

基于三角 Pythagorean 模糊集的多准则决策方法

范建平[†], 闫彦, 吴美琴

(山西大学 经济与管理学院, 太原 030006)

摘要: Pythagorean 模糊集在直觉模糊集的基础上扩大了适用范围, 三角模糊数在决策过程中可以保留决策者较多的不确定信息. 鉴于此, 首先提出三角 Pythagorean 模糊集的定义及其欧氏距离表示; 然后定义三角 Pythagorean 模糊加权平均 (TPFWA) 算子、广义三角 Pythagorean 模糊加权平均 (GTPFWA) 算子、三角 Pythagorean 模糊加权几何 (TPFWG) 算子和广义三角 Pythagorean 模糊加权几何 (GTPFWG) 算子, 并对算子所满足的幂等性、有界性和单调性予以证明; 最后通过一个医药代表选择的多准则决策问题和灵敏度分析验证所提出算子的合理性和有效性.

关键词: 三角 Pythagorean 模糊集; 欧氏距离; 三角 Pythagorean 模糊集结算子; 广义三角 Pythagorean 模糊集结算子; 多准则决策问题

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Triangular Pythagorean fuzzy set and its application to multicriteria decision making

FAN Jian-ping[†], YAN Yan, WU Mei-qin

(School of Economics and Management, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Pythagorean fuzzy sets expand the range of application based on intuitionistic fuzzy sets, triangular fuzzy number reserves more uncertain information in the decision making process. Firstly, a triangular Pythagorean fuzzy set and Euclidean distance are defined. Then, triangular Pythagorean fuzzy weighted averaging (TPFWA), generalized triangular Pythagorean fuzzy weighted averaging (GTPFWA), triangular Pythagorean fuzzy weighted geometric (TPFWG) and generalized triangular Pythagorean fuzzy weighted geometric (GTPFWG) operators are defined, and correlative idempotency, boundedness and monotonicity are proved. Finally the reasonableness and validity are verified by a multicriteria decision making about medical representative selection and sensitivity analysis.

Keywords: triangular Pythagorean fuzzy set; Euclidean distance; triangular Pythagorean fuzzy weighted operators; generalized triangular Pythagorean fuzzy weighted operators; multicriteria decision making

0 引言

在现有的多准则决策问题中, 决策者对于备选方案在各准则下评价的不确定性和模糊性越来越大, 进而加大了多属性决策问题的难度. 从模糊集^[1](Fuzzy set, FS) 理论的提出, 到直觉模糊集^[2](Intuitionistic fuzzy set, IFS) 和犹豫模糊集^[3](Hesitant fuzzy set, HFS) 的发展, 再到 Pythagorean 模糊集^[4](Pythagorean fuzzy set, PFS) 的出现, 一步步对模糊集进行改进和优化. Yager 等^[5]提出的 Pythagorean 模糊集作为直觉模糊集的一个重要扩展, 扩大了隶属度和非隶属度的空间范围, 将范围从隶属度与非隶属度之和小于等于 1 扩大到二者平方和小于等于 1, 可以广泛应用在风险评估^[6]、投资^[7]、模式识

别和医疗诊断^[8]方面, 也包括风险对心理行为的影响^[9]等方面. 不同类型的集结算子也被提出来, 包括拟 Pythagorean 模糊有序加权平均算子、广义 Pythagorean 模糊集结算子^[10]和 Pythagorean 模糊交叉影响有序加权算子^[11], 并且与 TOPSIS^[6]、相关系数^[8]、前景理论^[9]和相似度测量^[12]等理论结合在一起进行研究.

不同的学者将各种方法和新的理论运用到模糊决策中, 对模糊决策中存在的现有问题进行改进与优化, 使其发展更加完善和合理, 如在 Neutrosophic 三角模糊集中提出三角 Neutrosophic 认知图^[13]和在密集模糊环境下^[14]对 Neutrosophic 集进行去模糊化. 在三角直觉模糊集中加入了 α -cut 法^[15]、分层序列法^[16]、

收稿日期: 2017-12-28; 修回日期: 2018-05-02.

责任编辑: 阳春华.

[†]通讯作者. E-mail: fjp@sxu.edu.cn.

比率排序法^[17],并根据价值指数和模糊指数^[18]对方案进行排名,有效运用在不精确数据的建模领域^[15]和矩阵对策问题中报酬矩阵^[17]的元素是三角直觉模糊数等方面.三角模糊集则与随机性和概率性转换^[19]相结合,其中三角模糊相互偏好^[20]关系、区间三角 type-2 型模糊集中的贴适度系数^[21]也被改进.Yong 等^[22]将 Zadeh 的拓展法则一般化,将加减乘除用于广义的三角模糊集中.

Wang 等^[23]对现有的三角直觉模糊数中算术运算和逻辑算子中存在的缺点进行改进并提出新的算术运算和逻辑算子.Sankar 等^[24]定义了基于一般三角直觉模糊数的非线性算术运算.三角模糊数分别与传统的犹豫模糊集^[25]、直觉模糊集^[26-27]和单值 Neutrosophic 集^[28]相结合并各自提出相对应的集结算子,合理运用在系统故障分析^[23]、教学质量评估^[26]和人员选择^[18]等方面.

当决策者在模糊环境下对被评价单元进行评估时,如给出某候选人在准则“一般能力”下的评价,其隶属度和非隶属度可能存在不确定的情形.若使用单值,则会犹豫而无法具体确定给多少;若使用区间,则会出现所给区间过大包含过多的无效信息或过小而丢掉部分模糊信息的情形.同时,在直觉模糊集中给出隶属度和非隶属度时限制条件为二者之和小于等于一,如(0.7,0.4)就是不行的,但是现实中隶属度与非隶属度都比较大也是常常会出现的一种情况,Pythagorean 模糊集扩大到隶属度与非隶属度平方之和小于等于一,因此本文提出分别用三角模糊数表示 Pythagorean 模糊集中的隶属度和非隶属度来保留更多的不确定性.在三角 Pythagorean 模糊集结算子基础上提出了广义三角 Pythagorean 模糊集结算子,并通过取值的变化进行灵敏度分析,与已有方法进行比较来验证所提出算子在集结模糊信息时的有效性和稳定性.

