文章编号: 1001-0920(2019)03-0637-05　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1216

改进的含时间幂次项灰色模型及建模机理

吴紫恒[1,2†], 吴仲城[1], 李　芳[1], 冯　东[1,2]

(1. 中国科学院合肥物质科学研究院 强磁场科学中心，合肥 230000；
2. 中国科学技术大学 研究生院科学岛分院，合肥 230000)

摘　要: 为提高灰色预测模型的预测精度,针对传统含时间幂次项灰色预测模型的局限性,根据实际应用的需要,提出一种改进的含时间幂次项灰色模型 $\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$. 对该模型的建模机理、参数估计等进行研究,通过积分变换,得到与该模型白化方程相匹配的灰色微分方程,并给出模型参数的最小二乘解和时间响应式. 讨论幂次项指数几种特殊取值下该模型的性质和适用范围,以误差平方和最小为目标,对 $\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$ 模型的初始点进行优化,给出相应的优化公式. 研究表明, GM(1, 1) 和 NGM(1, 1, k) 模型均是 $\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$ 模型的特殊形式,因此,该模型拓展了灰色预测理论的体系,扩大了灰色预测理论的应用范围. 最后通过实验表明,所提出的改进含时间幂次项灰色预测模型具有更好的拟合和预测精度,从而验证了其有效性和实用性.

关键词: 灰色预测模型；时间幂次项；$\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$；建模机理；积分变换；初始点

中图分类号: N941.5　　**文献标志码:** A

Improved grey forecasting model with time power and its modeling mechanism

WU Zi-heng[1,2†], *WU Zhong-cheng*[1], *LI Fang*[1], *FENG Dong*[1,2]

(1. High Magnetic Field Laboratory，Hefei Institutes of Phsical Science，Chinese Academy of Sciences，Hefei 230000，China；2. Science Island Branch of Graduate School，University of Science and Technology of China，Hefei 230000，China)

Abstract: To improve the forecasting accuracy of grey forecasting model, in view of limitation of the traditional grey forecasting model with time power, this paper proposed an improved grey forecasting model $\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$ with time power according to the practical application need. The modeling mechanism is studied, the grey differential equation which matches the winterization equation is obtained by integral transformation, and the model parameters least-square solutions and the time response function are given. The initial point of $\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$ is optimized with the minimum of the square sum of the error as the target. Researches show that GM(1, 1) and NGM(1, 1, k) are special forms of $\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$ which broadens the application fields of the grey forecationg model. Finally, experiment results show that the improved model has more approximating and forecasting accuracy, which demonstrates its effectiveness and applicability.

Keywords: grey forecasting model；time power；$\mathrm{NGM}(1,1,t^{\gamma})$；modeling mechanism；integral transformation；initial point

0　引　言

灰色预测模型作为灰色系统理论的重要组成部分,因其建模过程简单、所需样本少等优点,目前,已成功地应用于工业、科技、农业等领域[1-3]. GM(1, 1) 模型是灰色预测模型的经典形式,如今已成为应用最为广泛的灰色预测模型. 然而,传统的 GM(1, 1) 模型存在诸多缺陷,人们对此进行了研究改进,大致可分为以下几类: 灰导数白化值的改进[4-5];初始条件的改进[6];背景值构造方法的改进[7-8] 等.

上述研究成果促进了 GM 系列模型的日趋完善,然而,在实际应用中,由于 GM(1, 1) 模型适用数据序列类型的局限性,随着各类系统不断涌现出新特性、

收稿日期: 2017-09-15；**修回日期:** 2017-11-30.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (61273323).
责任编委: 柴利.
作者简介: 吴紫恒 (1988−), 男, 博士生, 从事机器学习的研究；吴仲城 (1968−), 男, 教授，博士生导师, 从事人机自然交互等研究.
†通讯作者. E-mail: ziheng88@mail.ustc.edu.cn.

新问题,需要对灰色预测模型进行拓展研究. 文献[9]构建了一种基于分数阶累加方法的灰色预测模型; 文献[10]提出了一类可以较好描述具有部分指数并含时间幂形式系统过程的含时间幂次项灰色预测模型; 文献[11]通过对具有近似非齐次指数律特征的数据序列进行研究,提出了一种改进的灰色预测模型NGM(1,1,k); 文献[12]利用模式搜索法对GM(2,1)模型的参数求解进行了优化改进; 文献[13]对小样本振荡序列建模和预测问题进行研究,构建了一种含有时变参数和系统延迟的振荡型GM(1,1)幂模型; 文献[14]认为传统灰色NGM(1,1,k)模型的参数估计误差是导致该模型精度不稳定的重要因素,构建了一种基于背景值优化的改进NGM(1,1,k)模型; 文献[15]针对灰色预测模型拟合非齐次指数序列时的误差,从灰导数和背景值两个角度分别优化,提出了NGM(1,1,k)的两类无偏基本形式.

