

基于有限时间的一类时滞非线性切换系统滑模控制

何舒平[†], 艾琦琰

(1. 安徽大学 电气工程与自动化学院, 合肥 230601; 2. 安徽大学
计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230601)

摘要: 研究一类时滞非线性切换系统的有限时间滑模控制问题. 针对所研究的系统模型, 构造每个子系统对应的积分滑模面, 基于滑模控制理论, 设计带有状态时滞的滑模控制器使得每个子系统能在有限时间内到达相应的滑模面上, 并对系统中存在的非线性项采用 Lipschitz 条件进行处理. 根据多李亚普诺夫函数、平均驻留时间方法以及分割策略引理, 给出滑模趋近段和滑模动态有限时间有界的充分条件, 并通过对线性矩阵不等式的求解得到控制器增益. 最后, 通过一个数值仿真例子验证该设计方法的有效性.

关键词: 切换系统; Lipschitz 非线性; 有限时间有界; 滑模控制; 平均滞留时间; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite-time sliding mode control for a class of nonlinear and time-delayed switched systems

HE Shu-ping[†], AI Qi-long

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei 230601, China; 2. Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing of Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: This paper investigates the problems of finite-time sliding mode control for a class of nonlinear switched systems with time-delays. For the studied system model, the corresponding integral sliding mode surface of each subsystem is constructed. Based on the sliding mode control theory, a sliding mode controller is designed to make every subsystems state be driven onto the relevant sliding mode surface within a given time-interval. And the Lipschitz conditions are used to deal with the nonlinearities in the system. By means of the multiple Lyapunov functions technique, average dwell time approach and partitioning strategy, sufficient conditions are proposed to guarantee the finite-time boundedness of the corresponding sliding mode dynamic systems, and the controller gains is obtained by solving the linear matrix inequalities. Finally, a simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Keywords: switched systems; Lipschitz nonlinear; finite-time boundedness; sliding mode control; average dwell time; linear matrix inequalities.

0 引言

切换系统被称为一类特殊类型的混杂系统, 它被广泛应用于传输系统、网络控制系统和通信工业中. 切换系统可以由有限个子系统和协调这些子系统的切换信号组成. 近年来, 结合多李亚普诺夫函数和平均停留时间方法, 研究者们深入研究了切换系统的稳定性问题, 并取得了一些有价值的结果^[1-2]. 同时, 考虑到系统建模过程中存在的时滞和非线性特性^[3-4], 研究者们进一步研究了切换系统的鲁棒性和

控制器设计问题^[5-7].

作为一种鲁棒控制方法, 滑模控制方法一直是学术界的研究热点. 滑模控制可以处理系统建模过程中的不确定参数和外部干扰的不敏感性^[8-9]. 近年来, 滑模控制方法也被应用到切换系统领域^[10-12]. 需要指明的是, 针对切换系统设计的滑模控制器主要是基于无限时间区间的, 这对工业过程中的暂态性, 或者短时间控制问题, 并不奏效.

针对短时间控制问题, Dorato^[13]做了许多开创

收稿日期: 2017-09-27; 修回日期: 2018-01-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61673001, 61203051); 安徽省杰出青年基金项目(1608085J05); 安徽省高校优秀青年人才支持重点项目(gxydZD201701).

责任编委: 牛玉刚.

作者简介: 何舒平(1983—), 教授, 博士, 从事随机系统控制、系统建模等研究; 艾琦琰(1994—), 男, 硕士, 从事切换系统、有限时间控制的研究.

[†]通讯作者. E-mail: shuping.he@ahu.edu.cn.

性的工作.同时,有限时间稳定、有界、镇定、控制等问题也得到了研究人员的广泛研究,并取得了较好的成果^[14-18].近年来,有限时间稳定、有界和镇定等概念也扩展到滑模控制的研究中^[19-22].如文献[20]中,基于观测器方法研究马尔可夫跳变系统的有限时间滑模控制问题.需要指出的是,基于平均驻留时间的非线性时滞切换系统的有限时间滑模控制存在的问题并没有得到根本解决.

本文针对一类具有时滞和非线性参数的切换系统,研究其有限时间滑模控制问题.基于有限时间有界和滑模控制理论,设计带有状态时滞的滑模控制器,以确保每个子系统状态的轨迹在规定的时间内能够被驱使到相关的滑模面上.通过应用多李亚普诺夫函数和平均驻留时间方法,给出使得滑模趋近段和滑模动态系统是有限时间有界的充分条件.最后,通过仿真算例验证了本文设计方法的可行性.

1 系统描述

考虑如下一类时滞非线性切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + A_{d\sigma(t)}x(t-\tau) + B_{\sigma(t)}u(t) + \\ F_{\sigma(t)}f_{\sigma(t)}(x(t), x(t-\tau)) + H_{\sigma(t)}\omega(t); \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $x(t-\tau) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的时滞向量, $u(t) \in \mathbf{R}^p$ 是系统控制输入, $\omega(t) \in \mathbf{R}^q$ 是具有能量有界的外部干扰, 即 $\omega(t) \in \ell_2[0, \infty)$; $f_{\sigma(t)}(x(t), x(t-\tau))$ 是系统建模过程中的非线性函数; $\phi(t)$ 是系统的初始状态; $A_{\sigma(t)}, A_{d\sigma(t)}, B_{\sigma(t)}, F_{\sigma(t)}, H_{\sigma(t)}$ 是具有适当维数的常系数矩阵, $\sigma(t): [0, T_f] \rightarrow \mathbf{I} = \{1, 2, \dots, M\}$ 是系统的切换信号, M 是子系统的个数. 切换信号 $\sigma(t)$ 具有如下切换序列:

$$\{(t_0, \sigma(t_0)), (t_1, \sigma(t_1)), \dots, (t_k, \sigma(t_k))\},$$

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 第 $\sigma(t_k)$ 子系统被激活. 假设 $\sigma(t) = i, i \in \mathbf{I}$, 则矩阵 $A_{\sigma(t)}, A_{d\sigma(t)}, B_{\sigma(t)}, F_{\sigma(t)}, H_{\sigma(t)}, K_{1\sigma(t)}, K_{2\sigma(t)}$ 可表示为 $A_i, A_{di}, B_i, F_i, H_i, K_{1i}, K_{2i}$.

假设1 在本文中, 考虑在时间范围 $[t_1, t_2]$ 内的扰动信号满足如下不等式:

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^T(t)\omega(t)dt \leq h, h \geq 0. \quad (2)$$

假设2 系统状态 $x(t)$ 在切换时刻不发生跳变, 这意味着系统状态轨迹 $x(t)$ 是连续的.

假设3 对于 $\forall i \in \mathbf{I}$, 非线性函数 $f_i(x(t), x(t-\tau))$ 满足如下条件:

$$\|f_i(x(t), x(t-\tau))\| \leq$$

$$\|U_{1i}x(t)\| + \|U_{2i}x(t-\tau)\|, \quad (3)$$

其中 U_{1i} 和 U_{2i} 是已知的 Lipschitz 常系数矩阵.

定义1^[2] 对于 $t \in [0, T_f]$, $N_{\sigma}(t, T_f)$ 表示 $\sigma(t)$ 在时间间隔 $[t, T_f]$ 内的切换次数. 如果 $N_{\sigma}(t, T_f) \leq N_0 + (T_f - t)/\tau_a$, 则 τ_a 称为平均驻留时间, 其中 $\tau_a > 0, N_0 \geq 0$. 为了计算方便, 一般选择抖振界 $N_0 = 0$.

定义2^[14] 对于时间间隔 $T \in [0, T_f]$, 给定正常数 c_1, c_2, h 和正定对称矩阵 R , 其中 $c_2 > c_1 > 0$, 切换系统(1)是关于 (c_1, c_2, T, R, h) 有限时间有界(Finite-time Bounded, FTB)的, 如果如下条件对系统状态 $x(t)$ 成立:

$$\sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} x^T(\theta)Rx(\theta) \leq c_1 \Rightarrow x^T(t)Rx(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T_f]. \quad (4)$$

本文的主要目的是设计一个合适的滑模控制器 $u(t)$, 确保切换系统(1)的状态轨迹能在时间 T^* 内被驱使到设定的滑模面 $s_i(t) = 0$ 上, 其中 $T_f \geq T^*$, 并且滑模趋近段和滑动模态是 FTB 的. 基于此, 构造如下的滑模函数:

$$s_i(t) = L_i x(t) - \int_0^t L_i (A_i + B_i K_{1i}) x(s) ds - \int_0^t L_i (A_{di} + B_i K_{2i}) x(s-\tau) ds, \quad (5)$$

其中 K_{1i} 和 K_{2i} 是需要设计的控制器增益. 令 $L_i = B_i^T X_i$, B_i 为列满秩矩阵, 通过选择适当的矩阵 $X_i > 0$, 使得 $L_i B_i$ 是非奇异的. 对于切换系统(1), 构造如下滑模控制器:

$$u(t) = K_{1i}x(t) + K_{2i}x(t-\tau) - \varphi_i(t)\text{sign}[s_i(t)], \quad (6)$$

其中 $\varphi_i(t)$ 为需要设计的鲁棒项.

引理1^[5] 对于适当维数的矩阵 X, Y , 正定对称矩阵 T 和正标量 ρ , 有以下矩阵不等式成立:

$$X^T Y + Y^T X \leq \rho X^T T X + \rho^{-1} Y^T T^{-1} Y. \quad (7)$$

为了使得系统在趋近段和到达后的状态都满足 FTB, 引入如下分段策略的引理.

引理2^[21] 对于具有指定参数 (c_1, c_2, T, R, h) 的切换系统(1), 当且仅当存在一个辅助标量 c^* 满足 $c_1 < c^* < c_2$, 使得闭环切换系统在趋近段是关于 (c_1, c^*, T_1, R, h) FTB 的, 同时使得到达后的滑模动态系统是关于 (c^*, c_2, T_2, R, h) FTB 的, 则闭环系统可被确保是关于 (c_1, c_2, T, R, h) FTB 的. 其中: $T \in [0, T_f]$, $T_1 \in [0, T^*]$, $T_2 \in [T^*, T_f]$.

2 主要结果

2.1 滑模动态可达性的分析

下面将对滑模动态可达性进行证明, 切换系统的滑模动态可达性条件为

$$s_i^T(t)\dot{s}_i(t) < 0. \quad (8)$$

定理1 对于切换系统(1)和滑模函数(5), 切换系统(1)的状态轨迹能在时间 T^* 内被驱使到给定的滑模面 $s_i(t) = 0$ 上, 其中 $T_f \geq T^*$, 如果存在合适的滑模控制律(6), 则鲁棒项 $\varphi_i(t)$ 可被构造为如下形式:

$$\varphi_i(t) = \xi_i + \phi_{1i}\|x(t)\| + \phi_{2i}\|x(t - \tau)\| + \phi_{3i}\|\omega(t)\|. \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{1i} &= \|(L_i B_i)^{-1} L_i F_i\| \|U_{1i}\|, \\ \phi_{2i} &= \|(L_i B_i)^{-1} L_i F_i\| \|U_{2i}\|, \\ \phi_{3i} &= \|(L_i B_i)^{-1} L_i H_i\|. \end{aligned}$$

并且标量 $\xi_i > 0$, 满足如下条件:

$$\xi_i \geq \frac{\lambda_{\max}[(L_i B_i)^{-1}]}{T_f} \|L_i x(0)\|. \quad (10)$$

证明 构造如下多李亚普诺夫函数:

$$V_{1i}(t) = \frac{1}{2} s_i^T(t) (L_i B_i)^{-1} s_i(t). \quad (11)$$

沿着滑模函数(5)的轨迹对 $V_{1i}(t)$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1i}(t) &= s_i^T(t) (L_i B_i)^{-1} \dot{s}_i(t) = \\ &= s_i^T(t) (L_i B_i)^{-1} L_i F_i f_i(x(t), x(t - \tau)) + \\ &= s_i^T(t) (L_i B_i)^{-1} L_i H_i \omega(t) - \varphi_i(t) \|s_i(t)\|_1. \end{aligned} \quad (12)$$

考虑到 $\|s_i(t)\| \leq \|s_i(t)\|_1$, 式(12)可改写为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1i}(t) &\leq \\ &\|s_i(t)\| \|(L_i B_i)^{-1} L_i F_i\| \|f_i(x(t), x(t - \tau))\| + \\ &\|s_i(t)\| \|(L_i B_i)^{-1} L_i H_i\| \|\omega(t)\| - \varphi_i(t) \|s_i(t)\|_1 \leq \\ &-\xi_i \|s_i(t)\| < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

通过对式(11)使用Rayleigh's不等式, 可得

$$\dot{V}_{1i}(t) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}[(L_i B_i)^{-1}] \|s_i(t)\|^2. \quad (14)$$

结合不等式(13)和(14), 可得如下不等式:

$$\dot{V}_{1i}(t) \leq -\bar{\xi}_i V_{1i}^{1/2}(t), \quad (15)$$

其中

$$\bar{\xi}_i = \xi_i \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\max}[(L_i B_i)^{-1}]}}.$$

对不等式(15)进行积分, 可得如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1i}(t) V_{1i}^{-1/2}(t) &\leq -\bar{\xi}_i \Rightarrow \\ \int_0^{T^*} V_{1i}^{-1/2}(t) dV_{1i}(t) &\leq -\bar{\xi}_i T^* \Rightarrow \\ 2(V_{1i}^{1/2}(T^*) - V_{1i}^{1/2}(0)) &\leq -\bar{\xi}_i T^*. \end{aligned} \quad (16)$$

因为 $V_{1i}(t) \geq 0$, 不等式(16)可被改写为

$$T^* \leq \frac{2V_{1i}^{1/2}(0)}{\bar{\xi}_i}. \quad (17)$$

对于 $t \geq T^*$ 时刻, $V_{1i}(t) = 0$, 所以 $s_i(t) = 0$.

将 $s_i(0) = L_i x(0)$ 代入不等式(17), 并结合条件(10), 可得

$$T^* \leq \frac{\lambda_{\max}[(L_i B_i)^{-1}]}{\xi_i} \|L_i x(0)\| \leq T_f. \quad (18)$$

这意味着对于任意给定的时间 $T_f \geq T^*$, 切换系统(1)的状态轨迹能在滑模控制律(6)的驱使下在有限时间 T^* 内到达滑模面 $s_i(t) = 0$ 上, 并维持在其上运动, 其中 $T_f \geq T^*$. $\square$

2.2 滑模趋近段的FTB分析

将滑模控制律(6)代入到切换系统(1)中, 可得如下闭环切换系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \\ \bar{A}_i x(t) + \bar{A}_{di} x(t - \tau) + H_i \omega(t) + \\ F_i f_i(x(t), x(t - \tau)) - B_i \varphi_i(t) \text{sign}[s_i(t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

其中: $\bar{A}_i = A_i + B_i K_{1i}$, $\bar{A}_{di} = A_{di} + B_i K_{2i}$.

令 $\varphi_{si}(t) = \varphi_i(t) \text{sign}[s_i(t)]$, 因在该阶段 $s_i(t) \neq 0$, 可得如下不等式:

$$\begin{aligned} \varphi_{si}^T(t) \varphi_{si}(t) &\leq \\ 4\xi^2 + 4\phi_{1i}^2 x^T(t) x(t) + 4\phi_{3i}^2 \omega^T(t) \omega(t) + \\ 4\phi_{2i}^2 x^T(t - \tau) x(t - \tau). \end{aligned} \quad (20)$$

在下面的定理中, 将证明闭环系统(19)在趋近段是关于 (c_1, c^*, T_1, R, h) FTB的.

定理2 对于任意 $i, j \in \mathbf{I}, i \neq j$, 给定常数 $c_1 > 0, h > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu \geq 1, \nu_i > 0$, 闭环切换系统(19)是关于 (c_1, c^*, T_1, R, h) FTB的(其中 $R > 0$), 如果存在正定对称矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, Q_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, W_{1i} \in \mathbf{R}^{n \times n}, W_{2i} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和正标量 c^*, ζ_i 使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11i} & P_i \bar{A}_{di} & P_i H_i \\ * & \Phi_{22i} & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$4\phi_{1i}^2 \nu_i^{-1} I < e^{-2\alpha T_f} W_{1i}, \quad (22)$$

$$4\phi_{2i}^2 \nu_i^{-1} I < e^{-2\alpha T_f} W_{2i}, \quad (23)$$

$$P_i \leq \mu P_j, Q_i \leq \mu Q_j, \forall i, j \in \mathbf{I}, \quad (24)$$

$$W_{1i} \leq \mu W_{1j}, W_{2i} \leq \mu W_{2j}, \forall i, j \in \mathbf{I}, \quad (25)$$

$$c_1 < c^* < c_2, \quad (26)$$

$$\rho_i < e^{-\alpha T_f} \lambda_2 c^*, \quad (27)$$

并且切换信号 $\sigma(t)$ 的平均驻留时间满足如下条件:

$$\tau_a > \tau_a^* = \max \left\{ \frac{\ln \mu}{\alpha}, \frac{T_f \ln \mu}{\ln(\lambda_2 c^*) - \ln \rho_i - \alpha T_f} \right\}. \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{11i} &= \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + Q_i + W_{1i} + \zeta_i P_i F_i F_i^T P_i + \\ &2\zeta_i^{-1} U_{1i}^T U_{1i} + \nu_i P_i B_i B_i^T P_i - \alpha P_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{22i} &= 2\zeta_i^{-1}U_{2i}^T U_{2i} + W_{2i} - Q_i, \\ \rho_i &= (\lambda_1 + \lambda_3\tau)c_1 + \beta h + 4\xi_i^2 T_f \nu_i^{-1} + 4\phi_{3i}^2 h \nu_i^{-1}, \\ \lambda_1 &= \max_{\forall i \in I}(\lambda_{\max}(\bar{P}_i)), \\ \lambda_2 &= \min_{\forall i \in I}(\lambda_{\min}(\bar{P}_i)), \\ \lambda_3 &= \max_{\forall i \in I}(\lambda_{\max}(\bar{Q}_i)).\end{aligned}$$

证明 构造如下的多李亚普诺夫函数:

$$\begin{aligned}V_{2i}(t) &= \\ & x^T(t)P_i x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Q_i x(s)ds + \\ & \int_0^t x^T(s)W_{1i}x(s)ds + \int_0^t x^T(s-\tau)W_{2i}x(s-\tau)ds.\end{aligned}\quad (29)$$

沿着闭环系统(19)的轨迹对 V_{2i} 求导, 结合条件(21)~(28)并经过一系列复杂计算可得

$$x^T(t)Rx(t) < c^*. \quad (30)$$

由定义2和引理2可知, 闭环切换系统(19)是关于 (c_1, c^*, T_1, R, h) FTB 的. $\square$

2.3 滑模动态的FTB分析

由滑模控制理论可知, 当系统状态轨迹到达滑模面 $s_i(t) = 0$ 上时, 会有情形 $s_i(t) = 0$ 和 $\dot{s}_i(t) = 0$ 存在. 基于 $\dot{s}_i(t) = 0$, 可得如下等价控制律:

$$\begin{aligned}u_{eq}(t) &= \\ & -(L_i B_i)^{-1}L_i F_i f_i(x(t), x(t-\tau)) - \\ & (L_i B_i)^{-1}L_i H_i \omega(t) + K_{1i}x(t) + K_{2i}x(t-\tau).\end{aligned}\quad (31)$$

将等价控制律 u_{eq} 代入切换系统(1)中, 可得如下的滑模动态系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}_i x(t) + \bar{A}_{di} x(t-\tau) + \bar{B}_i H_i \omega(t) + \\ & \bar{B}_i F_i f_i(x(t), x(t-\tau)),\end{aligned}\quad (32)$$

其中 $\bar{B}_i = I - B_i(L_i B_i)^{-1}L_i$.

下面将证明滑模动态系统(32)是FTB的.

定理3 对于任意 $i, j \in I, i \neq j$, 给定常数 $T_f > 0, c_2 > 0, h > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu \geq 1$, 滑模动态系统(32)是关于 (c^*, c_2, T_2, R, h) FTB 的, 如果存在正定对称矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, Q_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和正标量 $c^*, \varepsilon_i, \chi_i$ 使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & P_i \bar{A}_{di} & P_i H_i & \Psi_{14i} & 0 \\ * & \Psi_{22i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta I & 0 & H_i^T \\ * & * & * & -\chi_i I & 0 \\ * & * & * & * & -\chi_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$P_i \leq \mu P_j, Q_i \leq \mu Q_j, \forall i, j \in I, \quad (34)$$

$$c_1 < c^* < c_2, \quad (35)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3\tau)c_1 + \beta h < e^{-\alpha T_f} \lambda_2 c_2, \quad (36)$$

并且切换信号 $\sigma(t)$ 的平均驻留时间满足如下条件:

$$\tau_a > \tau_a^* = \frac{T_f \ln \mu}{\ln(\lambda_2 c_2) - \ln[(\lambda_1 + \lambda_3\tau)c^* + \beta h] - \alpha T_f}. \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi_{11i} &= \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + Q_i - \alpha P_i + \\ & \varepsilon_i P_i \bar{B}_i F_i F_i^T \bar{B}_i^T P_i + 2\varepsilon_i^{-1} U_{1i}^T U_{1i}, \\ \Psi_{14i} &= \chi_i P_i B_i (L_i B_i)^{-1} L_i, \Psi_{22i} = 2\varepsilon_i^{-1} U_{2i}^T U_{2i} - Q_i.\end{aligned}$$

证明 构造如下的多李亚普诺夫函数:

$$V_{3i}(t) = x^T(t)P_i x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Q_i x(s)ds. \quad (38)$$

沿着滑模动态系统(32)的轨迹对 V_{3i} 求导, 结合条件(33)~(37)并经过一系列复杂计算可得

$$x^T(t)Rx(t) < c_2. \quad (39)$$

由定义2和引理2可知, 滑模动态系统(32)是关于 (c^*, c_2, T_2, R, h) FTB 的. $\square$

2.4 控制器增益 K_{1i}, K_{2i} 求解

定理4 对于任意 $i, j \in I, i \neq j$, 给定常数 $T_f > 0, c_1 > 0, c_2 > 0, h > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu \geq 1$, 闭环切换系统(19)是关于 (c_1, c_2, T, R, h) FTB 的, 如果存在正常数 $c^*, \zeta_i, \varepsilon_i, \chi_i$, 正定对称矩阵 $X_{1i} \in \mathbf{R}^{n \times n}, Z_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, M_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, Z_{1i} \in \mathbf{R}^{n \times n}, Z_{2i} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $Y_{1i} \in \mathbf{R}^{p \times n}, Y_{2i} \in \mathbf{R}^{p \times n}$ 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11i} & \Theta_{12i} \\ * & \Theta_{22i} \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-2\alpha T_f} Z_{1i} & 2\phi_{1i} Z_{1i} \\ * & -\nu_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-2\alpha T_f} Z_{2i} & 2\phi_{2i} Z_{2i} \\ * & -\nu_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (42)$$

$$c_1 < c^* < c_2, \quad (43)$$

$$X_{1j} \leq \mu X_{1i}, Z_j \leq \mu Z_i, \forall i, j \in I, \quad (44)$$

$$Z_{1j} \leq \mu Z_{1i}, Z_{2j} \leq \mu Z_{2i}, \forall i, j \in I, \quad (45)$$

$$\sigma_1 R^{-1} < X_{1i} < 2R^{-1}, \sigma_1 R^{-1} < Z_i, \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} \varrho_i & \sqrt{(1+\tau)c_1} \\ * & -\sigma_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (47)$$

$$(1+\tau)c^* + \beta h \sigma_1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha T_f} \sigma_1 c_2 < 0, \quad (48)$$

且切换信号 $\sigma(t)$ 的平均驻留时间满足如下条件:

$$\tau_a > \tau_a^* = \max\{\tau_{a1}, \tau_{a2}\}. \quad (49)$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta_{11i} &= \begin{bmatrix} \Xi_{11i} & A_{di} Z_i + B_i Y_{2i} & H_i \\ * & -Z_i & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix}, \\ \Theta_{12i} &= \begin{bmatrix} -\nu_i B_i & \zeta_i F_i & X_{1i} U_{1i}^T & 0 & \Xi_{18i} \\ 0 & 0 & 0 & Z_i U_{2i}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_i \tilde{B}_i F_i & X_{1i} U_{1i}^T & 0 & X_{1i} & 0 \\ \leftarrow 0 & 0 & 0 & Z_i U_{2i}^T & 0 & Z_i \\ H_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Theta_{22i} &= -\text{diag}\left\{\nu_i I, \zeta_i I, \frac{1}{2}\zeta_i I, \frac{1}{2}\zeta_i I, \chi_i I, \chi_i I, \right. \\ & \quad \left. \varepsilon_i I, \frac{1}{2}\varepsilon_i I, \frac{1}{2}\varepsilon_i I, Z_{1i}, Z_{2i}\right\}, \\ \Xi_{11i} &= A_i X_{1i} + X_{1i} A_i^T + B_i Y_{1i} + \\ & \quad Y_{1i}^T B_i^T + M_i - \alpha X_{1i}, \\ \Xi_{18i} &= \chi_i B_i (L_i B_i)^{-1} L_i, \\ \varrho_i &= \beta h + 4\xi_i^2 T_f \nu_i^{-1} + 4\phi_{3i}^2 h \nu_i^{-1} - \frac{1}{2}c^* e^{-\alpha T_f}, \\ \tau_{a1} &= \max\left\{\frac{\ln \mu}{\alpha}, \frac{T_f \ln \mu}{\ln(\lambda_2 c^*) - \ln \rho_i - \alpha T_f}\right\}, \\ \tau_{a2} &= \frac{T_f \ln \mu}{\ln(\lambda_2 c_2) - \ln[(\lambda_1 + \lambda_3 \tau)c^* + \beta h] - \alpha T_f}. \end{aligned}$$

证明 为了使得定理2和定理3同时成立, 对不等式(21)和(33)运用Schur补引理并经过计算, 给出如下不等式:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11i} & \Pi_{12i} \\ * & \Pi_{22i} \end{bmatrix} < 0, \quad (50)$$

以及条件(22)~(27)和条件(36), 其中

$$\begin{aligned} \Pi_{11i} &= \begin{bmatrix} \Omega_{11i} & P_i \bar{A}_{di} & P_i H_i \\ * & W_{2i} - Q_i & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix}, \\ \Pi_{12i} &= \begin{bmatrix} -\nu_i P_i B_i & \zeta_i P_i F_i & U_{1i}^T & 0 & \Omega_{18i} \\ 0 & 0 & 0 & U_{2i}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_i P_i \tilde{B}_i F_i & U_{1i}^T & 0 \\ \leftarrow 0 & 0 & 0 & U_{2i}^T \\ H_i^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Pi_{22i} &= -\text{diag}\left\{\nu_i I, \zeta_i I, \frac{1}{2}\zeta_i I, \frac{1}{2}\zeta_i I, \chi_i I, \chi_i I, \right. \\ & \quad \left. \varepsilon_i I, \frac{1}{2}\varepsilon_i I, \frac{1}{2}\varepsilon_i I\right\}. \end{aligned}$$

矩阵(50)两边同乘 $\text{diag}\{P_i^{-1}, Q_i^{-1}, I, I, I, I, I, I, I\}$, 并定义 $X_{1i} = P_i^{-1}, Z_i = Q_i^{-1}, Y_{1i} = K_{1i} X_{1i}, Y_{2i} = K_{2i} Z_i, M_i = X_{1i} Q_i X_{1i}, Z_{1i} = W_{1i}^{-1}, Z_{2i} = W_{2i}^{-1}$, 可得到不等式(40).

另一方面, 取 $\bar{X}_{1i} = R^{1/2} X_{1i} R^{1/2}, \bar{Z}_i = R^{1/2} Z_i R^{1/2}, \min_{\forall i \in I}(\lambda_{\min}(\bar{Z}_i)) \geq \sigma_1, \max_{\forall i \in I}(\lambda_{\max}(\bar{X}_{1i})) = 1/\min_{\forall i \in I}(\lambda_{\min}(\bar{P}_i))$. 并考虑到 $\sigma_1 \leq \min_{\forall i \in I}(\lambda_{\min}(\bar{X}_{1i}))$ 和 $\max_{\forall i \in I}(\lambda_{\max}(\bar{X}_{1i})) \leq 2$, 不等式

$$\begin{aligned} (1 + \tau) \frac{1}{\sigma_1} c_1 + \beta h + 4T_f \xi_i^2 \nu_i^{-1} + 4\phi_{3i}^2 h \nu_i^{-1} < \\ \frac{1}{2} e^{-\alpha T_f} c^*, \end{aligned} \quad (51)$$

可保证不等式(27)成立. 同理, 不等式

$$(1 + \tau) \frac{1}{\sigma_1} c^* + \beta h < \frac{1}{2} e^{-\alpha T_f} c_2, \quad (52)$$

可保证不等式(36)成立. 再结合Schur补引理, 式(47)可以由不等式(51)容易得到. $\square$

3 数值仿真

假设切换系统(1)存在如下两个子系统, 其系数分别为

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.91 \end{bmatrix}, \\ F_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \\ A_{d2} &= \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.91 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ F_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

仿真参数选择为 $\alpha = 0.03, \beta = 0.19, \nu_1 = 7, \nu_2 = 4, \tau = 0.1, h = 0.6, T_f = 4, c_1 = 1, c_2 = 5, \mu = 1.016$; 非线性项选为

$$\begin{aligned} f_1(x(t), x(t-\tau)) &= \begin{bmatrix} 0.2 \sin x_1(t) + 0.3 \sin x_1(t-\tau) \\ 0.4 \sin x_2(t) + 0.5 \sin x_2(t-\tau) \end{bmatrix}, \\ f_2(x(t), x(t-\tau)) &= \begin{bmatrix} 0.4 \sin x_1(t) + 0.3 \sin x_1(t-\tau) \\ 0.5 \sin x_2(t-\tau) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据假设3, 可取Lipschitz常数矩阵为

$$U_{11} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.05} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.18} \end{bmatrix}, U_{21} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.075} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.225} \end{bmatrix}.$$

同理, 可得

$$U_{12} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.14} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U_{22} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.105} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.125} \end{bmatrix}.$$

求解矩阵不等式(40)~(48), 可得 $c^* = 2.7275, \tau_a^* = 1.0866$, 据此, 选择 $\tau_a = 1.2$.

$$K_{11} = [-18.5929 \quad -25.1418],$$

$$K_{21} = [0.0595 \quad -0.1543],$$

$$K_{12} = [-20.9528 \quad -24.1906],$$

$$K_{22} = [0.0399 \quad 0.0646].$$

由不等式(10)可得, $\xi_1 \geq 0.1443, \xi_2 \geq 0.1430$, 本文选择 $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.2$.

为了抑制抖振现象, 符号函数 $\text{sign}[s_i(t)]$ 用 $s_i(t)/(0.005 + \|s_i(t)\|)$ 代替. 选取初始状态为 $x_0 = [0.6 \quad 0.5]^T$, 则仿真结果如图1和图2所示. 由图1可知, 闭环系统的状态轨迹在控制器的作用下是收敛的. 由图2可知, 闭环系统状态轨迹满足FTB条件.

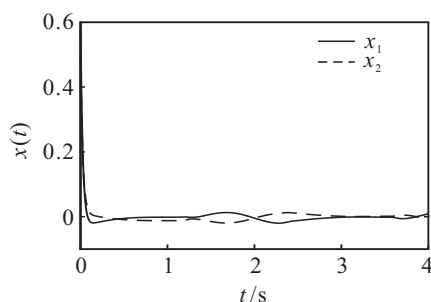
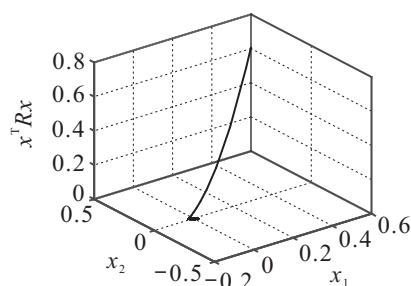


图1 闭环系统状态轨迹

图2 闭环系统 $x^T(t)Rx(t)$ 的轨迹

4 结论

本文针对一类含有非线性和时滞参数的切换系统,研究了其有限时间滑模控制问题.首先,设计了积分型滑模面和合适的滑模控制器,以确保系统状态的有限时间可达性;然后,基于矩阵不等式和平均驻留时间方法,得到了滑模趋近段和滑模动态FTB的充分条件;最后,通过仿真实例验证了本文设计方法的有效性和可行性.

参考文献(References)

- [1] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.
- [2] Liberzon D. Switching in systems and control[M]. Boston: Birkhauser, 2003: 53-89.
- [3] Wu Z G, Shi P, Su H, et al. Asynchronous L_2 - L_∞ filtering for discrete-time stochastic Markov jump systems with randomly occurred sensor nonlinearities[J]. Automatica, 2014, 50(1): 180-186.
- [4] Li H, Gao Y, Shi P, et al. Observer-based fault detection for nonlinear systems with sensor fault and limited communication capacity[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2016, 61(9): 2745-2751.
- [5] Wang Y, Xie L, de Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. System and Control Letters, 1992, 19(2): 139-149.
- [6] Chen W H, Zheng W X. Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays[J]. Automatica, 2007, 43(1): 95-104.
- [7] Zong G, Ren H, Hou L. Finite-time stability of interconnected impulsive switched systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2016, 10(6): 648-654.
- [8] Xia Y Q, Jia Y M. Robust sliding mode control for uncertain time-delay systems: An LMI approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 1086-1091.
- [9] Kao Y, Xie J, Wang C, et al. A sliding mode approach to H_∞ non-fragile observer-based control design for uncertain Markovian neutral-type stochastic systems[J]. Automatica, 2015, 52(2): 218-226.
- [10] Lian J, Zhao J. Robust H_∞ control of uncertain switched systems: A sliding mode control design[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(7): 965-970.
- [11] Lian J, Zhao J. Sliding mode control of uncertain switched delay systems with nonlinear perturbations: Average dwell time approach[J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 62(4): 791-798.
- [12] 肖会敏, 刘振. 一类不确定切换中立型系统的鲁棒滑模控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 521-527. (Xiao H M, Liu Z. Robust sliding mode control for a class of uncertain switched neutral systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(3): 521-527.)
- [13] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record, Part 4. New York, 1961: 83-87.
- [14] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.
- [15] Lin X, Du H, Li S. Finite-time boundedness and L_2 gain analysis for switched delay systems with norm-bounded disturbance[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(12): 5982-5993.
- [16] Shen M, Yan Y, Tang Z, et al. Finite-time H_∞ filtering of Markov jump systems with incomplete transition probabilities: A probability approach[J]. IET Signal Processing, 2015, 9(7): 572-578.
- [17] Zong G D, Wang R H, Zheng W X, et al. Finite-time H_∞ control for discrete-time switched nonlinear systems with time delay[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(6): 914-936.
- [18] He S, Liu F. Finite-time H_∞ control of nonlinear jump systems with time-delays via dynamic observer-based state feedback[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(4): 605-614.
- [19] He S, Song J. Finite-time sliding mode control design for a class of uncertain conic nonlinear systems[J]. IEEE/CAA J of Automatica Sinica, 2017, 4(4): 809-816.
- [20] Gao L, Jiang X, Wang D. Observer-based robust finite time H_∞ sliding mode control for Markovian switching systems with mode-dependent time-varying delay and incomplete transition rate[J]. ISA Trans, 2016, 61(3): 29-48.
- [21] Song J, Niu Y G, Zou Y Y. Finite time stabilization via sliding mode control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2017, 62(3): 1478-1483.
- [22] Zhao H J, Niu Y G, Jia T G. Finite time boundedness of switched delay systems by sliding mode technique[C]. Proc of the 36th Chinese Control Conf. Piscataway: IEEE, 2017: 3829-3834.

(责任编辑: 孙艺红)