1 相关概念

首先回顾单值 Pythagorean 模糊集的定义,并在其基础上将隶属度和非隶属度用三角模糊数的形式表示,给出三角 Pythagorean 模糊集 (TPFS) 的相关概念及欧氏距离的定义.

定义 1^[6] 设 X 是一个非空集合, X 中任意 PFS 表达如下:

$$P = \{ \langle x, \mu_P(x), \nu_P(x) \rangle | x \in X \}.$$

函数 $\mu_P(x)$ 和 $\nu_P(x)$ 分别为集合 P 中元素 $x \in X$ 的隶属度和非隶属度,满足约束条件

$$0 \leq (\mu_P(x))^2 + (\nu_P(x))^2 \leq 1,$$

$$\mu_P(x) \in [0, 1], \nu_P(x) \in [0, 1].$$

$\pi_P(x) = \sqrt{1 - (\mu_P(x))^2 - (\nu_P(x))^2}$ 表示元素 x 属于 X 的犹豫度(不确定程度), $\pi_P(x)$ 值越小表明关于 x 的有用信息越多,反之亦然.为了使用方便,通常采用 Pythagorean 模糊数^[6](PFN),表示为 $\gamma = P(\mu_P, \nu_P)$.

定义 2 设 X 是一个非空集合, X 中任意 TPFS 表达如下:

$$\tilde{P} = \{ \langle x, \tilde{\mu}_P(x), \tilde{\nu}_P(x) \rangle | x \in X \}.$$

$\tilde{\mu}_P(x) \subset [0, 1]$ 和 $\tilde{\nu}_P(x) \subset [0, 1]$ 分别是两个三角模糊数, $\tilde{\mu}_P(x) = (\mu_{P1}(x), \mu_{P2}(x), \mu_{P3}(x)) : X \rightarrow [0, 1]$, $\tilde{\nu}_P(x) = (\nu_{P1}(x), \nu_{P2}(x), \nu_{P3}(x)) : X \rightarrow [0, 1]$ 分别为集合 P 中元素 $x \in X$ 的隶属度和非隶属度,即元素 x 对集合 X 的属于程度和不属于程度,满足约束条件 $0 \leq (\mu_{P3}(x))^2 + (\nu_{P3}(x))^2 \leq 1, x \in X$. 参考 PFS 中犹豫度的定义,三角 Pythagorean 模糊集中犹豫度定义为 $\tilde{\pi}_P(x) = \sqrt{1 - (\tilde{\mu}_P(x))^2 - (\tilde{\nu}_P(x))^2}$,用来表明元素 x 对集合 X 的犹豫程度,由其定义可知具体表示也应该是一个三角模糊数,有

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_P(x) &= (\tilde{\pi}_{P1}(x), \tilde{\pi}_{P2}(x), \tilde{\pi}_{P3}(x)) = \\ &= (\sqrt{1 - (\tilde{\mu}_{P3}(x))^2 - (\tilde{\nu}_{P3}(x))^2}, \\ &= \sqrt{1 - (\tilde{\mu}_{P2}(x))^2 - (\tilde{\nu}_{P2}(x))^2}, \\ &= \sqrt{1 - (\tilde{\mu}_{P1}(x))^2 - (\tilde{\nu}_{P1}(x))^2}). \end{aligned}$$

当 $\mu_{P1}(x) = \mu_{P2}(x) = \mu_{P3}(x), \nu_{P1}(x) = \nu_{P2}(x) = \nu_{P3}(x)$ 成立时,三角 Pythagorean 模糊集 (TPFS) 退化为简单的 Pythagorean 模糊集 (PFS).

为了表述和实际使用方便,定义 TPFS 的元素 $(\mu_P(x), \nu_P(x))$ 为三角 Pythagorean 模糊数 (TPFN),记作 $\tilde{\gamma} = P(\tilde{\mu}_P, \tilde{\nu}_P)$. 其中: $\tilde{\mu}_\gamma = (\mu_{P1}, \mu_{P2}, \mu_{P3}), \tilde{\nu}_\gamma = (\nu_{P1}, \nu_{P2}, \nu_{P3})$. 或简单记为 $\tilde{\gamma} = P((\mu_{P1}, \mu_{P2}, \mu_{P3}), (\nu_{P1}, \nu_{P2}, \nu_{P3}))$. 其犹豫度的实际意义与三角 Pythagorean 模糊集中犹豫度一样,是一个三角模糊数的形式,表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_\gamma &= (\tilde{\pi}_{P1}, \tilde{\pi}_{P2}, \tilde{\pi}_{P3}) = \\ &= (\sqrt{1 - (\mu_{P3})^2 - (\nu_{P3})^2}, \sqrt{1 - (\mu_{P2})^2 - (\nu_{P2})^2}, \\ &= \sqrt{1 - (\mu_{P1})^2 - (\nu_{P1})^2}). \end{aligned}$$

其中: $\mu_{P3} \in [0, 1], \nu_{P3} \in [0, 1], 0 \leq (\mu_{P3})^2 + (\nu_{P3})^2 \leq 1, \mu_{P1} = \mu_{P2} = \mu_{P3}$ 且 $\nu_{P1} = \nu_{P2} = \nu_{P3}$ 成立时,三角 Pythagorean 模糊数 (TPFN) 退化为 Pythagorean 模糊数^[6](PFN).

定义 3^[5] \tilde{P} 的补集定义为 $\tilde{P}^C = \{ \langle x, \tilde{\nu}_P(x), \tilde{\mu}_P(x) \rangle | x \in X \}$,其中 $\tilde{\nu}_P(x)$ 和 $\tilde{\mu}_P(x)$ 的表达同定义

2, 其补集仍然为 TPFs.

