

一类不确定广义时滞系统的 H_∞ 自适应控制

肖会敏^{1†}, 孟 欣²

(1. 河南财经政法大学 计算机与信息工程学院, 郑州 450003;

2. 中国海洋大学 数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘 要: 针对一类具有外部扰动的不确定广义时滞系统, 首先, 设计一个积分型滑模面函数, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 并结合线性矩阵不等式等技术, 给出该滑动模态方程鲁棒渐近稳定的一个充分性判据; 然后, 通过设计一个新型的自适应滑模控制器, 使得该闭环系统的状态可在有限时间内到达滑模面并作滑动运动; 最后, 通过一个数值仿真例子验证所提出的方法是有效可行的。

关键词: 广义系统; 滑模控制; 自适应控制; 可容许性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Adaptive H_∞ control for a class of uncertain singular time-delay systems

XIAO Hui-min^{1†}, MENG Xin²

(1. School of Computer and Information Engineering, