda p_M(t+d)}{k_M\mathrm{e}^{\rho d}},0\Big\}. \quad (13)$$

根据文献[18],设泛函微分方程(12)的通解为

$$p_M(t)=p_{MH}(t)+p_{MP}(t),$$

其中$p_{MH}(t)$和$p_{MP}(t)$分别为方程(12)对应的齐次方程

$$\dot{p}_M(t)=\rho p_M(t)+\delta \mathrm{e}^{-\rho\tau}p_M(t+\tau) \quad (14)$$

的通解和方程(12)的特解. 令齐次方程(14)的通解$p_{MH}(t)=\mathrm{e}^{st}$,将其代入式(14),得

$$(-s\tau+\rho\tau)\mathrm{e}^{-s\tau+\rho\tau}=-\delta\tau.$$

再利用朗伯函数,则

$$s=\rho-\frac{W(-\delta\tau)}{\tau}.$$

因为朗伯函数在实数范围内有$W_0(x)$和$W_{-1}(x)$两支,所以

$$p_{MH}(t)=\mathrm{e}^{\rho t-\frac{W_0(-\delta\tau)}{\tau}t}+\mathrm{e}^{\rho t-\frac{W_{-1}(-\delta\tau)}{\tau}t}.$$

进一步,设方程(12)的特解

$$p_{MP}(t)=A+Bt,$$

其中A和B为常数. 将$p_{MP}(t)$代入方程(12),得$A=\dfrac{\alpha\rho_M}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}}$和$B=0$,因此

$$p_{MP}(t)=\frac{\alpha\rho_M}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}}. \quad (15)$$

综上,有

$$p_M(t)=\frac{\alpha\rho_M}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}}+\mathrm{e}^{\rho t-\frac{W_0(-\delta\tau)}{\tau}t}+\mathrm{e}^{\rho t-\frac{W_{-1}(-\delta\tau)}{\tau}t}.$$

再将$p_M(t)$代入式(13),解得制造商的最优广告投入水平$U_M^N(t)$.

然后,求解零售商的最优广告投入水平. 根据引理1,零售商最优广告投入满足

$$\frac{\partial H_R}{\partial U_R}=\beta\rho_R-k_RU_R=0,$$

因此

$$U_R^N(t)=\frac{\beta\rho_R}{k_R}. \quad \square$$

性质1 制造商和零售商分别采取置后策略和即时策略,延迟时间决定制造商投入广告时刻.

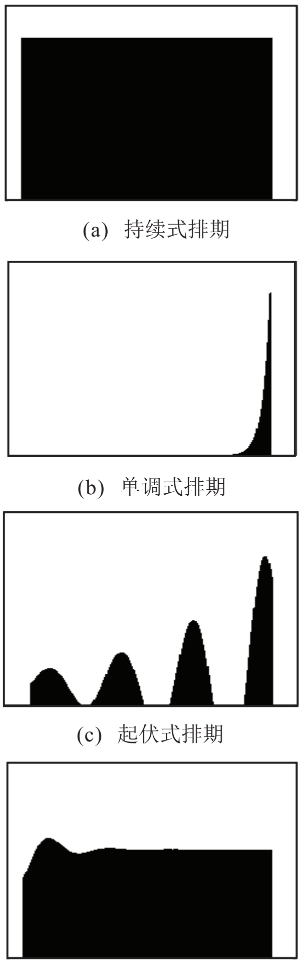
即时策略、置后策略和前置策略统称为广告时序策略,指广告发布时间和产品进入市场时间在先后次序上的排序关系. 性质1说明,延时效应是影响制造商和零售商制定广告时序策略的主要因素. 与此不同的是,当只考虑即时效应时,制造商和零售商广告均采取即时策略,即广告发布和产品进入市场同步[4-7]. 若制造商广告发生延时效应,则其采取置后策略,即产品进入市场后再进行广告投放,此时,制造商可结合市场营销情况对先前拟定的广告策略进行调整,从而避免广告浪费. 而零售商作为产品销售的中间商,直接与消费者接触,其广告不存在延时效应,在广告的吸引下消费者会产生购买行为,进而提升产品销售量,因此零售商更适合采取即时策略.

性质2 零售商广告投入水平是常值,即采取持续式排期. 制造商广告投入水平是时变的,其广告排期依赖于品牌信誉衰减率、广告记忆时间及折现率. 若$\delta\tau<\mathrm{e}^{-1}$,则采取单调式排期;若$\delta\tau>\mathrm{e}^{-1}$且$a-\rho\tau<0$,则采取起伏式排期;若$\delta\tau>\mathrm{e}^{-1}$且$a-\rho\tau>0$,则采取脉冲式排期,其中,$a=\mathrm{Re}(W_0(-\delta\tau))$.

证明 根据式(13)及朗伯函数的性质,当$\delta\tau<\mathrm{e}^{-1}$时,$W_0(-\delta\tau)$和$W_{-1}(-\delta\tau)$均为负实数,且$\rho-\dfrac{W_0(-\delta\tau)}{\tau}$和$\rho-\dfrac{W_{-1}(-\delta\tau)}{\tau}$均为大于零的实数,故$p_{MH}(t)$为齐次方程(14)的非振动解. 进而,$U_M^N(t)$是关于$t$的单调增函数,此时制造商采取单调式排期.

当$\delta\tau>\mathrm{e}^{-1}$时,$W_0(-\delta\tau)$和$W_{-1}(-\delta\tau)$为一对共轭复数,若设$W_0(-\delta\tau)=a+b\mathrm{i}$和$W_{-1}(-\delta\tau)=a-b\mathrm{i}$,则$p_{MH}(t)=2\mathrm{e}^{\rho t-\frac{a}{\tau}t}\cos\Big(\dfrac{b}{\tau}t\Big)$为齐次方程(14)的振动解. 若$a-\rho\tau<0$,则$p_{MH}(t)$呈正负交替且$\lim\limits_{t\to\infty}|p_{MH}(t)|=\infty$. 根据式(15),无论制造商边际利润$\rho_M$高低,其最优的广告投入水平$U_M^N(t)$都是间断的、非持续的,此时制造商采取起伏式排期. 若$a-\rho\tau>0$,则对于任意$t>0$,有$-2<p_{MH}(t)<2$且$\lim\limits_{t\to\infty}p_{MH}(t)=0$. 只要制造商边际利润$\rho_M$不是很低,其最优的广告投入水平$U_M^N(t)$恒大于零,此时制造商采取脉冲式排期. $\square$

广告排期是对广告投入安排的刻画,持续式排期即为持续不变的常值投入,而非常值投入则可根据时变函数的特点分为多种排期. 性质2说明,品牌衰减率和广告记忆时间将影响广告排期的制定. 当不考虑记忆效应时,即模型(1)中$G(t-\tau)$换成$G(t)$,根据定理1的证明过程,可推得制造商广告投入为常值$\dfrac{\alpha\lambda\rho_M}{k_M(\rho+\delta)}$,该结论与文献[6]一致,此时制造商也采取持续式排期(如图1(a)). 不同于即时效应情形,当考虑记忆效应时,制造商的最优广告投入水平是时变的. 若品牌衰减率与广告记忆时间满足$\delta\tau<\mathrm{e}^{-1}$,则采取单调式排期(如图1(b)),即广告投入水平随企业运作时间呈单调递增趋势;若$\delta\tau>\mathrm{e}^{-1}$且$a-\rho\tau<0$,则采取起伏式排期(如图1(c)),即广告期和无广告期交替出现,这种排期比较适合一年中需求波动较大的产品或季节性较强的产品,例如感冒药、服装等;若



(a) 持续式排期

(b) 单调式排期

(c) 起伏式排期

(d) 脉冲式排期

图1　广告排期示意

$\delta\tau > \mathrm{e}^{-1}$ 且 $a - \rho\tau > 0$, 则采取脉冲式排期(如图1(d)), 即在广告持续不间断的基础上根据销售或需求的时间间隔性, 在需求期加大广告投放力度形成有规律的广告排期, 这种排期可以保证即使企业广告投入全年维持在较低的水平也不影响需求期的广告促销效果, 采用这种方式的产品主要有冰箱、空调等. 由于单调式排期下企业广告费用的持续上升会造成利润空间不断下降, 在市场中单调式排期的实用价值不高, 而持续式、起伏式及脉冲式排期是最常见的3种广告排期.

广告排期与广告记忆时间、品牌衰减率和折现率的密切关系可由图2显示(选取折现率为10%). 图2给出了制造商广告排期随参数 δ, τ 所在区域变化的分布图. 需要说明的是, 脉冲式排期对广告记忆时间有限制, 记忆时间太短或太长都不宜采取脉冲式排期.

对于持续式排期的理论研究已经很丰富了[3-9], 而起伏式排期为间隔式排期, 理论上很难计算得到制造商广告间隔的具体区间, 相关分析将在后面通过数值计算进行. 下面, 仅对制造商采取脉冲式排期时

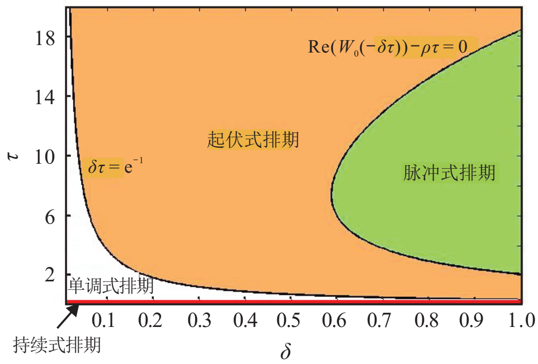


图2　所在区域变化的分布

的广告策略做进一步的理论讨论.

定理2　在分散式决策下, 当制造商采取脉冲式排期时, 产品的最优品牌信誉为

$$G^N(t) = \begin{cases} G_0,\ t \in [0, \tau); \\ x_1^N(t-\tau),\ t \in [\tau, 2d); \\ x_2^N(t-2d),\ t \in [2d, \infty). \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$x_1^N(t) = X(t)G_0 - \delta G_0 \int_{-\tau}^{0} X(t-\tau-s)\mathrm{d}s; \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &x_2^N(t) = \\ &X(t)G^N(2d) - \delta\int_{-\tau}^{0} X(t-\tau-s)\times \\ &G^N(t+2d)\mathrm{d}s + \frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-\rho d}}{k_M}\int_0^t X(t-s)\times \\ &\Big[\frac{\alpha\rho_M}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}} + 2\mathrm{e}^{-\frac{a-\rho\tau}{\tau}(s+2d)}\Big(\cos\frac{b}{\tau}(s+2d)\Big)\Big]\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{18}$$

$$b = \mathrm{lm}(W_0(-\delta\tau));$$

$$X(t) = l(t)\eta(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta(t-k\tau)^k}{k!}\eta(t-k\tau); \tag{19}$$

$$l(t) = \begin{cases} 1,\ t>0; \\ 0,\ t\leqslant 0; \end{cases} \quad \eta(t-m) = \begin{cases} 1,\ t>m; \\ 0,\ t\leqslant m. \end{cases} \tag{20}$$

证明　由定理1, 若制造商采取脉冲式排期, 则其最优广告投入水平为

$$U_M^N(t) = \frac{\lambda\mathrm{e}^{-\rho d}}{k_M}\Big[\frac{\alpha\rho_M}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}} + 2\mathrm{e}^{-\frac{a-\rho\tau}{\tau}(t+d)}\Big(\cos\frac{b}{\tau}(t+d)\Big)\Big].$$

将上式代入动态方程(1)求解, 得到:

当 $t \in [0, \tau)$ 时, $G^N(t) = G_0$;

根据文献[20], 当 $t \in [\tau, 2d)$ 时, 得 $G^N(t) = x_1^N(t-\tau)$, $x_1^N(t)$ 如式(17);

当 $t \in [2d, \infty)$ 时, $G^N(t) = x_2^N(t-2d)$, $x_2^N(t)$ 如

式(18). □

3 集中式决策下广告策略

当制造商和零售商建立了稳定的合作机制,结成战略合作伙伴关系时,双方会以整个供应链利润最大化为决策目标确定合作双方最优广告策略. 类似于定理1和定理2,可以给出如下定理:

定理3 在集中式决策下,制造商和零售商的最优广告投入分别为

$$U_M^C(t)=\begin{cases}0,\ t\in[0,d);\\ \max\Big\{\dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\rho d}}{k_M}\Big[\dfrac{\alpha(\rho_M+\rho_R)}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}}+\\ p_{MH}(t+d)\Big],0\Big\},\ t\in[d,\infty);\end{cases}$$

$$U_R^C(t)=\frac{\beta(\rho_M+\rho_R)}{k_R},\ t\geqslant 0.$$

其中$p_{MH}(t)$如定理1中所示.

定理4 在集中式决策下,当制造商采取脉冲式排期时,产品的最优品牌信誉为

$$G^C(t)=\begin{cases}G_0,\ t\in[0,\tau);\\ x_1^N(t-\tau),\ t\in[\tau,2d);\\ x_2^C(t-2d),\ t\in[2d,\infty).\end{cases}\tag{21}$$

其中

$$x_2^C(t)=$$
$$X(t)G^N(2d)-\delta\int_{-\tau}^{0}X(t-\tau-s)\times$$
$$G^N(t+2d)\mathrm{d}s+\frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-\rho d}}{k_M}\int_0^t X(t-s)\times$$
$$\Big[\frac{\alpha(\rho_M+\rho_R)}{\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau}}+2\mathrm{e}^{-\frac{a-\rho\tau}{\tau}(s+2d)}\cos\frac{b}{\tau}(s+2d)\Big]\mathrm{d}s.$$

性质3 无论制造商和零售商采取哪种广告排期,制造商和零售商的最优广告投入水平均满足$U_M^N(t)\leqslant U_M^C(t)$和$U_R^N(t)<U_R^C(t)$;当制造商广告采取脉冲式排期时,产品的品牌信誉满足$G^N(t)\leqslant G^C(t)$,进而有$S^N(t)<S^C(t)$.

性质3说明:集中式决策能激励制造商和零售商的广告投入;当制造商广告采取脉冲式排期时,集中式决策还可以促进产品品牌信誉的积累和销售量的提升.

当制造商广告采取脉冲式排期时,对整个供应链利润进行比较可以得到如下性质:

性质4 1) 当$\tau<-\dfrac{\ln\rho}{\rho}$时,集中式决策下整个供应链的利润高于分散式决策; 2) 当$\tau>-\dfrac{\ln\rho}{\rho}$时,只有$f(d,\tau)\geqslant 0$成立,供应链成员才会选择集中式决策,否则将选择分散式决策,其中

$$f(d,\tau)=$$
$$\frac{\beta^2\rho_M^2}{2\rho k_R}-\frac{\alpha^2\lambda^2(2\rho_M+\rho_R)\rho_R}{2k_M\rho(\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau})^2}\mathrm{e}^{-3\rho d}+$$
$$\frac{2\lambda^2\alpha\tau\rho_R}{k_M(b^2+a^2)(\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau})}\Big(b\sin\Big(\frac{2bd}{\tau}\Big)-$$
$$a\cos\Big(\frac{2bd}{\tau}\Big)\Big)\mathrm{e}^{-(\frac{2a}{\tau}+\rho)d}+\frac{\alpha^2\lambda^2(\rho_M+\rho_R)\rho_R}{k_M\rho^2(\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau})}\times$$
$$\Big\{1+\delta\frac{\mathrm{e}^{-\rho\tau}}{\rho}\Big(1-\frac{\mathrm{e}^{-\rho\tau}}{\rho}\Big)^{-1}\Big\}\mathrm{e}^{-3\rho d}.$$

证明 将集中式决策和分散式决策下制造商和零售商最优广告投入水平及产品的最优品牌信誉分别代入式(5)~(7),计算两种决策机制下整个供应链的利润差为

$$\Delta J=J_{MR}^C-(J_M^N+J_R^N)=$$
$$\frac{\beta^2\rho_M^2}{2\rho k_R}-\frac{\alpha^2\lambda^2(2\rho_M+\rho_R)\rho_R}{2k_M\rho(\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau})^2}\mathrm{e}^{-3\rho d}+$$
$$\frac{2\lambda^2\alpha\tau\rho_R}{k_M(b^2+a^2)(\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau})}\mathrm{e}^{-(\frac{2a}{\tau}+\rho)d}\times$$
$$\Big(b\sin\Big(\frac{2bd}{\tau}\Big)-a\cos\Big(\frac{2bd}{\tau}\Big)\Big)+$$
$$\frac{\alpha^2\lambda^2(\rho_M+\rho_R)\rho_R}{k_M(\rho+\delta\mathrm{e}^{-\rho\tau})}\mathrm{e}^{-\rho d}\times$$
$$\int_{2d}^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}F(t-2d)\mathrm{d}t,$$

其中$F(t)=\int_0^t X(t-s)\mathrm{d}s$.

注意,当$t\in[k\tau,(k+1)\tau)$时,有

$$F(t)=\int_0^t X(t-s)\mathrm{d}s=$$
$$\begin{cases}t,\ k=0;\\ t+\delta\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{(t-i\tau)^{i+1}}{(i+1)!},\ k\neq 0.\end{cases}$$

所以

$$\int_{2d}^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}F(t-2d)\mathrm{d}t=$$
$$\frac{\mathrm{e}^{-2\rho d}}{\rho^2}\lim_{n\to\infty}\Big\{1+\delta\frac{\mathrm{e}^{-\rho\tau}}{\rho}\Big(1-\frac{\mathrm{e}^{-\rho\tau}}{\rho}\Big)^{-1}\times$$
$$\Big[1-\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\rho\tau}}{\rho}\Big)^n\Big]\Big\}.$$

当$\tau<-\dfrac{\ln\rho}{\rho}$时,有

$$\int_{2d}^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}F(t-2d)\mathrm{d}t=\infty,$$

因此,集中式决策下整个供应链的利润高于分散式决策;而当$\tau>-\dfrac{\ln\rho}{\rho}$时,有

$$\int_{2d}^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}F(t-2d)\mathrm{d}t=$$
$$\frac{\mathrm{e}^{-2\rho d}}{\rho^2}\Big[1+\delta\frac{\mathrm{e}^{-\rho\tau}}{\rho}\Big(1-\frac{\mathrm{e}^{-\rho\tau}}{\rho}\Big)^{-1}\Big],$$

即 $\Delta J = f(d, \tau)$. 因此, 若 $f(d, \tau) \geqslant 0$, 则供应链成员选择集中式决策, 否则将选择分散式决策. □

1987年国家计划委员会发布的《建设项目经济评价参数》(第1版) 将社会折现率规定为10%, 第2版将其改为12%, 2006年以后社会折现率维持在8%. 类似于图2, 可以得到对应于折现率12%和8%时脉冲式排期的记忆时间上限约为13.13和26.75, 而根据性质4可得记忆时间阈值 $-\dfrac{\ln\rho}{\rho}$ 分别为17.67和31.57, 记忆时间上限均小于对应的阈值, 因此, 集中式决策下整个供应链的利润始终高于分散式决策, 从而供应链成员选择集中式决策. 此外, 经比较发现, 随着折现率的增加, 制造商采取脉冲式排期的概率随之降低, 当折现率高于17%时, 明智的制造商必然不采取脉冲式排期.

4　数值分析

本节对分散式决策和集中式决策下产品品牌信誉进行数值分析, 以验证上述理论结果. 设模型中各参数如下: 折现率 $\rho = 0.1$, 边际利润 $\rho_M = 2$ 和 $\rho_R = 5$; 模型中影响因子分别为 $\alpha = 1, \beta = 3, \lambda = 1, k_M = 3, k_R = 1$; 品牌信誉初值 $G_0 = 10$, 延迟时间 $d = 20$. 选取如下3组品牌衰减率和记忆时间:

1) $\delta = 0.2, \tau = 0$;

2) $\delta = 0.65, \tau = 19$;

3) $\delta = 0.65, \tau = 10$.

当制造商广告分别采取持续式、起伏式及脉冲式排期时, 两种决策机制下产品品牌信誉计算结果如图3所示.

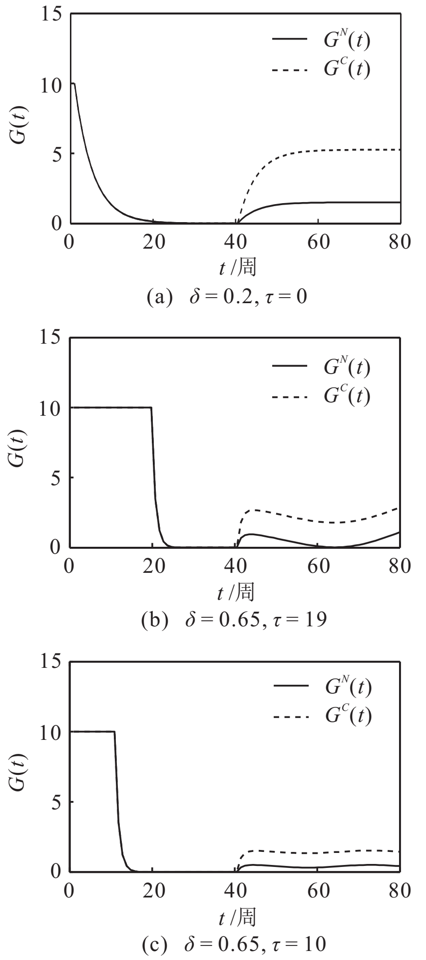


图3　两种决策机制下产品品牌信誉比较

图3中实线和虚线分别表示分散式决策和集中式决策下产品品牌信誉. 由图3可知, 无论制造商广告采取哪种排期, 分散式决策下各个时刻品牌信誉值均不高于集中式决策, 这说明集中式决策更有利于产品品牌信誉的积累. 由于促销前期制造商广告投入对产品品牌信誉未产生影响, 产品品牌信誉的变化过程仅依赖于品牌衰减率和记忆时间等, 一段时间内两种决策机制下产品品牌信誉是相同的. 此数值分析不仅验证了持续式排期及脉冲式排期的理论结果, 还说明对于起伏式排期此结论仍然成立.

5　结　论

本文利用微分对策研究当产品品牌信誉受延时和记忆双重效应影响时的广告策略问题, 建立了考虑延时效应和记忆效应的动态广告模型, 给出了制造商和零售商在分散式决策和集中式决策下最优广告投入、产品品牌信誉以及制造商广告排期选择等. 具体结论如下:

1) 延时效应是影响供应链成员制定广告时序策略的主要因素;

2) 记忆时间和品牌衰减率是制造商制定广告排期策略的决定因素;

3) 若折现率不高于17%, 只要制造商采取脉冲式排期, 则供应链成员选择集中式决策.

本文建立的品牌信誉动态模型未考虑零售商广告的影响, 因此, 可从以下两个方面深入考虑延时效应和记忆效应的问题:

1) 在产品品牌信誉受制造商和零售商广告的双重影响下, 考虑两种形式广告均发生延时效应和记忆效应的供应链动态广告问题;

2) 将考虑延时和记忆双重效应的供应链广告策略问题推广到随机情形.

参考文献(References)

[1] 中华广告网. 1195家上市公司2013年广告花费603.85亿元[EB/OL]. [2014-05-08]. http://www.a.com.cn/info/domestic/2014/0508/271426.html.
(Chinese Advertising Network. The total advertising costs of 1195 listed companies are 60.385 billion yuan in 2013[EB/OL]. [2014-05-08]. http://www.a.com.

cn/info/domestic/2014/0508/271426.html.)