受文献 [6] 中 PFNs 代数运算和两个 PFNs 之间距离定义的启发, 类似地, 三角 Pythagorean 模糊数 (TPFNs) 的代数运算^[6] 满足如下定义 4 的表示. 下面的定义 5 给出了 TPFNs 的得分函数^[6], 定义 6 给出了 TPFNs 的欧氏距离.

定义 4 有 3 个 TPFNs, $\tilde{\alpha} = \langle (a, b, c), (e, d, f) \rangle$, 同时满足 $\tilde{\alpha}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1), (d_1, e_1, f_1) \rangle$, $\tilde{\alpha}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2), (d_2, e_2, f_2) \rangle$ 和一个正实数 λ , 其代数运算表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 &= \langle (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_1^2 a_2^2}, \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_1^2 b_2^2}, \\ &\quad \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - c_1^2 c_2^2}), (d_1 d_2, e_1 e_2, f_1 f_2) \rangle, \\ \tilde{\alpha}_1 \times \tilde{\alpha}_2 &= \langle (a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2), (\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - d_1^2 d_2^2}, \\ &\quad \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_1^2 e_2^2}, \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - f_1^2 f_2^2}) \rangle, \\ \lambda \cdot \tilde{\alpha} &= \langle (\sqrt{1 - (1 - a^2)^\lambda}, \sqrt{1 - (1 - b^2)^\lambda}, \\ &\quad \sqrt{1 - (1 - c^2)^\lambda}), (d^\lambda, e^\lambda, f^\lambda) \rangle, \\ (\tilde{\alpha})^\lambda &= \langle (a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda), (\sqrt{1 - (1 - d^2)^\lambda}, \\ &\quad \sqrt{1 - (1 - e^2)^\lambda}, \sqrt{1 - (1 - f^2)^\lambda}) \rangle. \end{aligned}$$

定义 4 中所定义的 4 个运算结果仍然是 TPFNs, 证明过程略.

定义 5 $\tilde{\alpha} = \langle (a, b, c), (d, e, f) \rangle$ 是一个 TPFN, 其得分函数定义为

$$S(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{3} \left[\frac{a^2 + 2b^2 + c^2 - (d^2 + 2e^2 + f^2)}{4} + 2 \right].$$

$S(\tilde{\alpha}) \in [0, 1]$, 其值越大, 表明相对应的三角模糊数 $\tilde{\alpha}$ 越大.

可以根据计算得到的得分函数比较两个 TPFNs, 当得分函数相等时, 根据其精确函数比较二者大小. 同一个模糊环境下, 不同学者对于得分函数和精确函数的定义各不相同, 本文选取适合文中模型的定义. 比较方法^[7] 如下:

- 1) 若 $S(\tilde{\alpha}_1) > S(\tilde{\alpha}_2)$, 则 $\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}_2$;
- 2) 若 $S(\tilde{\alpha}_1) = S(\tilde{\alpha}_2)$, 则 $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$;
- 3) 若 $S(\tilde{\alpha}_1) < S(\tilde{\alpha}_2)$, 则 $\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2$.

定义 6 $\tilde{\alpha}_1 = \langle (a_1, b_1, c_1), (d_1, e_1, f_1) \rangle$ 和 $\tilde{\alpha}_2 = \langle (a_2, b_2, c_2), (d_2, e_2, f_2) \rangle$ 是两个 TPFNs, 二者的犹豫度分别定义为 (g_1, h_1, i_1) 和 (g_2, h_2, i_2) , 则二者之间的欧氏距离表示为

$$\begin{aligned} D(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) &= \frac{1}{6} (|a_1^2 - a_2^2| + |b_1^2 - b_2^2| + |c_1^2 - c_2^2| + \\ &\quad |d_1^2 - d_2^2| + |e_1^2 - e_2^2| + |f_1^2 - f_2^2| + \\ &\quad |g_1^2 - g_2^2| + |h_1^2 - h_2^2| + |i_1^2 - i_2^2|). \end{aligned}$$

由于距离函数的定义与 PFNs 的距离函数定义相似, TPFNs 的欧氏距离函数定义应满足下面的定理 1. 当 TPFN 退化为 PFN 时, 二者之间的距离也退化为

简单的距离.

定理 1 $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$ 是两个 TPFNs, 有 $0 \leq D(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \leq 1$.

证明 因为 $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, i_i (i = 1, 2)$ 均在 $[0, 1]$ 之间, $g_1^2 = 1 - c_1^2 - f_1^2, h_1^2 = 1 - b_1^2 - e_1^2, i_1^2 = 1 - a_1^2 - d_1^2$, 且 $c_i^2 + f_i^2 \leq 1$. 由定义 6 的表达可知 $D(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \geq 0$ 一定成立, 不等式左半部分证明完毕, 当且仅当 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ 相等时取等于 0. 现证明不等式右半部分, 有

$$\begin{aligned} D(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) &= \\ &\frac{1}{6} (|a_1^2 - a_2^2| + |b_1^2 - b_2^2| + |c_1^2 - c_2^2| + \\ &\quad |d_1^2 - d_2^2| + |e_1^2 - e_2^2| + |f_1^2 - f_2^2| + \\ &\quad |g_1^2 - g_2^2| + |h_1^2 - h_2^2| + |i_1^2 - i_2^2|) = \\ &\frac{1}{6} (|c_1^2 - c_2^2| + |f_1^2 - f_2^2| + |(1 - c_1^2 - f_1^2) - \\ &\quad (1 - c_2^2 - f_2^2)| + |b_1^2 - b_2^2| + |e_1^2 - e_2^2| + \\ &\quad |(1 - b_1^2 - e_1^2) - (1 - b_2^2 - e_2^2)| + |a_1^2 - a_2^2| + \\ &\quad |d_1^2 - d_2^2| + |(1 - a_1^2 - d_1^2) - (1 - a_2^2 - d_2^2)|) = \\ &\frac{1}{6} (|c_1^2 - c_2^2| + |f_1^2 - f_2^2| + |(c_2^2 + f_2^2) - (c_1^2 + f_1^2)|) + \\ &\frac{1}{6} (|b_1^2 - b_2^2| + |e_1^2 - e_2^2| + |(b_2^2 + e_2^2) - (b_1^2 + e_1^2)|) + \\ &\frac{1}{6} (|a_1^2 - a_2^2| + |d_1^2 - d_2^2| + |(a_2^2 + d_2^2) - (a_1^2 + d_1^2)|) \leq \\ &\frac{1}{6} (c_1^2 + f_1^2 + c_2^2 + f_2^2) + \frac{1}{6} (b_1^2 + e_1^2 + b_2^2 + e_2^2) + \\ &\frac{1}{6} (a_1^2 + d_1^2 + a_2^2 + d_2^2) \leq \\ &\frac{1}{6} (1 + 1) + \frac{1}{6} (1 + 1) + \frac{1}{6} (1 + 1) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

