

线性连续时间时滞系统的有限时间有界跟踪控制

廖福成[†], 吴莹雪

(北京科技大学 数理学院, 北京 100083)

摘 要: 研究一类线性连续时间时滞系统的有限时间有界跟踪控制问题. 首先, 采用预见控制理论中求导的方法构造带有时滞的误差系统, 把误差信号的信息包含在误差系统的状态向量中, 再将其作为误差系统的输出向量; 其次, 通过为误差系统设计一个有记忆的状态反馈控制器, 把问题转化为研究带有时滞的误差系统的闭环系统输入-输出有限时间稳定问题; 再次, 借鉴输入-输出有限时间稳定的研究方法和线性矩阵不等式的方法, 通过构造 Lyapunov-Krasovskii 函数, 给出由一组线性矩阵不等式表征的控制器增益矩阵的设计方法, 由此得到原系统的一个有限时间有界跟踪控制器; 最后, 通过一个数值实例验证所设计的控制器的有效性和优越性.

关键词: 连续时间时滞系统; 误差系统; 预见控制; 输入-输出有限时间稳定; 跟踪控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite-time bounded tracking control for linear continuous systems with time-delay

LIAO Fu-cheng[†], WU Ying-xue

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: A finite-time bounded tracking control problem is investigated for a class of linear continuous systems with time-delay. Firstly, by applying a derivation method in the theory of preview control to constructing the error system with time-delay, the error signal is included in the state vector of it and then considered as the output vector. Then, the problem is transformed into an input-output finite-time stability problem of the closed-loop system of the error system, by designing a memory state feedback controller for the error system. Furthermore, based on the research methods of input-output finite-time stability and linear matrix inequation methods, the controller gains formulated in forms of linear matrix inequalities are provided by constructing a Lyapunov-Krasovskii functional. From this, a finite-time bounded tracking controller of the original system is obtained. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness and superiority of the proposed controller.

Keywords: continuous systems with time-delay; error system; preview control; input-output finite-time stability; tracking control; linear matrix inequality

0 引 言

1961年, Dorato^[1]首次提出了有限时间稳定的概念. 随后, Kushner^[2]和 Weiss等^[3-4]许多学者对其进行了深入研究. 2010年, Amato等^[5]在前人研究的基础上,提出了输入-输出有限时间稳定的概念,其描述的是,当给定系统的初始条件的界限时,其输出信号在一段特定时间区间内始终不超过某个设定区域的特性. 随后, Amato等^[6]将输入-输出有限时间稳定的概念推广至脉冲系统,给出了保证系统输入-输出有限时间稳定的充分条件,并给出了静态输出反馈控制器的设计方法. 文献[7]和文献[8]分别给出了保证脉冲系统输入-输出有限时间稳定的充分必要条件,进一

步推进了文献[6]的结果. 2014年, Amato等^[9]研究了线性时变系统的输入-输出有限时间稳定问题,并给出了在 L_∞ 和 L_2 型输入下的输入-输出有限时间稳定的充分条件和充分必要条件.

自2010年以来,许多学者在 Amato等研究的基础上,对各类系统的输入-输出有限时间稳定展开了广泛的研究,并在时滞系统^[10-12]、线性系统^[13]、模糊随机系统^[14]、非线性系统^[15]和混杂系统^[16-17]等方面取得了一定的成果. 例如,在时滞系统的研究中,文献[10]通过构造 Lyapunov-Krasovskii 函数,给出了线性时滞系统输入-输出有限时间稳定的充分条件,并将其应用于带有输入时滞的系统的振动主动控制

收稿日期: 2018-02-09; 修回日期: 2018-07-26.

基金项目: 科技部重点研发计划项目(2017YFF0207400).

[†]通讯作者. E-mail: fcliao@ustb.edu.cn.

中. 文献[11]分析了含有时变时滞的离散时间切换系统的输入-输出有限时间稳定性, 并针对两种不同的输入信号分别给出了系统输入-输出有限时间稳定的充分条件. 基于文献[11], 文献[12]考虑了具有时变和分布时滞的切换系统的输入-输出有限时间控制问题, 通过构造多元线性 Lyapunov 函数并使用平均驻留时间的方法为系统设计了状态反馈控制器.

本文在文献[10]的基础上, 研究受干扰影响的线性连续时间时滞系统在有限时间内的跟踪控制问题. 首先, 采用预见控制理论的方法构造误差系统^[18-19], 将问题转化为误差系统的输入-输出有限时间稳定问题; 然后, 借鉴时滞系统稳定性^[20-21]和线性矩阵不等式(LMI)的有关理论和方法^[22], 为误差系统设计有记忆的状态反馈控制器, 从而导出原控制系统的有限时间有界跟踪控制器.

全文沿用如下记号: $P > 0$ ($P < 0$) 表示 P 为对称正定(负定)矩阵; $P \geq 0$ ($P \leq 0$) 表示 P 为对称半正定(半负定)矩阵; $P > Q$ ($P < Q$, $P \geq Q$, $P \leq Q$) 表示 $P - Q > 0$ ($P - Q < 0$, $P - Q \geq 0$, $P - Q \leq 0$); $\lambda_{\max}(A)$ ($\lambda_{\min}(A)$) 表示对称矩阵 A 的最大(最小)特征值; $\text{diag}(\cdot)$ 表示分块对角矩阵.

1 预备知识和基本概念

考虑线性连续时间时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Ew(t), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态向量, $w(t) \in R^p$ 为干扰向量, $y(t) \in R^q$ 为输出向量, τ 为状态时滞, $\phi(t)$ 为状态向量的初始函数, A , A_d , E 和 C 为常数矩阵.

输入-输出有限时间稳定性的基本定义为^[10]: 给定标量 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $T > 0$ 及矩阵 $\Gamma > 0$, 如果在零初始条件 ($\phi(t) = 0, t \in [-\tau, 0]$) 下, 当 $\int_0^T w^T(t) \times w(t) dt \leq c_1^2$ 时, 对于一切 $t \in [0, T]$, 都有 $y^T(t) \Gamma y(t) < c_2^2$, 则称系统(1)关于 (c_1, c_2, Γ, T) 是输入-输出有限时间稳定的.

本文将推广以上概念, 研究受控系统的有限时间有界跟踪问题. 所谓有限时间有界跟踪, 是指系统(1)的输出 $y(t)$ 在一定条件下始终处于某个目标信号的一个 c_2 邻域内. 假设目标信号为 $r(t) \in R^q$ 且 $r(t) = \eta(t), t \in [-\tau, 0]$, 其中 $\eta(t)$ 是初始函数, 用 $e(t)$ 表示误差信号, 即

$$e(t) = y(t) - r(t). \quad (2)$$

将 $y(t)$ 向左延拓到时间集 $[-\tau, 0]$, 仍然使得 $y(t) =$

$Cx(t)$, 则 $e(t)$ 的初始条件为 $e(t) = C\phi(t) - \eta(t), t \in [-\tau, 0]$.

有限时间有界跟踪的严格定义如下.

定义1 给定标量 $c_1 > 0, c_2 > 0, T > 0$ 及正定矩阵 $\Gamma > 0$, 如果在零初始条件 ($t \in [-\tau, 0], r(t) = \eta(t) = 0, e(t) = C\phi(t) - \eta(t) = 0$) 下, 当 $\int_0^T w^T(t)w(t)dt \leq c_1^2$ 时, 对于一切 $t \in [0, T]$, 都有 $e^T(t)\Gamma e(t) < c_2^2$, 则称系统(1)关于 (c_1, c_2, Γ, T) 对目标信号 $r(t)$ 实现了有限时间有界跟踪.

本文需要用到下面两个引理.

引理1 (Schur 补引理)^[22] 矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0$$

的充分必要条件是以下条件之一成立:

- 1) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 2) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

引理2^[23] 对于任意正定矩阵 $M \in R^{n \times n}$, 下列不等式成立:

$$-\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) M \dot{x}(s) ds \leq [x^T(t) \quad x^T(t-\tau)] \begin{bmatrix} -M & M \\ M & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}.$$

2 问题描述及基本假设

考虑带有干扰的线性连续时间时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + Ew(t), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态向量, $u(t) \in R^m$ 为控制输入向量, $w(t) \in R^p$ 为干扰向量, $y(t) \in R^q$ 为输出向量, τ 为状态时滞, $\phi(t)$ 为状态向量的初始函数. $A \in R^{n \times n}$, $A_d \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $E \in R^{n \times p}$ 和 $C \in R^{q \times n}$ 为常数矩阵.

对系统(3)的目标信号和干扰信号作如下假设:

假设1 设目标信号 $r(t)$ 满足条件

$$\int_0^T \dot{r}^T(t) \dot{r}(t) dt \leq c_{11}^2,$$

其中 c_{11} 是一个给定的正数.

假设2 设干扰信号 $w(t)$ 满足条件

$$\int_0^T \dot{w}^T(t) \dot{w}(t) dt \leq c_{12}^2,$$

其中 c_{12} 是一个给定的正数.

本文的目的是针对线性连续时间时滞系统(3)设计一个有记忆的状态反馈控制器, 使得系统(3)的闭环系统的输出 $y(t)$ 关于 (c_1, c_2, Γ, T) 对目标信号 $r(t)$ 实现有限时间有界跟踪.

首先,采用预见控制理论中的常用方法构造一个扩大误差系统,使得误差信号 $e(t)$ 包含在误差系统的状态向量中;然后,针对误差系统的闭环系统构造 Lyapunov-Krasovskii 函数,给出其输入-输出有限时间稳定的充分条件,并由此得到系统(3)的闭环系统的输出对目标信号实现有限时间有界跟踪的充分条件和相应的控制器。

3 扩大误差系统的构造

对式(3)的第1式两边分别求导,得到

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}(t)) = A\dot{x}(t) + A_d\dot{x}(t - \tau) + B\dot{u}(t) + E\dot{w}(t), \tag{4}$$

对式(2)两边求导,得到

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{r}(t) = C\dot{x}(t) - \dot{r}(t). \tag{5}$$

引入形式状态向量

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

和矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, G_r = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_w = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}, G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix},$$

综合式(4)和(5),得到

$$\dot{X}_0(t) = \Phi X_0(t) + G\dot{u}(t) + G_d X_0(t - \tau) + G_r \dot{r}(t) + G_w \dot{w}(t). \tag{6}$$

再引入输出 $e(t) = C_0 X_0(t)$, 其中 $C_0 = [I \ 0]$, 得到误差系统

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = \Phi X_0(t) + G\dot{u}(t) + G_d X_0(t - \tau) + G_r \dot{r}(t) + G_w \dot{w}(t), \\ e(t) = C_0 X_0(t), \\ X_0(t) = \phi_0(t), t \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{7}$$

这里 $\phi_0(t) = \begin{bmatrix} C\phi(t) - \eta(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}$. 这就是所需要的误差系统. 因为从系统(3)的输出方程 $y(t) = Cx(t)$ 得知 $y(t)$ 是可测量的, 并且目标信号 $r(t)$ 是已知的, 所以把 $e(t)$ 作为系统(6)的输出向量是合理的。

显然,如果系统(7)的闭环系统的输出 $e(t)$ 是有限时间有界的, 则 $y(t)$ 对 $r(t)$ 实现了有限时间有界跟踪. 因此, 本文需要对系统(7)设计这样的控制器。

4 控制器的设计

为系统(7)设计如下有记忆的状态反馈控制器:

$$\dot{u}(t) = K_1 X_0(t) + K_2 X_0(t - \tau),$$

则系统(7)的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = (\Phi + GK_1)X_0(t) + (G_d + GK_2) \times \\ \quad X_0(t - \tau) + G_r \dot{r}(t) + G_w \dot{w}(t), \\ e(t) = C_0 X_0(t), \\ X_0(t) = \phi_0(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{8}$$

与系统(1)比较可以发现, 系统(8)中除干扰项 $G_w \dot{w}(t)$ 外, 还有一项 $G_r \dot{r}(t)$, 因此, 把 $\dot{r}(t)$ 也作为干扰来处理. $G_r \dot{r}(t)$ 与 $G_w \dot{w}(t)$ 一起, 可以合成一个新的干扰向量

$$W(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}.$$

于是, 闭环系统(8)变为

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = \bar{\Phi} X_0(t) + \bar{G}_d X_0(t - \tau) + \bar{E}W(t), \\ e(t) = C_0 X_0(t), \\ X_0(t) = \phi_0(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{9}$$

其中: $\bar{\Phi} = \Phi + GK_1, \bar{G}_d = G_d + GK_2, \bar{E} = [G_r \ G_w]$.