现实社会中存在着许多发展过程为孕育、匀速变化、加速变化3个阶段到另一个平衡状态的系统,人们不能简单地应用指数规律来刻画此类系统的内在发展规律,因此,需要构建能反映其本质特征的新模型. 本文通过对具有部分指数并含时间幂函数项序列进行研究,在分析现有含时间幂次项灰色模型局限性的基础上,提出一种新的含时间幂次项灰色模型,并研究该模型的建模机理,以期能够进一步拓展灰色预测模型体系.

1 改进的含时间幂次项灰色模型的构建

首先,给出文献[10]提出的模型,并分析该模型的不足.

定义1 设$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$为$X^{(0)}$的一阶累加生成序列,其中$x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{n}x^{(0)}(k),k=1,2,\cdots,n$. 称$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n))$为$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列,其中$z^{(1)}(k)=\dfrac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)),k=2,3,\cdots,n$. 则称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=bk^{\gamma}+c$$

为GM(1,1,t^{γ})的基本形式[10];称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=bt^{\gamma}+c$$

为GM(1,1,t^{γ})的白化方程.

当$\gamma=2$时,定义1中的模型GM(1,1,t^{γ})适用于近似$x^{(0)}(k)=g\mathrm{e}^{ak}+pk+q(k=1,2,\cdots,n)$规律的序列建模[10]. 根据$x^{(0)}(k)$的表达式,可以得到它的累加和$x^{(1)}(k)=\sum\limits_{i=1}^{n}x^{(0)}(k)$,有

$$\begin{aligned}&x^{(1)}(k)=\\&(g\mathrm{e}^{a}+p+q)+\cdots+(g\mathrm{e}^{ka}+kp+q)=\\&g(\mathrm{e}^{a}+\cdots+(\mathrm{e}^{a})^{k})+p(1+\cdots+k)+kq=\\&g\frac{\mathrm{e}^{a}}{1-\mathrm{e}^{a}}(1-\mathrm{e}^{ak})+\frac{k(1+k)}{2}p+kq,\end{aligned}$$

即可以得到$x^{(1)}(k)$的表示形式

$$x^{(1)}(k)=A\mathrm{e}^{Bk}+Ck^{2}+Dk+E.$$

将其代入定义1给出的白化方程,可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=\\&AB\mathrm{e}^{Bk}+2Ck+D+a(Ae^{Bk}+Ck^{2}+Dk+E)=\\&(AB+Aa)\mathrm{e}^{Bk}+aCk^{2}+(aD+2C)k+D+aE.\end{aligned}$$

可以发现$aD+2C$并不一定恒为0,而定义1中模型只是在$aD+2C$为0的情况下才适用,因此,定义1中的模型并不具有一般性.

同理,当γ取其他值时,定义1中模型同样存在局限性,为此,本文给出一个具有一般性的模型.

定义2 若$\hat{a}=[a,b_0,b_1,\cdots,b_{\gamma}]$为参数列,则称

$$\begin{aligned}&x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=\\&b_0\frac{k^{\gamma+1}-(k-1)^{\gamma+1}}{\gamma+1}+\cdots+b_{\gamma-1}\Big(k-\frac{1}{2}\Big)+b_{\gamma}\end{aligned}\tag{1}$$

为本文所提出的NGM(1,1,t^{γ})的基本形式. 将一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=[b_0,b_1,\cdots,b_{\gamma}]\begin{bmatrix}t^{\gamma}\\t^{\gamma-1}\\\vdots\\1\end{bmatrix}\tag{2}$$

称为NGM(1,1,t^{γ})的白化方程.

对式(2)在区间$[k-1,k](k=2,3,\cdots,n)$取定积分,可得

$$\begin{aligned}&\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+a\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t=\\&\int_{k-1}^{k}(b_0t^{\gamma}+\cdots+b_{\gamma})\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=\\&b_0\frac{k^{\gamma+1}-(k-1)^{\gamma+1}}{\gamma+1}+\cdots+b_{\gamma-1}\Big(k-\frac{1}{2}\Big)+b_{\gamma}.\end{aligned}$$