2 三角 Pythagorean 模糊算子

基于 Pythagorean 模糊平均算子和 Pythagorean 模糊几何算子^[4]、广义毕达哥拉斯模糊集成算子^[10], 提出了三角 Pythagorean 模糊环境下的两个基本集结算子以及在此基础上的两个广义集结算子, 即三角 Pythagorean 模糊加权平均 (TPFWA) 算子、三角 Pythagorean 模糊加权几何 (TPFWG) 算子、广义三角 Pythagorean 模糊加权平均 (GTPFWA) 算子和广义三角 Pythagorean 模糊加权几何 (GTPFWG) 算子, 同时对集结算子应该满足的特性予以证明.

2.1 三角 Pythagorean 模糊加权平均算子

定义 7 $\tilde{\alpha}_i = \langle (a_i, b_i, c_i), (d_i, e_i, f_i) \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$ 是三角 Pythagorean 模糊数 (TPFN) 的一个

集合,则三角 Pythagorean 模糊加权平均 (Triangular pythagorean fuzzy weighted averaging, TPFWA) 算子定义如下:

$$\begin{aligned} \text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) = \\ w_1 \tilde{\alpha}_1 + w_2 \tilde{\alpha}_2 + \dots + w_n \tilde{\alpha}_n = \sum_{i=1}^n w_i \tilde{\alpha}_i, \end{aligned}$$

其中 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 为 $\tilde{\alpha}_i$ 相对应的权重向量,满足 $w_j \in [0, 1]$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$. 基于定义4中关于 TPFNs 的运算法则, TPFWA 算子满足如下定理.

定理2 令 $A = \{\tilde{\alpha}_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 TPFNs 的一个集合,则 TPFWA 算子的集结结果也是一个 TPFN, 表示为

$$\begin{aligned} \text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) = \\ \left\langle \left(\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i^2)^{w_i}}, \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - b_i^2)^{w_i}}, \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - c_i^2)^{w_i}}, \left(\prod_{i=1}^n d_i^{w_i}, \prod_{i=1}^n e_i^{w_i}, \prod_{i=1}^n f_i^{w_i} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

定理2可由数学归纳法证明得到,此略. 由定理2的证明过程可以观察到 TPFWA 算子分别满足幂等性、有界性和单调性.

性质1 (幂等性) 若

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_0 = \langle (a, b, c), (d, e, f) \rangle$$

对于任意 i 都成立,则有

$$\text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) = \tilde{\alpha}_0.$$

性质2 (有界性) 令

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha})^- &= \langle (\min_i a_i, \min_i b_i, \min_i c_i), \\ & \quad (\max_i d_i, \max_i e_i, \max_i f_i) \rangle, \\ (\tilde{\alpha})^+ &= \langle (\max_i a_i, \max_i b_i, \max_i c_i), \\ & \quad (\min_i d_i, \min_i e_i, \min_i f_i) \rangle, \end{aligned}$$

则 $(\tilde{\alpha})^- \leq \text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) \leq \tilde{\alpha}_0$.

性质3 (单调性) 令 $A = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n\}$, $B = \{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n\}$ 是两个不同的 TPFNs 集合,对于任意 i 都有 $\tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_i$, 则有

$$\text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) \leq \text{TPFWA}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n).$$

证明 1) 幂等性. 有

$$\begin{aligned} \text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) = \\ w_1 \tilde{\alpha}_0 + w_2 \tilde{\alpha}_0 + \dots + w_n \tilde{\alpha}_0 = \end{aligned}$$

$$\left\langle \left(\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i^2)^{w_i}}, \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - b_i^2)^{w_i}}, \right. \right.$$

$$\begin{aligned} \left. \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - c_i^2)^{w_i}}, \left(\prod_{i=1}^n d_i^{w_i}, \prod_{i=1}^n e_i^{w_i}, \prod_{i=1}^n f_i^{w_i} \right) \right\rangle = \\ \langle (a, b, c), (d, e, f) \rangle = \tilde{\alpha}_0. \end{aligned}$$

2) 有界性. 因为 $\min_i a_i \leq a_i \leq \max_i a_i$, 所以有

$$\begin{aligned} w_i (\min_i a_i) \leq w_i a_i \leq w_i (\max_i a_i) \Rightarrow \\ (\min_i a_i) \sum_{i=1}^n w_i \leq \sum_{i=1}^n w_i a_i \leq (\max_i a_i) \sum_{i=1}^n w_i \Rightarrow \\ (\min_i a_i) \leq \sum_{i=1}^n w_i a_i \leq (\max_i a_i). \end{aligned}$$

根据性质1有

$$(\tilde{\alpha})^- \leq \text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) \leq (\tilde{\alpha})^+.$$

3) 单调性. 对于任意 i 都有 $\tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_i$, 所以有

$$\sum_{i=1}^n w_i \tilde{\alpha}_i \leq \sum_{i=1}^n w_i \tilde{\beta}_i.$$

结合定义1如下不等式成立:

$$\text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) \leq (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n). \quad \square$$

2.2 广义三角 Pythagorean 模糊加权平均算子

定义8 $\tilde{\alpha}_i = \langle (a_i, b_i, c_i), (d_i, e_i, f_i) \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 TPFN 的一个集合,则广义三角 Pythagorean 模糊加权平均 (Generalized triangular Pythagorean fuzzy weighted averaging, GTPFWA) 算子定义为

$$\begin{aligned} \text{GTPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) = \\ w_1 (\tilde{\alpha}_1)^\lambda + w_2 (\tilde{\alpha}_2)^\lambda + \dots + w_n (\tilde{\alpha}_n)^\lambda = \\ \left(\sum_{i=1}^n w_i (\tilde{\alpha}_i)^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}}. \end{aligned}$$

其中: $\lambda > 0$, 起调节作用; w 同定义6.

当 $\lambda = 1$ 时, GTPFWA 算子退化为 TPFWA 算子. 基于定义4关于 TPFNs 的运算法则, GTPFWA 算子的计算结果满足如下定理.

定理3 令 $A = \{\tilde{\alpha}_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 TPFNs 的一个集合,则 GTPFWA 算子的集结结果也是一个 TPFN, 表示为

$$\text{GTPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) =$$

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\left[\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i^{2\lambda})^{w_i}} \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \left[\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - b_i^{2\lambda})^{w_i}} \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \right. \right. \\ \left. \left. \left[\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - c_i^{2\lambda})^{w_i}} \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \right. \right. \\ \left. \left. \left(\sqrt{1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n [1 - (1 - d_i^2)^\lambda]^{w_i} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}}, \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left\langle \left(\sqrt{1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n [1 - (1 - e_i^2)^\lambda] w_i \right\}^{\frac{1}{\lambda}}}, \sqrt{1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n [1 - (1 - f_i^2)^\lambda] w_i \right\}^{\frac{1}{\lambda}}} \right) \right\rangle.$$

2.3 三角 Pythagorean 模糊加权几何算子

定义9 $\tilde{\alpha}_i = \langle (a_i, b_i, c_i), (d_i, e_i, f_i) \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 TPFNs 的一个集合, 则三角 Pythagorean 模糊加权几何 (Triangular Pythagorean fuzzy weighted geometric, TPFWG) 算子定义为

$$\begin{aligned} \text{TPFWG}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_n) = \\ (\tilde{\alpha}_1)^{w_1} \times (\tilde{\alpha}_2)^{w_2} \times \dots \times (\tilde{\alpha}_n)^{w_n} = \prod_{i=1}^n (\tilde{\alpha}_i)^{w_i}. \end{aligned}$$

TPFWG 算子满足如下定理.

定理4 令 $A = \{\tilde{\alpha}_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 TPFNs 的一个集合, 则 TPFWG 算子的集结结果也是一个 TPFN, 表示为

$$\begin{aligned} \text{TPFWG}(\alpha_1, \alpha_2) = \\ \left\langle \left(\prod_{i=1}^n a_i^{w_i}, \prod_{i=1}^n b_i^{w_i}, \prod_{i=1}^n c_i^{w_i} \right), \left(\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_i^2)^{w_i}}, \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - e_i^2)^{w_i}}, \sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - f_i^2)^{w_i}} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

TPFWG 算子所满足的幂等性、有界性和单调性的表达式与 TPFWA 算子的相似, 此略.

2.4 广义三角 Pythagorean 模糊加权几何算子

定义10 $\tilde{\alpha}_i = \langle (a_i, b_i, c_i), (d_i, e_i, f_i) \rangle (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 TPFN 的一个集合, 则广义三角 Pythagorean 模糊加权几何 (Generalized triangular Pythagorean fuzzy weighted geometric, GTPFWG) 算子定义为

$$\begin{aligned} \text{GTPFWG}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) = \\ \frac{1}{\lambda} [(\lambda \tilde{\alpha}_1)^{w_1} \times (\lambda \tilde{\alpha}_2)^{w_2} \times \dots \times (\lambda \tilde{\alpha}_n)^{w_n}] = \frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^n (\lambda \tilde{\alpha}_i)^{w_i}, \end{aligned}$$

其中 w 表示同上. 当 $\lambda = 1$ 时, GTPFWG 算子退化为 TPFWG 算子, GTPFWG 算子满足如下定理.

定理5 令 $A = \{\tilde{\alpha}_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 TPFNs

的一个集合, 则 GTPFWG 算子的集结结果也是一个 TPFN, 表示为

$$\begin{aligned} \text{GTPFWG}(\alpha_1, \alpha_2) = \\ \left\langle \left(\sqrt{1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n [1 - (1 - a_i^2)^\lambda] w_i \right\}^{\frac{1}{\lambda}}}, \sqrt{1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n [1 - (1 - c_i^2)^\lambda] w_i \right\}^{\frac{1}{\lambda}}}, \left(\left[\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_i^{2\lambda}) w_i} \right]^\lambda, \left[\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - e_i^{2\lambda}) w_i} \right]^\lambda, \left[\sqrt{1 - \prod_{i=1}^n (1 - f_i^{2\lambda}) w_i} \right]^\lambda \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

3 模型构建

对三角 Pythagorean 模糊环境下的多准则决策问题进行分析: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} (m \geq 2)$ 是有 m 个方案的集合, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是有 n 个准则的决策准则集, $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是与准则集相对应的权重向量, 满足 $0 \leq w_j \leq 1$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

定义方案 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 在准则 $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 下的估计值为三角 Pythagorean 模糊数的表达形式, 即 $\tilde{C}_j(x_i) = \langle (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), (d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}) \rangle$, 则 $R = (\tilde{C}_j(x_i))_{m \times n}$ 是一个 Pythagorean 模糊决策矩阵. 所以, 元素是 TPFNs 的多准则决策问题为如表 1 所示的矩阵形式. 矩阵中元素 $\tilde{C}_j(x_i) = \langle (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), (d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}) \rangle$ 是一个 TPFN, $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \subset [0, 1]$ 表示方案 x_i 满足准则 C_j 的值, $(d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}) \subset [0, 1]$ 表示方案 x_i 不满足准则 C_j 的值, 且共同满足 $c_{ij}^2 + f_{ij}^2 \leq 1 (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$.