注意, 系统(9)完全具有系统(1)的形式, 这正是设计控制器所需要的。

下面给出本文的第1个主要定理。

定理1 在假设1和假设2成立的条件下, 如果对于给定的标量 $\gamma \geq 0$, 存在适当维数的矩阵 $P > 0, Q > 0, R > 0, S > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P\bar{\Phi} - \gamma P + Q - \frac{1}{\tau} R \\ \bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau} R \\ \bar{E}^T P \\ \tau R \bar{\Phi} \\ P\bar{G}_d + \frac{1}{\tau} R \quad P\bar{E} \quad \tau \bar{\Phi}^T R \\ -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R \quad 0 \quad \tau \bar{G}_d^T R \\ 0 \quad -S \quad \tau \bar{E}^T R \\ \tau R \bar{G}_d \quad \tau R \bar{E} \quad -\tau R \end{bmatrix} \rightarrow \leftarrow < 0, \tag{10}$$

$$C_0^T \Gamma C_0 - P < 0, \tag{11}$$

$$S < \frac{c_2^2}{e^{\gamma T} c_1^2} I \tag{12}$$

成立, 则对于一切 $t \in [0, T]$, 都有 $e^T(t) \Gamma e(t) \leq c_2^2$, 即闭环系统(9)关于 (c_1, c_2, Γ, T) 对目标信号可以实现有限时间有界跟踪. 其中: $c_1^2 \geq c_{11}^2 + c_{12}^2, \dot{u}(t) = K_1 X_0(t) + K_2 X_0(t - \tau)$.

证明 对于系统(9), 利用满足条件的正定矩阵 P, Q, R 构造正定的 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$\begin{aligned}
V(t) = & X_0^T(t)PX_0(t) + \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s)QX_0(s)ds + \\
& \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{X}_0^T(s)R\dot{X}_0(s)dsd\theta. \tag{13}
\end{aligned}$$

沿着系统(9)的轨迹对V(t)关于时间t求导,得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = & \dot{X}_0^T(t)PX_0(t) + X_0^T(t)P\dot{X}_0(t) + \\
& \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s)QX_0(s)ds + \\
& e^{\gamma(t-t)} X_0^T(t)QX_0(t) - \\
& e^{\gamma(t-(t-\tau))} X_0^T(t-\tau)QX_0(t-\tau) + \\
& \int_{-\tau}^0 \dot{X}_0^T(t)R\dot{X}_0(t)d\theta - \\
& \int_{-\tau}^0 \dot{X}_0^T(t+\theta)R\dot{X}_0(t+\theta)d\theta = \\
& \dot{X}_0^T(t)PX_0(t) + X_0^T(t)P\dot{X}_0(t) + \\
& \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s)QX_0(s)ds + X_0^T(t)QX_0(t) - \\
& e^{\gamma\tau} X_0^T(t-\tau)QX_0(t-\tau) + \tau \dot{X}_0^T(t)R\dot{X}_0(t) - \\
& \int_{t-\tau}^t \dot{X}_0^T(s)R\dot{X}_0(s)ds.
\end{aligned}$$

利用系统(9)的状态方程,继续计算V̇(t),可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = & [X_0^T(t)(\bar{\Phi}^T P + P\bar{\Phi})X_0(t) + X_0^T(t-\tau)\bar{G}_d^T \times \\
& PX_0(t) + W^T(t)\bar{E}^T PX_0(t) + X_0^T(t)P\bar{G}_d \times \\
& X_0(t-\tau) + X_0^T(t)P\bar{E}W(t) + X_0^T(t)QX_0(t) - \\
& e^{\gamma\tau} X_0^T(t-\tau)QX_0(t-\tau)] + \tau \dot{X}_0^T(t)R\dot{X}_0(t) - \\
& \int_{t-\tau}^t \dot{X}_0^T(s)R\dot{X}_0(s)ds + \\
& \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s)QX_0(s)ds. \tag{14}
\end{aligned}$$

令ξ(t) = [X0(t); X0(t-τ); W(t)]^T,式(14)的[·]内的部分实际上是ξ(t)的二次型,于是式(14)可以写为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = & \xi^T(t) \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P\bar{\Phi} + Q & P\bar{G}_d & P\bar{E} \\ \bar{G}_d^T P & -e^{\gamma\tau} Q & 0 \\ \bar{E}^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t) + \\
& \tau \dot{X}_0^T(t)R\dot{X}_0(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{X}_0^T(s)R\dot{X}_0(s)ds + \\
& \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s)QX_0(s)ds. \tag{15}
\end{aligned}$$

此外,由系统(9)的第1个方程知

$$\dot{X}_0(t) = \bar{\Phi}X_0(t) + \bar{G}_d X_0(t-\tau) + \bar{E}W(t) =$$

$$[\bar{\Phi} \ \bar{G}_d \ \bar{E}]\xi(t),$$

因此

$$\begin{aligned}
& \tau \dot{X}_0^T(t)R\dot{X}_0(t) = \\
& \tau ([\bar{\Phi} \ \bar{G}_d \ \bar{E}]\xi(t))^T R([\bar{\Phi} \ \bar{G}_d \ \bar{E}]\xi(t)) = \\
& \tau \xi^T(t) \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T \\ \bar{G}_d^T \\ \bar{E}^T \end{bmatrix} R[\bar{\Phi} \ \bar{G}_d \ \bar{E}]\xi(t). \tag{16}
\end{aligned}$$

由引理2可得

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-\tau}^t \dot{X}_0^T(s)R\dot{X}_0(s)ds \leq \\
& \frac{1}{\tau} [X_0^T(t) \ X_0^T(t-\tau)] \begin{bmatrix} -R & R \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(t) \\ X_0(t-\tau) \end{bmatrix} = \\
& \frac{1}{\tau} \xi^T(t) \begin{bmatrix} -R & R & 0 \\ R & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t). \tag{17}
\end{aligned}$$

将式(16)和(17)代入(15),可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & \xi^T(t) \left(\begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P\bar{\Phi} + Q & P\bar{G}_d & P\bar{E} \\ \bar{G}_d^T P & -e^{\gamma\tau} Q & 0 \\ \bar{E}^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. \tau \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T \\ \bar{G}_d^T \\ \bar{E}^T \end{bmatrix} R[\bar{\Phi} \ \bar{G}_d \ \bar{E}] + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} -R & R & 0 \\ R & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \xi(t) + \\
& \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s)QX_0(s)ds = \\
& \xi^T(t) \left(\begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P\bar{\Phi} + Q - \frac{1}{\tau} R & P\bar{G}_d + \frac{1}{\tau} R & P\bar{E} \\ \bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau} R & -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R & 0 \\ \bar{E}^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. \tau \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T \\ \bar{G}_d^T \\ \bar{E}^T \end{bmatrix} R[\bar{\Phi} \ \bar{G}_d \ \bar{E}] \right) \xi(t) + \\
& \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s)QX_0(s)ds. \tag{18}
\end{aligned}$$

若条件(10)成立,则由式(18)得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & \xi^T(t) \left(\begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P\bar{\Phi} + Q - \frac{1}{\tau} R & & \\ & \bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau} R & \\ & \bar{E}^T P & \\ & & & -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \\
& \leftarrow \begin{bmatrix} P\bar{G}_d + \frac{1}{\tau} R & P\bar{E} \\ -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tau \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T \\ \bar{G}_d^T \\ \bar{E}^T \end{bmatrix} R[\bar{\Phi} \quad \bar{G}_d \quad \bar{E}] \xi(t) + \\ & \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s) Q X_0(s) ds \leq \\ & \gamma X_0^T(t) P X_0(t) + W^T(t) S W(t) + \\ & \gamma \int_{t-\tau}^t e^{\gamma(t-s)} X_0^T(s) Q X_0(s) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)的具体导出过程如下.