定理1 设$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, $x^{(1)}(n)$为$X^{(0)}$的一阶累加生成序列,$z^{(1)}(n)$为$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列. 若$\hat{a}=[a,b_0,b_1,\cdots,b_{\gamma}]$为参数列,且

$$Y=[\ x^{(0)}(2)\ \ x^{(0)}(3)\ \cdots\ x^{(0)}(n)\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & \dfrac{2^{\gamma+1}-1}{\gamma+1} & \cdots & 1 \\ -z^{(1)}(3) & \dfrac{3^{\gamma+1}-2^{\gamma+1}}{\gamma+1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & \dfrac{n^{\gamma+1}-(n-1)^{\gamma+1}}{\gamma+1} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

则NGM$(1,1,t^\gamma)$模型的最小二乘估计参数满足

$$\hat{a} = [a, b_0, b_1, \cdots, b_\gamma] = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$

定理2 $\dfrac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)} = [b_0, b_1, \cdots, b_\gamma]\begin{bmatrix} t^\gamma \\ t^{\gamma-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \\ \mathrm{e}^{-at}\Big(\int(b_0t^\gamma + b_1t^{\gamma-1} + \cdots + 1)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t + C\Big).$$

2 NGM$(1,1,t^\gamma)$模型的性质

定理3 当$\gamma = 0$时,NGM$(1,1,t^\gamma)$模型变为$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b_0$,即退化为GM(1,1)模型.

定理4 当$\gamma = 1$时,NGM$(1,1,t^\gamma)$模型变为$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b_0(k-1/2) + b_1$,即退化为NGM$(1,1,k)$模型. 此处不再赘述.

定理5 当$\gamma = 2$时,NGM$(1,1,t^\gamma)$模型变为NGM$(1,1,t^2)$模型. 称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = \\ b_0\Big(k^2 - k + \frac{1}{3}\Big) + b_1\Big(k - \frac{1}{2}\Big) + b_2 \tag{3}$$

为NGM$(1,1,t^2)$的基本形式,其白化方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)} = b_0t^2 + b_1t + b_2. \tag{4}$$

若$\hat{a} = [a, b_0, b_1, b_2]$为参数列,且

$$Y = [\,x^{(0)}(2)\ \ x^{(0)}(3)\ \ \cdots\ \ x^{(0)}(n)\,]^{\mathrm{T}},$$

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & \dfrac{7}{3} & \dfrac{3}{2} & 1 \\ -z^{(1)}(3) & \dfrac{9}{3} & \dfrac{5}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n^2 - n + \dfrac{1}{3} & n - \dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

则 $\hat{a} = [a, b_0, b_1, b_2] = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$.

1) NGM$(1,1,t^2)$的白化方程(4)的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = C\mathrm{e}^{-at} + \frac{b_0}{a}k^2 + \frac{b_1}{a}k - \frac{2b_0}{a^2}k + \\ \frac{2b_0}{a^3} - \frac{b_1}{a^2} + \frac{b_2}{a}.$$

在上式中令

$$D = \frac{b_0}{a},\ E = \frac{b_1}{a} - \frac{2b_0}{a^2},\ F = \frac{2b_0}{a^3} - \frac{b_1}{a^2} + \frac{b_2}{a},$$

则可以得到NGM$(1,1,t^2)$模型$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b_0\Big(k^2 - k + \dfrac{1}{3}\Big) + b_1\Big(k - \dfrac{1}{2}\Big) + b_2$的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = C\mathrm{e}^{-a(k-1)} + Dk^2 + Ek + F.$$

2) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(1) = C\mathrm{e}^{-a} + D + E + F,\ k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1),\ k = 2, 3, \cdots, n. \end{cases}$$

定理6 在定理5中,NGM$(1,1,t^2)$模型的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = C\mathrm{e}^{-a(k-1)} + Dk^2 + Ek + F.$$

其中: D、E、F为确定参数,C为待求参数. 则该时间响应函数的最优常数C^*为

$$C^* = \frac{\mathrm{e}^{-a}(x^{(0)}(1) - D - E - F)}{\mathrm{e}^{-2a} + (1-\mathrm{e}^a)^2\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{e}^{-2ak}} + \\ \frac{(1-\mathrm{e}^a)\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{e}^{-ak}[x^{(0)}(k) - (2k-1)D - E]}{\mathrm{e}^{-2a} + (1-\mathrm{e}^a)^2\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{e}^{-2ak}}.$$

证明 考虑还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(1) = C\mathrm{e}^{-a} + D + E + F,\ k = 1; \\ \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1),\ k = 2, 3, \cdots, n. \end{cases}$$

构造误差平方和函数

$$f(C) = \\ (\hat{x}^{(0)}(1) - x^{(0)}(1))^2 + \sum_{k=2}^{n}(\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k))^2 = \\ [C\mathrm{e}^{-a} + D + E + F - x^{(0)}(1)]^2 + \\ \sum_{k=2}^{n}[C\mathrm{e}^{-ak} + (2k-1)D + E - x^{(0)}(1)]^2.$$

为了求解该误差平方和的最小值,令$f'(C) = 0$,可得该时间响应函数的最优常数为

$$C^* = \frac{\mathrm{e}^{-a}(x^{(0)}(1) - D - E - F)}{\mathrm{e}^{-2a} + (1-\mathrm{e}^a)^2\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{e}^{-2ak}} + \\ \frac{(1-\mathrm{e}^a)\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{e}^{-ak}[x^{(0)}(k) - (2k-1)D - E]}{\mathrm{e}^{-2a} + (1-\mathrm{e}^a)^2\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{e}^{-2ak}}.$$

于是定理得证. □

由此可得NGM$(1,1,t^2)$模型的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = C^*\mathrm{e}^{-a(k-1)} + Dk^2 + Ek + F.$$

推论1 由定理4可知,当$\gamma = 1$时,NGM$(1,1,t^{\gamma})$模型适用于任意具有近似$x^{(0)}(k) \approx g\mathrm{e}^{ak} + q$规律的序列建模.

推论2 由定理5可知,当$\gamma = 2$时,NGM$(1,1,t^{\gamma})$模型适用于任意具有近似$x^{(0)}(k) \approx g\mathrm{e}^{ak} + pk + q$规律的序列建模.

本文中当γ取其他值时的情况,此处不一一讨论,在实际应用中,可以利用智能算法对γ的取值进行寻优.

3 算例分析

3.1 实验1

选取某沿海高速路某观测点软土地基沉降观测值数据[10]进行建模分析,原始数据为$(3.3, 5.6, 7.9, 10.3, 14.5, 18.1, 23.8, 28.6)$. 利用前6项数据为原始序列,分别采用GM(1,1)、GM$(1,1,t^2)$和NGM$(1,1,t^2)$建模,可以得到NGM$(1,1,t^2)$模型还原式为$\hat{x}^{(0)}(k+1) = 59.21\mathrm{e}^{-0.1537k} + 8.2k - 54.299, k = 1,2,\cdots,n$. 实验结果如表1所示.

由表1可以看出: GM$(1,1,t^2)$模型的最大相对误差为4.28%, GM(1,1)模型的最大相对误差为15.69%, 而本文NGM$(1,1,t^2)$模型的最大相对误差为2.92%; 本文模型的平均误差为1.74%, 低于GM$(1,1,t^2)$模型的平均误差2.28%和GM(1,1)模型的平均误差5.50%. 本文模型的精度高于GM$(1,1,t^2)$模型的原因是,本文模型能对任意具有近似$x^{(0)}(k) \approx g\mathrm{e}^{ak} + pk + q$规律的序列建模,有效克服了GM$(1,1,t^2)$模型的局限性. 因此,本文提出的NGM$(1,1,t^2)$模型具有更广的适用范围和应用空间.

表1 几种模型建模比较

实际值	GM(1,1)模型		本文模型		文献[10]模型	
	模拟、预测值	相对误差/%	模拟、预测值	相对误差/%	模拟、预测值	相对误差/%
3.30	3.30	0	3.32	0.57	3.31	0.30
5.60	6.48	15.69	5.68	1.49	5.40	3.59
7.90	8.35	5.65	7.70	2.52	7.83	0.93
10.30	10.75	4.39	10.60	2.92	10.65	3.41
14.50	13.85	4.47	14.25	1.66	15.12	4.28
18.10	17.85	1.41	18.56	2.57	18.04	0.31
23.80	22.99	3.40	23.43	1.54	23.01	3.34
28.60	29.62	3.56	28.77	0.61	29.18	2.04
平均误差/%		5.50		1.71		2.28

3.2 实验2

选取文献[12]中的地基沉降数据进行建模分析,原始数据为$(23.36, 43.19, 58.73, 70.87, 83.71, 92.91, 99.73, 105.08, 109.73, 112.19, 113.45)$. 利用前10个数据进行建模,分别采用传统GM(1,1)、文献[12]中模型、本文提出的NGM$(1,1,t^2)$模型进行建模分析. 实验结果如表2所示.

由表2可以看出: GM(1,1)模型的最大相对误差

表2 几种模型建模对比

实际值	GM(1,1)模型		本文模型		文献[12]模型	
	模拟、预测值	相对误差/%	模拟、预测值	相对误差/%	模拟、预测值	相对误差/%
23.36	23.36	0	23.37	0.06	23.71	1.59
43.19	58.15	34.65	43.15	0.07	42.16	2.39
58.73	63.81	8.66	58.64	0.14	58.61	0.21
70.87	70.02	1.18	71.92	0.68	72.39	2.14
83.71	76.84	8.20	83.13	0.54	83.57	0.16
92.91	84.31	9.24	92.39	0.10	92.5	0.44
99.73	92.52	7.22	99.83	0.44	99.55	0.9
105.08	101.52	3.38	105.54	0.08	105.08	0.00
109.73	111.40	1.52	112.21	0.02	109.41	0.29
112.19	122.24	8.96	113.35	0.08	112.79	0.53
113.45	134.14	18.23	113.16	0.25	115.43	1.75
平均误差/%		9.20		0.22		0.95

为34.65 %, 文献[12]模型的最大相对误差为2.39 %, 而本文模型的最大相对误差为0.68 %; 本文模型的平均误差为0.22 %, 低于文献[12]模型的平均误差0.95 %和GM(1, 1)模型的平均误差9.20 %; 本文模型的预测误差为0.25 %, 低于文献[12]模型的预测误差1.75 %和GM(1, 1)模型的预测误差18.23 %. 由此可知, 本文所提出的模型对于地基沉降数据在拟合与预测精度上优于GM(1, 1)和文献[12]模型. 本文模型精度较高的原因是, 该地基沉降数据序列呈现匀速–加速–稳定的变化趋势, 与本文NGM$(1, 1, t^2)$模型的序列特征相符合.

4 结 论

本文针对传统含时间幂次项灰色模型的局限性, 提出了一种改进的含时间幂次项灰色模型NGM$(1, 1, t^\gamma)$. 对该模型的建模机理进行了研究, 通过积分变换, 得到了与该模型白化方程相匹配的灰色微分方程, 并讨论了幂次项指数几种特殊取值下该模型的性质和适用范围. 经讨论发现, GM(1, 1)和NGM(1, 1, k)模型均是NGM$(1, 1, t^\gamma)$模型的特殊形式, 因此, 该模型拓展了灰色预测理论的应用范围. 最后, 对NGM$(1, 1, t^2)$模型初始点进行优化并通过算例验证了本文所提出模型的有效性和实用性.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 23-25.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science Technology, 2002: 23-25.)

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第3版. 北京: 科学出版社, 2004: 1-8.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M] . 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004: 1-8.)

[3] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 修订版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 1-10.
(Deng J L. Grey prediction and grey decision[M]. Revised ed. Wuhan: Press of Huazhong University of Science Technology, 2002: 1-10.)

[4] 王义闹, 刘开第, 李应川. 优化灰导数白化值的GM(1, 1)建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124-128.
(Wang Y N, Liu K D, Li Y C. GM(1, 1) modeling method of optimum the whiting values of grey derivative[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2001, 21(5): 124-128.)

[5] 李玻, 魏勇. 优化灰导数后的新GM(1, 1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(2): 100-106.
(Li B, Wei Y. Optimizes grey derivative of GM(1, 1)[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2009, 29(2): 100-106.)

[6] Wang Y H, Dang Y G, Li Y Q, et al. An approach to increase prediction precision of GM(1, 1) model based on optimization of the initial conditiun[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(8): 5640-5644.

[7] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型GM(1, 1)优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Chinese Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[8] Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Optimization of background value in GM(1, 1) model[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2008, 28(2): 61-67.

[9] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.

[10] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2247-2252.
(Qian W Y, Dang Y G, Liu S F. Grey model with time power and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2012, 32(10): 2247-2252.)

[11] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1702-1706.)

[12] 牛欣欣. 软土地基沉降预测的GM(2,1)模型分析和改进[J]. 安全与环境工程, 2014, 21(2): 139-142.
(Niu X X. Analysis and improvement of GM(2,1) model for the prediction of soft foundation settlement[J]. Safety and Environment Engineering, 2014, 21(2): 139-142.)

[13] 王正新. 振荡型GM(1, 1)幂模型及其应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(10): 1459-1472.
(Wang Z X. Oscillating GM(1, 1) power model and its application[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1459- 1472.)

[14] 童明宇, 周孝华, 曾波. 灰色NGM(1, 1, k)模型背景值优化方法[J].控制与决策, 2017, 32(3): 507-514.
(Tong M Y, Zhou X H, Zeng B. Optimization of background value in grey NGM(1, 1, k)model[J]. Control and Decision, 2017, 32(3): 507-514.)

[15] 党耀国, 刘震, 叶璟. 无偏非齐次灰色预测模型的直接建模法[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 823-828.
(Dang Y G, Liu Z, Ye J. Direct modeling method of unbiased non-homogeneous grey prediction model[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 823-828.)

(责任编辑: 李君玲)