下面提出三角 Pythagorean 模糊环境下基于 TFPWA 算子和 TFPWG 算子解决多准则决策问题的具体步骤, 见图 1, 通过将成本型准则所对应的评价信息做求补运算来进行标准化.

表 1 元素是 TPFNs 的多准则决策问题的矩阵表示

	C_1	C_2	\dots	C_n
x_1	$\langle (a_{11}, b_{11}, c_{11}), (d_{11}, e_{11}, f_{11}) \rangle$	$\langle (a_{12}, b_{12}, c_{12}), (d_{12}, e_{12}, f_{12}) \rangle$	\dots	$\langle (a_{1n}, b_{1n}, c_{1n}), (d_{1n}, e_{1n}, f_{1n}) \rangle$
x_2	$\langle (a_{21}, b_{21}, c_{21}), (d_{21}, e_{21}, f_{21}) \rangle$	$\langle (a_{22}, b_{22}, c_{22}), (d_{22}, e_{22}, f_{22}) \rangle$	\dots	$\langle (a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}), (d_{2n}, e_{2n}, f_{2n}) \rangle$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_m	$\langle (a_{m1}, b_{m1}, c_{m1}), (d_{m1}, e_{m1}, f_{m1}) \rangle$	$\langle (a_{m2}, b_{m2}, c_{m2}), (d_{m2}, e_{m2}, f_{m2}) \rangle$	\dots	$\langle (a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}), (d_{mn}, e_{mn}, f_{mn}) \rangle$

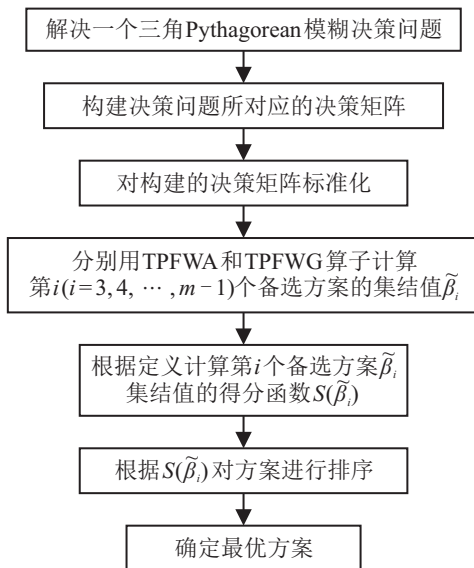


图1 多准则决策问题程序

4 应用实例

为了验证本文所提出算子的实用性,对Pranab Biswas等^[28]提出的医药代表选择问题进行计算与分析,该问题是涉及到TPFNs的一个多属性决策问题.现有一家制药公司欲重新雇佣一名医药代表,最后一个阶段对4名候选人 $x_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 在5个准则下进行考察.对应于准则的权重向量为 $W = (0.1, 0.25, 0.25, 0.15, 0.25)^T$.准则集依照次序分别表示:口语交际能力、过往经历、一般能力、个人意愿和自信.4位候选人在每个准则下的评价值所在的决策矩阵见表2,表中元素分别为每一位候选人在相对应准则下的隶属度与非隶属度.

为了选出最适合的医院代表,现在分别使用TPFWA算子和TPFWG算子进行计算分析.

表2 医药代表选择算例对应的决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
x_1	$\langle(0.8, 0.85, 0.9), (0.05, 0.1, 0.15)\rangle$	$\langle(0.5, 0.55, 0.6), (0.2, 0.25, 0.3)\rangle$	$\langle(0.7, 0.75, 0.8), (0.1, 0.15, 0.2)\rangle$	$\langle(0.8, 0.85, 0.9), (0.05, 0.1, 0.15)\rangle$	$\langle(0.7, 0.75, 0.8), (0.1, 0.15, 0.2)\rangle$
x_2	$\langle(0.5, 0.55, 0.6), (0.2, 0.25, 0.3)\rangle$	$\langle(0.7, 0.75, 0.8), (0.1, 0.15, 0.2)\rangle$	$\langle(0.8, 0.85, 0.9), (0.05, 0.1, 0.15)\rangle$	$\langle(0.7, 0.75, 0.8), (0.1, 0.15, 0.2)\rangle$	$\langle(0.7, 0.75, 0.8), (0.1, 0.15, 0.2)\rangle$
x_3	$\langle(0.4, 0.45, 0.5), (0.35, 0.4, 0.45)\rangle$	$\langle(0.5, 0.55, 0.6), (0.2, 0.25, 0.3)\rangle$	$\langle(0.4, 0.45, 0.5), (0.35, 0.4, 0.45)\rangle$	$\langle(0.4, 0.45, 0.5), (0.35, 0.4, 0.45)\rangle$	$\langle(0.5, 0.55, 0.6), (0.2, 0.25, 0.3)\rangle$
x_4	$\langle(0.4, 0.45, 0.5), (0.35, 0.4, 0.45)\rangle$	$\langle(0.5, 0.55, 0.6), (0.2, 0.25, 0.3)\rangle$	$\langle(0.4, 0.45, 0.5), (0.35, 0.4, 0.45)\rangle$	$\langle(0.7, 0.75, 0.8), (0.1, 0.15, 0.2)\rangle$	$\langle(0.7, 0.75, 0.8), (0.1, 0.15, 0.2)\rangle$