由引理 1, 不等式(10)成立的充要条件是不等式 $-\tau R < 0$ 和

$$\begin{aligned} \Psi = & \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P \bar{\Phi} + Q - \gamma P - \frac{1}{\tau} R & P \bar{G}_d + \frac{1}{\tau} R & P \bar{E} \\ \bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau} R & -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R & 0 \\ \bar{E}^T P & 0 & -S \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} \tau \bar{\Phi}^T R \\ \tau \bar{G}_d^T R \\ \tau \bar{E}^T R \end{bmatrix} (-\tau R)^{-1} [\tau R \bar{\Phi} \quad \tau R \bar{G}_d \quad \tau R \bar{E}] < 0 \end{aligned}$$

同时成立. 因为 $-\tau R < 0$ 是自然成立的, 所以式(10)成立的充要条件是 $\Psi < 0$. 进一步计算 Ψ , 得到

$$\begin{aligned} \Psi = & \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P \bar{\Phi} + Q - \gamma P - \frac{1}{\tau} R & P \bar{G}_d + \frac{1}{\tau} R & P \bar{E} \\ \bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau} R & -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R & 0 \\ \bar{E}^T P & 0 & -S \end{bmatrix} + \\ & \tau \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T \\ \bar{G}_d^T \\ \bar{E}^T \end{bmatrix} R[\bar{\Phi} \quad \bar{G}_d \quad \bar{E}] = \\ & \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P \bar{\Phi} + Q - \frac{1}{\tau} R & P \bar{G}_d + \frac{1}{\tau} R & P \bar{E} \\ \bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau} R & -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R & 0 \\ \bar{E}^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ & \tau \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T \\ \bar{G}_d^T \\ \bar{E}^T \end{bmatrix} R[\bar{\Phi} \quad \bar{G}_d \quad \bar{E}] + \begin{bmatrix} -\gamma P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

把式(20)代入 $\Psi < 0$, 并将最后一项移到不等式右边, 得到

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T P + P \bar{\Phi} + Q - \frac{1}{\tau} R & P \bar{G}_d + \frac{1}{\tau} R & P \bar{E} \\ \bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau} R & -e^{\gamma\tau} Q - \frac{1}{\tau} R & 0 \\ \bar{E}^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\tau \begin{bmatrix} \bar{\Phi}^T \\ \bar{G}_d^T \\ \bar{E}^T \end{bmatrix} R[\bar{\Phi} \quad \bar{G}_d \quad \bar{E}] < \begin{bmatrix} \gamma P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}.$$

将上式左乘 $\xi^T(t)$ 、右乘 $\xi(t)$ 便得到式(19).

把式(19)右边与 $V(t)$ 作比较可知

$$\dot{V}(t) \leq \gamma V(t) + W^T(t) S W(t),$$

即

$$\dot{V}(t) - \gamma V(t) \leq W^T(t) S W(t).$$

上式等价于

$$\frac{d}{dt}(e^{-\gamma t} V(t)) \leq e^{-\gamma t} W^T(t) S W(t). \quad (21)$$

由零初始条件的假设可知

$$\begin{aligned} V(0) = & X_0^T(0) P X_0(0) + \int_{-\tau}^0 e^{\gamma(-s)} X_0^T(s) Q X_0(s) ds + \\ & \int_{-\tau}^0 \int_{\theta}^0 \dot{X}_0^T(s) R \dot{X}_0(s) ds d\theta = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

因此, 对式(21)从 0 到 t 积分, 并在不等式两边同乘以 $e^{\gamma t}$, 得到

$$V(t) \leq e^{\gamma t} \int_0^t e^{-\gamma s} W^T(s) S W(s) ds. \quad (23)$$

再由条件(11)和(23)得知, 当 $t \in [0, T]$ 时

$$\begin{aligned} e^T(t) \Gamma e(t) = & X_0^T(t) C_0^T \Gamma C_0 X_0(t) \leq X_0^T(t) P X_0(t) \leq V(t) \leq \\ & e^{\gamma T} \lambda_{\max}(S) \int_0^T W^T(t) W(t) dt. \end{aligned} \quad (24)$$

因为 $W(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}$ 且 $\dot{r}(t)$ 和 $\dot{w}(t)$ 分别满足假设 1 和假设 2, 并且 $c_1^2 \geq c_{11}^2 + c_{12}^2$, 所以

$$\begin{aligned} & \int_0^T W^T(t) W(t) dt = \\ & \int_0^T [\dot{r}^T(t) \quad \dot{w}^T(t)] \begin{bmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} dt = \\ & \int_0^T \dot{r}^T(t) \dot{r}(t) dt + \int_0^T \dot{w}^T(t) \dot{w}(t) dt \leq \\ & c_{11}^2 + c_{12}^2 \leq c_1^2. \end{aligned}$$

由此式和条件(12)继续估计式(24)的上界得知, 当 $t \in [0, T]$ 时

$$e^T(t) \Gamma e(t) \leq e^{\gamma T} \lambda_{\max}(S) c_1^2 \leq$$

$$e^{\gamma T} \frac{c_2^2}{e^{\gamma T} c_1^2} c_1^2 = c_2^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad \square$$

定理 1 本身是完备的, 但仔细观察其中的不等式(10), 因为 $\bar{\Phi} = \Phi + GK_1, \bar{G}_d = G_d + GK_2$, 所以它不是 LMI, 因此, 无法利用 Matlab 的 LMI 工具箱求解. 事

实上,可以将其转化为LMI,这是本文的第2个主要定理.