[2] Nerlove M, Arrow K J. Optimal advertising policy under dynamic conditions[J]. Economica, 1962, 29(114): 129-142.

[3] Jϕrgensen S, Taboubi S, Zaccour G. Cooperative advertising in a marketing channel[J]. J of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(1): 145-158.

[4] 张庶萍, 张世英. 基于微分对策的供应链合作广告决策研究[J]. 控制与决策, 2006, 21(2): 153-157.
(Zhang S P, Zhang S Y. Dynamic cooperative advertising strategies based on differential games in a supply chain[J]. Control and Decision, 2006，21(2): 153-157.)

[5] 张智勇, 李华娟, 杨磊, 等. 基于微分博弈的双渠道广告合作协调策略研究[J]. 控制与决策, 2014, 29(5): 873-879.
(Zhang Z Y, Li H J, Yang L, et al. Dual-channel coordination strategies on advertising cooperation based on differential game[J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 873-879.)

[6] He Y, Gou Q L, Wu C X. Cooperative advertising in a supply chain with horizontal competition[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 2013: 1-16.

[7] Zhou M Y, Lin J. Optimal advertising model in a dynamic marketing with competing brands[J]. Int J of Manufacturing Technology and Management, 2015, 29(1/2): 116-137.

[8] Zhang J, Gou Q, Liang L, et al. Supply chain coordination through cooperative advertising with reference price effect[J]. Omega, 2013, 41(2): 345-353.

[9] 陈东彦, 于浍. 供应链动态合作广告策略[J]. 控制与决策, 2016, 31(4): 759-763.
(Chen D Y, Yu H. Dynamic cooperative advertising strategies for supply chain[J]. Control and Decsion, 2016, 31(4): 759-763.)

[10] 徐春秋, 赵道致, 原白云, 等. 上下游联合减排与低碳宣传的微分博弈模型[J]. 管理科学学报, 2016, 19(2): 53-65.
(Xu C Q, Zhao D Z, Yuan B Y, et al. Differential game model on joint carbon emission reduction and low-carbon promotion in supply chains[J]. J of Management Sciences in China, 2016, 19(2): 53-65.)

[11] Berkowitz D, Allaway A, D'Souza G. Estimating differential lag effects for multiple media across multiple stores[J]. J of Advertising, 2001, 30(4): 59-65.

[12] Baack D W, Wilson R T, Till B D. Creativity and memory effects: Recall, recognition, and an exploration of nontraditional media[J]. J of Advertising, 2008, 37(4): 85-94.

[13] Leone R P. Genetallizing what is known about temporal aggregation and advertising carryover[J]. Marketing Science, 1995, 14(3): 141-150.

[14] Wansink B, Ray M L. Goal-related consumption and extension advertising: The impact on memory and consumption[J]. Advances in Consumer Research, 1992, 19(1): 806-812.

[15] Hartl R F, Sethi S P. Optimal control of a class of systems with continuous lags: Dynamic programming approach and economic interpretations[J]. J of Optimization Theory and Applications, 1984, 43(1): 73-88.

[16] Gozzi F, Marinelli C. Stochastic optimal control of delay equations arising in advertising models[J]. Stochastic Partial Differential Equations & Applications — vii, 2006, 245: 133-148.

[17] Gozzi F, Marinelli C, Savin S. On controlled linear diffusions with delay in a model of optimal advertising under uncertainty with memory effects[J]. J of Optimization Theory and Applications, 2009, 142(2): 291-321.

[18] Aravindakshan A, Naik P A. Understanding the memory effects in pulsing advertising[J]. Operations Research, 2015, 61(1): 35-47.

[19] Chen L, Yu Z Y. Maximum principle for nonzero-sum stochastic differential game with delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2015, 60(5): 1422-1426.

[20] 郑祖庥. 泛函微分方程[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1992: 84-92.
(Zheng Z X. Theory of functional differential equations[M]. Hefei: Anhui Education Press, 1992: 84-92.)

（责任编辑：李君玲）