表3 分别由TPFWA和TPFWG算子计算相关结果及排名

	TPFWA算子		TPFWG算子		排名
	集结值 $\tilde{\beta}_i$	得分函数 $S(\tilde{\beta}_i)$	集结值 $\tilde{\beta}_i$	得分函数 $S(\tilde{\beta}_i)$	
x_1	$\langle(0.6966, 0.7492, 0.8035), (0.1, 0.154, 0.206)\rangle$	0.8461	$\langle(0.6654, 0.7161, 0.7667), (0.1254, 0.172, 0.2201)\rangle$	0.8277	2
x_2	$\langle(0.717, 0.7687, 0.8216), (0.0901, 0.1426, 0.1938)\rangle$	0.857	$\langle(0.6998, 0.7502, 0.8005), (0.1057, 0.1532, 0.202)\rangle$	0.8464	1
x_3	$\langle(0.4542, 0.5042, 0.5542), (0.2646, 0.3162, 0.3674)\rangle$	0.7181	$\langle(0.4472, 0.4975, 0.5477), (0.2867, 0.3355, 0.3848)\rangle$	0.7116	4
x_4	$\langle(0.5755, 0.6272, 0.6801), (0.1844, 0.2402, 0.294)\rangle$	0.7787	$\langle(0.5291, 0.5804, 0.6316), (0.2412, 0.2875, 0.3351)\rangle$	0.7514	3

4.1 TPFWA算子

Step 1: 标准化决策矩阵.

因为所有指标均为效益型指标,对于表3所示的决策矩阵不进行变换.

Step 2: 计算集结值.

根据定理1公式中TPFWA算子计算每个候选人 x_i 集结后的值,即 $\tilde{\beta}_i = \text{TPFWA}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$.

Step 3: 计算每一个集结值 $\tilde{\beta}_i$ 的得分函数 $S(\tilde{\beta}_i)$.

根据定义5得分函数的公式计算每一个集结值 $\tilde{\beta}_i$ 的得分函数 $S(\tilde{\beta}_i)$.

Step 4: 基于 $S(\tilde{\beta}_i)$ 确定最优方案.

根据 $S(\tilde{\beta}_i)$ 对候选人进行排序,得到 $x_2 \succ x_1 \succ$

$x_4 \succ x_3$,即第2位候选人是最为合适的医药代表.

4.2 TPFWG算子

TPFWG算子的计算过程与TPFWA算子类似,Step2中根据定理3 TFPWG算子来计算方案集结后的值,计算结果见表3,通过表3可得排名结果与TPFWA算子结果一样.

4.3 与其他方法的比较

本文算例同时与TOPSIS方法^[6]和文献[28]算例进行比较,结果见表4.表4中TOPSIS计算结果为各候选人的相对贴近度.基于文献[6]所提出的TOPSIS方法,确立每个方案的相对贴近度时采取定义6中欧氏距离和得分函数进行计算.

表 4 分别由 TPFWA 和 TPFGA 算子计算相关结果及排名

λ 取值	集结算子	得分函数 $S(\tilde{\beta}_1)$	得分函数 $S(\tilde{\beta}_2)$	得分函数 $S(\tilde{\beta}_3)$	得分函数 $S(\tilde{\beta}_4)$	排名
1	TPFWA 算子	0.846 1	0.857	0.718 1	0.748 1	(2,1,4,3)
2	GTPFWA 算子	0.850 2	0.859 2	0.719 6	0.786 8	(2,1,4,3)
5	GTPFWA 算子	0.860 7	0.865 4	0.724 3	0.775 6	(2,1,4,3)
10	GTPFWA 算子	0.872 2	0.874	0.729 7	0.799 1	(2,1,4,3)
20	GTPFWA 算子	0.884 1	0.885	0.735 1	0.816 5	(2,1,4,3)
50	GTPFWA 算子	0.894 1	0.894 7	0.641 2	0.791 2	(2,1,4,3)
100	GTPFWA 算子	0.845 5	0.845 8	0.643 3	0.653	(2,1,4,3)
1	TPFWG 算子	0.827 7	0.846 4	0.711 6	0.732 1	(2,1,4,3)
2	GTPFWG 算子	0.820 1	0.841 2	0.708 3	0.726 2	(2,1,4,3)
5	GTPFWG 算子	0.799 2	0.822 7	0.701 3	0.713 9	(2,1,4,3)
10	GTPFWG 算子	0.778 8	0.797 3	0.696	0.704 4	(2,1,4,3)
20	GTPFWG 算子	0.783 4	0.793 1	0.664 2	0.668 7	(2,1,4,3)
50	GTPFWG 算子	0.774 3	0.778 4	0.738 2	0.740 1	(2,1,4,3)
100	GTPFWG 算子	0.938 4	0.938 9	0.736 4	0.737 4	(2,1,4,3)
文献 [28]	TFNNA 算子	0.796 0	0.810 3	0.646 4	0.695 1	(2,1,4,3)
文献 [28]	TFNNW 算子	0.779 1	0.801 0	0.596 2	0.662 7	(2,1,4,3)
文献 [6]	TOPSIS 方法	0.628 3	0	5.215 7	4.347 9	(2,1,4,3)

4.4 灵敏度分析

为了检验 TPFWA 算子和 TPFWG 算子的准确性和稳定性,并得到计算结果及排名值随 λ 变换的情况,现将 λ 的值从 1 变化到 100,由本文所提 TPFWA 算子、 TPFWG 算子、 GTPFWA 算子和 GTPFWG 算子各自进行计算. 当 $\lambda = 1$ 时,GTPFWA 算子和 GTPFWG 算子分别退化为 TPFWA 算子和 TPFWG 算子,最后的计算结果见表 4. 由表 4 可以看到, $\lambda = 1$ 是决策者态度较为中立且最自然合理的一种状态,当 λ 逐渐增大时,尽管各备选方案的集结值和得分函数会不停变换,但是其排名值一直保持稳定,很好地表明了本文所提算子的合理性和稳定性. 同时在计算过程中发现,当 λ 逐渐增大到 20 时,广义三角 Pythagorean 模糊加权平均(GTPFWA)算子要优于广义三角 Pythagorean 模糊加权几何(GTPFWG)算子,后者的计算结果会先于前者出现 0. 因此,可以认为 TPFWA 算子在处理 Pythagorean 模糊信息时的灵敏性要优于 TPFWG 算子,同时 GTPFWA 算子优于 GTPFWG 算子. 由表 4 同样可以看出,本文与文献 [6] 和文献 [28] 所提出方法进行的比较分析也验证了所提出模型的有效性.