定理2 在假设1和假设2成立的条件下,如果对于给定的标量 $\gamma \geq 0$,存在适当维数的矩阵 $Z > 0, F > 0, N > 0, S > 0, L_1, L_2$ 使得

$$\begin{bmatrix} (\Phi Z + GL_1)^T + (\Phi Z + GL_1) - \gamma Z + F - \frac{1}{\tau}N \\ (G_d Z + GL_2)^T + \frac{1}{\tau}N \\ \bar{E}^T \\ \tau(\Phi Z + GL_1) \\ G_d Z + GL_2 + \frac{1}{\tau}N \quad \bar{E} \quad \tau(\Phi Z + GL_1)^T \\ -e^{\gamma\tau}F - \frac{1}{\tau}N \quad 0 \quad \tau(G_d Z + GL_2)^T \\ 0 \quad -S \quad \tau\bar{E}^T \\ \tau(G_d Z + GL_2) \quad \tau\bar{E} \quad \tau(N - 2Z) \end{bmatrix} < 0, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & ZC_0^T \\ C_0 Z & -\Gamma^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{26}$$

$$S < \frac{c_2^2}{e^{\gamma T} c_1^2} I \tag{27}$$

成立,则对一切 $t \in [0, T]$,都有 $e^T(t)\Gamma e(t) \leq c_2^2$,即闭

环系统(9)关于 (c_1, c_2, Γ, T) 对目标信号可以实现有限时间有界跟踪,其中控制器为 $\dot{u}(t) = K_1 X_0(t) + K_2 X_0(t - \tau)$,这里 $K_1 = L_1 Z^{-1}, K_2 = L_2 Z^{-1}$.

证明 只要证明本定理的条件满足时定理1的条件也满足即可.

为把定理1的不等式(10)转化为LMI,对式(10)左边的矩阵右乘以 $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, I, R^{-1})$ 、左乘以它的转置,由合同变换不改变矩阵正定性得知,式(10)成立的充要条件为

$$\begin{bmatrix} P^{-1}(\bar{\Phi}^T P + P\bar{\Phi} - \gamma P + Q - \frac{1}{\tau}R)P^{-1} \\ P^{-1}(\bar{G}_d^T P + \frac{1}{\tau}R)P^{-1} \\ \bar{E}^T \\ \tau\bar{\Phi}P^{-1} \\ P^{-1}(P\bar{G}_d + \frac{1}{\tau}R)P^{-1} \quad \bar{E} \quad \tau P^{-1}\bar{\Phi}^T \\ P^{-1}(-e^{\gamma\tau}Q - \frac{1}{\tau}R)P^{-1} \quad 0 \quad \tau P^{-1}\bar{G}_d^T \\ 0 \quad -S \quad \tau\bar{E}^T \\ \tau\bar{G}_d P^{-1} \quad \tau\bar{E} \quad -\tau R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{28}$$

将 $\bar{\Phi} = \Phi + GK_1, \bar{G}_d = G_d + GK_2$ 代入上式,得到

$$\begin{bmatrix} P^{-1}[(\Phi + GK_1)^T P + P(\Phi + GK_1) - \gamma P + Q - \frac{1}{\tau}R]P^{-1} & P^{-1}[P(G_d + GK_2) + \frac{1}{\tau}R]P^{-1} & \bar{E} & \tau P^{-1}(\Phi + GK_1)^T \\ P^{-1}[(G_d + GK_2)^T P + \frac{1}{\tau}R]P^{-1} & P^{-1}(-e^{\gamma\tau}Q - \frac{1}{\tau}R)P^{-1} & 0 & \tau P^{-1}(G_d + GK_2)^T \\ \bar{E}^T & 0 & -S & \tau\bar{E}^T \\ \tau(\Phi + GK_1)P^{-1} & \tau(G_d + GK_2)P^{-1} & \tau\bar{E} & -\tau R^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

整理得

$$\begin{bmatrix} [(\Phi P^{-1} + GK_1 P^{-1})^T + \Phi P^{-1} + GK_1 P^{-1} - \gamma P^{-1} + P^{-1}QP^{-1} - \frac{1}{\tau}P^{-1}RP^{-1}] & G_d P^{-1} + GK_2 P^{-1} + \frac{1}{\tau}P^{-1}RP^{-1} & \bar{E} & \tau(\Phi P^{-1} + GK_1 P^{-1})^T \\ (G_d P^{-1} + GK_2 P^{-1})^T + \frac{1}{\tau}P^{-1}RP^{-1} & -e^{\gamma\tau}P^{-1}QP^{-1} - \frac{1}{\tau}P^{-1}RP^{-1} & 0 & (G_d P^{-1} + GK_2 P^{-1})^T \\ \bar{E}^T & 0 & -S & \tau\bar{E}^T \\ \tau\Phi P^{-1} + \tau GK_1 P^{-1} & \tau(G_d P^{-1} + GK_2 P^{-1}) & \tau\bar{E} & -\tau R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{28}$$

令 $Z = P^{-1}, F = ZQZ, N = ZRZ, L_1 = K_1 Z, L_2 = K_2 Z$,则式(28)可写为

$$\begin{bmatrix} (\Phi Z + GL_1)^T + (\Phi Z + GL_1) - \gamma Z + F - \frac{1}{\tau}N & G_d Z + GL_2 + \frac{1}{\tau}N & \bar{E} & \tau(\Phi Z + GL_1)^T \\ (G_d Z + GL_2)^T + \frac{1}{\tau}N & -e^{\gamma\tau}F - \frac{1}{\tau}N & 0 & \tau(G_d Z + GL_2)^T \\ \bar{E}^T & 0 & -S & \tau\bar{E}^T \\ \tau(\Phi Z + GL_1) & \tau(G_d Z + GL_2) & \tau\bar{E} & -\tau R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{29}$$

至此,把式(10)转化为式(29). 因为式(29)中存在着非线性矩阵块 $-\tau R^{-1}$, 所以仍然不是 LMI, 还需要找到一个保证式(29)成立的 LMI. 由 $(R^{-1} - Z)^T R(R^{-1} - Z) = R^{-1} - 2Z + ZRZ = R^{-1} - 2Z + N \geq 0$, 可得

$$-R^{-1} \leq N - 2Z. \tag{30}$$

分别记式(25)和(29)左边的矩阵为 Ξ_1 和 Ξ_2 , 计算并根据式(30)得到

$\Xi_2 - \Xi_1 = \text{diag}(0, 0, 0, -\tau R^{-1} - \tau(N - 2Z)) < 0$, 即 $\Xi_2 < \Xi_1$. 因此, 若式(25)成立, 则式(29)成立, 从而式(10)成立.

另外, 对式(11)左右两边分别乘以 Z 及其转置(即 Z 自身), 可以得到

$$ZC_0^T \Gamma C_0 Z - Z < 0,$$

上式可以写为

$$-Z - ZC_0^T(-\Gamma^{-1})^{-1}C_0Z < 0. \tag{31}$$

因为 $-\Gamma^{-1} < 0$, 由引理 1 可以得知式(31)与(26)等价. 此外, 定理 1 中的式(12)不需要任何变化, 它就是式(27). \square

至此, 可以得到如下定理.

定理 3 如果定理 2 的条件满足, 即假设 1 和假设 2 均成立, 且对于给定的标量 $\gamma \geq 0$, 存在适当维数的矩阵 $Z > 0, F > 0, N > 0, S > 0, L_1, L_2$, 使得不等式(25)~(27)成立, 则系统(3)的控制输入可以取为

$$u(t) = u(0) + \int_0^t K_{1e}e(s)ds + \int_0^{t-\tau} K_{2e}e(s)ds + K_{1x}x(t) + K_{2x}x(t-\tau). \tag{32}$$

其中: $K_1 = L_1 Z^{-1} = [K_{1e} \ K_{1x}]$, $K_2 = L_2 Z^{-1} = [K_{2e} \ K_{2x}]$. 在此控制律下, 系统(3)的输出 $y(t)$ 关于 (c_1, c_2, Γ, T) 对目标信号 $r(t)$ 可以实现有限时间有界跟踪.

证明 当定理 2 的条件满足时, 由定理 2 已经求得

$$\dot{u}(t) = K_1 X_0(t) + K_2 X_0(t - \tau).$$

因为 $X_0(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$, 所以

$$\dot{u}(t) = K_{1e}e(t) + K_{1x}\dot{x}(t) + K_{2e}e(t - \tau) + K_{2x}\dot{x}(t - \tau).$$

对该式两边从 0 到 t 积分, 得到

$$u(t) = u(0) + \int_0^t K_{1e}e(s)ds + K_{1x}[x(t) - x(0)] + \int_0^{t-\tau} K_{2e}e(s)ds + K_{2x}[x(t - \tau) - x(-\tau)].$$

连同零初始条件的假设, 便可得到式(32). \square

注意, 在式(32)给出的控制输入中, $K_{1x}x(t)$ 是状态反馈; $K_{2x}x(t - \tau)$ 是状态时滞引起的状态反馈; $\int_0^t K_{1e}e(s)ds$ 是积分器; $\int_0^{t-\tau} K_{2e}e(s)ds$ 是状态时滞引起的误差积分, 这一项的存在加强了积分器消除静态误差的作用; 而 $u(0)$ 是控制输入的初始值, 适当选取 $u(0)$ 的值可以加速输出信号对目标信号的跟踪速度, 但通常可以取 $u(0) = 0$.

当 $A_d = 0$ 时, 系统(3)是一个无时滞系统, 这时只要在误差系统中取 $G_d = 0$, 上面的推导便都成立. 由定理 2 得到的控制器仍然为 $\dot{u}(t) = K_1 X_0(t) + K_2 X_0(t - \tau)$, 它可以看成是有记忆的控制器的, 其中 τ 不再代表状态时滞, 而是一个可以根据设计需要选择的参数. 另外, 还可令 LMI(25)中的 $L_2 = 0$, 这时得到 $K_2 = 0$, 于是得到无记忆控制器 $\dot{u}(t) = K_1 X_0(t)$. 因此, 无时滞系统可以看作是本文中 $A_d = 0$ 时的特例.

5 数值仿真

本节通过一个例题, 分别对两种不同的干扰信号和目标信号进行数值仿真.

例 1 考虑线性连续时间时滞系统(3), 其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & 0 \\ 1.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & -0.6 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.6 & -1 & 0.5 \\ -1.2 & -0.1 & -0.3 \\ -0.6 & -1 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [-0.1 \ 0.1 \ 2].$$

初始条件 $x(t) = \phi(t) = 0, t \in [-\tau, 0]$.

取 $\Gamma = I, c_1 = 1, c_2 = 2, T = 10$, 再取 $\gamma = 0.2$.

注意到控制器的存在条件是时滞依赖的, 对本例利用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解 LMI (25)~(27), 发现当时滞 $\tau \in (0, 0.582]$ 时有可行解, 即定理 2 成立.

具体而言, 令 $\tau = 0.5$, 得到

$$K_1 = [K_{1e} \ K_{1x}] = [-5.0238 \ -0.0209 \ -0.7109 \ -4.1580],$$

$$K_2 = [K_{2e} \ K_{2x}] = [-0.0039 \ 0.3281 \ 0.4549 \ -0.1727].$$

然后令 $u(0) = 0$, 由式(32)求得

$$u(t) = \int_0^t -5.0238e(s)ds - \int_0^{t-\tau} 0.0039e(s)ds + [-0.0209 \ -0.7109 \ -4.1580] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & [0.3281 \quad 0.4549 \quad -0.1727] \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \\ x_3(t-\tau) \end{bmatrix} = \\
 & \int_0^t -5.0238e(s)ds - \int_0^{t-\tau} 0.0039e(s)ds - \\
 & 0.0209x_1(t) - 0.7109x_2(t) - 4.1580x_3(t) + \\
 & 0.3281x_1(t-\tau) + 0.4549x_2(t-\tau) - \\
 & 0.1727x_3(t-\tau).
 \end{aligned}$$

下面分两种干扰信号和目标信号设计控制器并仿真。

1) 干扰信号取为 $w(t) = 0.15 \sin(2t)$. 经计算得到

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \dot{w}^T(t)\dot{w}(t)dt = \int_0^{10} \left(\frac{3 \cos(2t)}{10}\right)^2 dt = \\
 & \int_0^{10} \frac{9 \cos^2(2t)}{100} dt = \\
 & \frac{9}{20} + \frac{9 \sin 40}{800} \leq 0.5 \stackrel{\text{def}}{=} c_{12}^2.
 \end{aligned}$$

目标信号取为

$$r(t) = \begin{cases} 0.3 \sin t, & t \in (0, T]; \\ 0, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (33)$$

(这里蕴含 $\eta(t) \equiv 0$), 这时 $r(t)$ 满足

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \dot{r}^T(t)\dot{r}(t)dt = \int_0^{10} (0.3 \cos t)^2 dt = \\
 & \int_0^{10} \left(\frac{9}{200} + \frac{9 \cos(2t)}{200}\right) dt = \\
 & \frac{9}{20} + \frac{9 \sin 20}{400} \leq 0.5 \stackrel{\text{def}}{=} c_{11}^2.
 \end{aligned}$$

注意这时

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 0.8 \leq c_1^2.$$

另外, 从 $x(t) = \phi(t) = 0, r(t) = \eta(t) = 0, t \in [-\tau, 0]$, 得到

$$e(t) = C\phi(t) - \eta(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0],$$

所以, 闭环系统的输出对目标信号(33)的跟踪误差应该满足 $e^T(t)\Gamma e(t) \leq c_2^2 (t \in [0, T])$. 图1是闭环系统的输出响应。

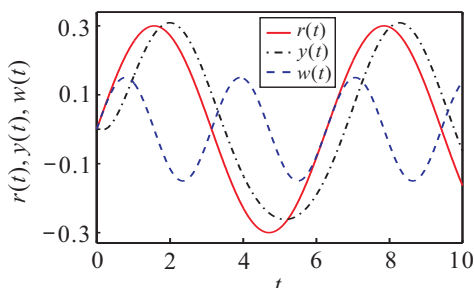


图1 目标信号为式(33)时闭环系统的输出响应

由图1可以看出, 在所设计的控制器的作用下, 在给定的时间区间 $[0, T]$ 内, 闭环系统输出信号始终处于目标信号 $r(t)$ 的 c_2 邻域内, 误差信号也始终处于给定的界限内. 也就是说, 本例中系统的闭环系统关于 $(1, 2, I, 10)$ 对目标信号 $r(t)$ 实现了有限时间有界跟踪。

注意到, 在定义1的表述中, 只要

$$\phi(t) = 0, \quad \phi(t) - C\eta(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0],$$

且其他条件也满足, 就有

$$e^T(t)\Gamma e(t) \leq c_2^2.$$

这与 $x(t) = \phi(t), r(t) = \eta(t), t \in [-\tau, 0]$ 的取值是有关系的, 即 $x(t)$ 在 $[-\tau, 0]$ 上的初始函数 $\phi(t)$ 只能取为 0, $r(t)$ 在 $[-\tau, 0]$ 上的初始函数 $\eta(t)$ 同样也只能取为 0.

2) 干扰信号取为 $w(t) = \frac{2}{2 + e^{-t}} - 0.65$. 经计算得到

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \dot{w}^T(t)\dot{w}(t)dt = \int_0^{10} \frac{4e^{-2t}}{(e^{-t} + 2)^4} dt = \\
 & \frac{7}{162} - \frac{6e^{10} + 1}{6(2e^{10} + 1)^3} \leq 0.1 \stackrel{\text{def}}{=} c_{12}^2.
 \end{aligned}$$

目标信号取为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{-2t}} - 0.5, & t \in (0, T]; \\ 0, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (34)$$

(这里蕴含 $\eta(t) \equiv 0$), 这时有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \dot{r}^T(t)\dot{r}(t)dt = \\
 & \int_0^{10} \left(\frac{2e^{-2t}}{(1 + e^{-2t})^2}\right)^2 dt = \\
 & \int_0^{10} \frac{4e^{-4t}}{(1 + e^{-2t})^4} dt = \\
 & \frac{1}{6} - \frac{e^{20} + \frac{1}{3}}{(1 + e^{20})^3} \leq 0.2 \stackrel{\text{def}}{=} c_{11}^2.
 \end{aligned}$$

于是 $c_{11}^2 + c_{12}^2 \leq c_1^2$, 定理2的条件全部满足. 闭环系统的输出响应见图2. 这时闭环系统关于 $(1, 2, I, 10)$ 对目标信号 $r(t)$ 也实现了有限时间有界跟踪。

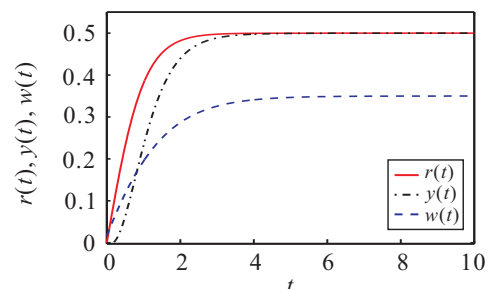


图2 目标信号为式(34)时闭环系统的输出响应

此外, 本文还将干扰信号取为 $w(t) = 0.3, w(t) = 0.3 \ln(1+t), w(t) = 1 - \frac{1}{1+2t}$ 等类型的函数分别对以上两种目标信号进行仿真. 结果表明, 闭环系统的输出关于 $(1, 2, I, 10)$ 对目标信号 $r(t)$ 都能实现有限时间有界跟踪, 这表明本文所设计的控制器具有广义性.

注1 文献[12-14]中要求干扰信号应满足 $\int_0^T w^T(t)w(t)dt \leq c_1^2$, 其中 $c_1 > 0$. 本文的对应条件是假设 $2\left(\int_0^T \dot{w}^T(t)\dot{w}(t)dt \leq c_{12}^2, \text{其中 } c_{12} > 0\right)$. 这两个条件不完全一致. 例如, 当 $w(t)$ 为标量时, 如果 $w(t) = a$ (常数但未知), 则无论 a 为何值假设2都能满足, 但未必满足 $\int_0^T w^T(t)w(t)dt \leq c_1^2$. 因此, 这时本文条件扩大了干扰信号允许范围. 而当 $w(t)$ 为周期信号时, 假设2与文献[12-14]的要求基本一致.

注2 本文研究的是时滞系统的有限时间有界跟踪问题, 而之前的文献研究的是输入-输出有限时间稳定性问题. 当本文中取目标信号 $r(t) \equiv 0$ 时, 实际上就是输入-输出有限时间稳定性问题. 依然采用例1中的系数矩阵和各个参数, 将干扰信号取为 $w(t) = 0.15 \sin(2t)$, 目标信号取为 $r(t) = 0$, 将本文结果与文献[10]的结果进行比较. 其中, 把目标信号恒为零时本文闭环系统的输出记为 $y_1(t)$, 文献[10]闭环系统的输出记为 $y_2(t)$, 图3给出了二者的比较. 可以看出, 本文控制效果优于文献[10]的控制效果.

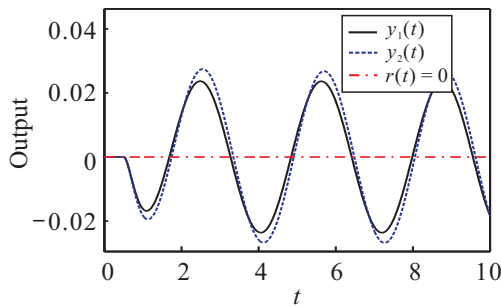


图3 本文与文献[10]闭环系统输出的比较

注3 事实上, 定理2对于无时滞系统也是正确的. 在这种情况下, 系统(3)中 $A_d = 0$, 于是 $G_d = 0, \bar{G}_d = GK_2$. 这时, LMI(25)中的 τ 不再代表时滞, 而仅仅是一个参数. 在求解LMI(25)~(27)时, 把 τ 取为一个正数, 使得LMI(25)~(27)有可行解. 这时的控制器 $\dot{u}(t) = K_1 X_0(t) + K_2 X_0(t - \tau)$ 中仍然包括带记忆的状态反馈部分 $K_2 X_0(t - \tau)$. 相应地, 式(32)中也包括与参数 τ 有关的积分器 $\int_0^{t-\tau} K_{2e} e(s) ds$ 和状态反馈 $K_{2x} x(t - \tau)$. 对于本例, 考虑 $A_d = 0$ 时的无时滞系统(3), 令参数 $\tau = 0.3$, 其余系数采用例1中相应的系数矩阵和各个参数, 通过Matlab求解LMI(25)~(27), 并在例1的第2种干扰信号和目标信号下进行仿真, 可以得到闭环系统的输出响应, 见图4.