5 结 论

本文将 Pythagorean 模糊集中的隶属度和非隶属度用三角模糊数的形式进行表示,可以保留更多的不确定决策信息. 当对决策信息进行集结时,参考 Pythagorean 模糊集中给出的代数运算和欧氏距离表

示,给出了三角 Pythagorean 模糊集中相对应的代数运算和距离定义,提出了 TPFWA 和 TPFWG 算子,并通过解决医药代表选择决策问题验证了所提出算子的有效性. 为了验证所提出算子的稳定性又提出了 GTPFWA 和 GTPFWG 算子,通过 λ 的变化对算例作灵敏度分析. 在应用实例部分通过灵敏度分析和与其他已有方法进行比较分析,说明了本文所提模型的实用性. 将来的研究可以进一步观察 TPFWA 算子和 TPFWG 算子的各自应用范围.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [3] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.
- [4] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.
- [5] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.
- [6] Zhang X, Xu Z. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2014, 29(15): 1061-1078.
- [7] Garg H. A novel accuracy function under interval-valued Pythagorean fuzzy environment for solving multicriteria decision making problem[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 31(1): 529-540.

- [8] Garg H. A novel correlation coefficients between pythagorean fuzzy sets and its applications to decisionmaking processes[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2016, 31(12): 1234-1252.
- [9] Ren P, Xu Z, Gou X. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. *Applied Soft Computing*, 2016, 42: 246-259.
- [10] 刘卫锋, 常娟, 何霞. 广义毕达哥拉斯模糊集成算子及其决策应用[J]. *控制与决策*, 2016, 31(12): 2280-2286. (Liu W F, Chang J, He X. Generalized Pythagorean fuzzy aggregation operators and applications in decision making[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(12): 2280-2286.)
- [11] 刘卫锋, 杜迎雪, 常娟. 毕达哥拉斯模糊交叉影响集成算子及其决策应用[J]. *控制与决策*, 2017, 32(6): 1033-1040. (Liu W F, Du Y X, Chang J. Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and applications in decision making[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(6): 1033-1040.)
- [12] Zhang X. A novel approach based on similarity measure for pythagorean fuzzy multiple criteria group decision making[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2016, 31(6): 593-611.
- [13] Rajkuma A, Devadoss A V. A study on miracles through the holy bible using new triangular neutrosophic cognitive maps(TrNCMs)[J]. *Int J of Computer Application*, 2014, 4(4): 152-160.
- [14] Sujit Kumar De, Ismat Beg. Triangular dense fuzzy neutrosophic sets[J]. *Neutrosophic Sets and Systems*, 2016, 13: 24-37.
- [15] Esmailzadeh M, Esmailzadeh M. New distance between triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. *Advances in Computational Mathematics & Its Applications*, 2013, 2(3): 310-314.
- [16] Nan Jiangxia, Li Dengfeng, Zhang Maojun. A lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. *Int J of Computational Intelligence Systems*, 2010, 3(3): 280-289.
- [17] Li D F. A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 60(6): 1557-1570.
- [18] Li Dengfeng, Nan Jiangxia, Zhang Maojun. A ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and application to decision making[J]. *Int J of Computational Intelligence Systems*, 2010, 3(5): 522-530.
- [19] Dubois D, Foulloy L, Mauris G, et al. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities[J]. *Reliable Computing*, 2004, 10(4): 273-297.
- [20] Meng F, Lin J, Tan C, et al. A new multiplicative consistency based method for decision making with triangular fuzzy reciprocal preference relations[J]. *Fuzzy Sets & Systems*, 2016, 315: 1-25.
- [21] Zamri N, Abdullah L, Hitam M S, et al. A novel hybrid fuzzy weighted average for MCDM with interval, triangular type-2 fuzzy sets[J]. *Wseas Trans on Systems*, 2013, 12(4): 212-228.
- [22] Yong S Y, Sang U, Jin W Park. The generalized triangular fuzzy sets[J]. *J of the Chungcheong Mathematical Society*, 2009, 22(2): 161-170.
- [23] Wang J Q, Nie R, Zhang H Y, et al. New operators on triangular intuitionistic fuzzy numbers and their applications in system fault analysis[J]. *Information Sciences*, 2013, 251(12): 79-95.
- [24] Sankar P, Mondal S, Roy T K. Non-linear arithmetic operation on generalized triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, 2014, 20: 9-19.
- [25] Yu D. Triangular hesitant fuzzy set and its application to teaching quality evaluation[J]. *J of Information & Computational Science*, 2013, 10(7): 1925-1934.
- [26] Yu D. Prioritized information fusion method for triangular intuitionistic fuzzy set and its application to teaching quality evaluation[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2013, 28(5): 411-435.
- [27] Zhang X, Liu Peide. Method for aggregating triangular fuzzy intuitionistic fuzzy information and its application to decision making[J]. *Ukio Technolginis Ir Ekonominis Vystymas*, 2010, 16(2): 280-290.
- [28] Biswas P, Pramanik S, Giri B C. Aggregation of triangular fuzzy neutrosophic set information and its application to multi-attribute decision making[J]. *Neutrosophic Sets and Systems*, 2016, 12: 20-40.

作者简介

范建平(1975—), 男, 副教授, 博士, 从事决策科学与技术等研究, E-mail: fjp@sxu.edu.cn;

闫彦(1991—), 女, 硕士生, 从事决策科学与技术的研究, E-mail: 707548108@qq.com;

吴美琴(1980—), 女, 博士, 从事决策科学与技术等研究, E-mail: wmq80@sxu.edu.cn.

(责任编辑: 郑晓蕾)