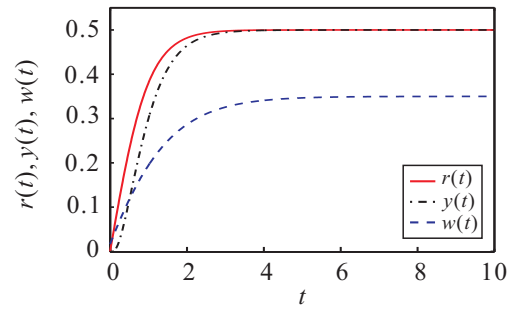


图4 $A_d = 0$ 时无时滞系统(3)的闭环系统输出响应

6 结论

本文研究了线性连续时间时滞系统的有限时间有界跟踪控制问题. 借助于预见控制理论中构造误差系统的方法, 该问题可转化为一个误差系统的输入-输出有限时间稳定问题. 进一步, 通过构造正定的Lyapunov-Krasovskii函数, 得到了保证误差系统输入-输出有限时间稳定的充分条件, 同时, 基于LMI理论和方法给出了有记忆的状态反馈控制器的设计方法. 在此基础上, 推出原系统的控制器, 从而实现了闭环系统的输出对目标信号的有限时间有界跟踪. 数值仿真表明了所设计控制器的有效性.

参考文献(References)

- [1] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record Part 4. New York, 1961: 83-87.
- [2] Kushner H J. Finite time stochastic stability and the analysis of tracking systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1966, 11(2): 219-227.
- [3] Weiss L, Infante E F. On the stability of systems defined over a finite time interval[J]. Proc of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1965, 54(1): 44-48.
- [4] Weiss L, Infante E F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12(1): 54-59.
- [5] Amato F, Ambrosino R, Cosentino C, et al. Technical communique input-output finite time stabilization of linear systems[J]. Automatica, 2010, 46(9): 1558-1562.
- [6] Amato F, Carannante G, De Tommasi G. Input-output finite-time stabilisation of a class of hybrid systems via static output feedback[J]. Int J of Control, 2011, 84(6): 1055-1066.
- [7] Amato F, De Tommasi G, Pironti A. Necessary and sufficient conditions for input-output finite-time stability of impulsive dynamical systems[C]. Proc of the 2015 American Control Conf. Chicago: IEEE, 2015: 5998-6003.

- [8] Amato F, De Tommasi G, Pironti A. Input-output finite-time stabilization of impulsive linear systems: Necessary and sufficient conditions[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2016, 19: 93-106.
- [9] Amato F, Carannante G, De Tommasi, et al. Input-output finite-time stabilisation of linear systems with input constraints[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(14): 1429-1438.
- [10] Xue W P, Li K J. Input-output finite-time stability of time-delay systems and its application to active vibration control[C]. *Proc of IEEE Int Conf on Automation Science and Engineering*. Taipei: IEEE, 2014: 878-882.
- [11] Huang S P, Karimi H R, Xiang Z R. Input-output finite-time stability of positive switched linear systems with state delays[C]. *Proc of the 9th Asian Control Conf*. Istanbul: IEEE, 2013: 1-6.
- [12] Liu L P, Cao X Y, Fu Z M, et al. Input-output finite-time control of positive switched systems with time-varying and distributed delays[J]. *J of Control Science and Engineering*, 2017, 2017: 1-9.
- [13] Guo Y, Yao Y, Wang S C, et al. Input-output finite-time stabilization of linear systems with finite-time boundedness[J]. *Isa Trans*, 2014, 53(4): 977-982.
- [14] Song J, Niu Y G, Zou Y Y. Input-output finite-time stability and stabilization of stochastic fuzzy systems with randomly occurring uncertainties and gain fluctuations[C]. *Proc of 12th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Guilin: IEEE, 2016: 738-742.
- [15] Liu L P, Cao X Y, Fu Z M, et al. Disturbance observer-based input-output finite-time control of a class of nonlinear systems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 2017: 1-7.
- [16] Yao L H, Li J M. Input-output finite-time stabilization of a class of nonlinear hybrid systems based on FSM with MDADT[J]. *J of the Franklin Institute*, 2017, 354(9): 3797-3812.
- [17] Yao L H, Li J M. Input-output finite-time stabilization of time-varying impulsive positive hybrid systems under MDADT[J]. *Applied Sciences*, 2017, 7(11): 1187.
- [18] Liao F C, Ren Z Q, Tomizuka M, et al. Preview control for impulse-free continuous-time descriptor systems[J]. *Int J of Control*, 2015, 88(6): 1142-1149.
- [19] 廖福成, 苏晓洁, 廖永龙. 不确定离散时滞系统的 H_∞ 保性能预见控制[J]. *工程科学学报*, 2016, 38(7): 1008-1016.
(Liao F C, Su X J, Liao Y L. H_∞ guaranteed performance preview control for uncertain discrete systems with time-delay[J]. *Chinese J of Engineering*, 2016, 38 (7): 1008-1016.)
- [20] 刘健辰, 时光. 基于推广的概率分布区间分解法的时滞系统稳定性分析[J]. *控制与决策*, 2017, 32(10): 1824-1830.
(Liu J C, Shi G. Stability analysis for delays systems based on generalized probability-distribution-interval decomposition approach[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(10): 1824-1830.)
- [21] 林崇, 赵南, 陈兵. 基于新型 Abel 型有限和不等式的时滞系统稳定性判据[J]. *控制与决策*, 2017, 32(10): 1910-1913.
(Lin C, Zhao N, Chen B. Further improvement of Abel lemma-based finite-sum inequality and application for linear discrete time-delay systems[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(10): 1910-1913.)
- [22] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 6-23.
(Yu L. *Robust control: Linear matrix inequality method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 6-23.)
- [23] Liao F C, Wu J, Tomizuka M. An improved delay-dependent stability criterion for linear uncertain systems with multiple time-varying delays[J]. *Int J of Control*, 2014, 87(4): 861-873.

作者简介

廖福成(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 从事预见控制理论及其应用等研究, E-mail: fcliao@ustb.edu.cn;

吴莹雪(1994—), 女, 硕士生, 从事有限时间有界跟踪问题的研究, E-mail: w_yingxue@126.com.

(责任编辑: 李君玲)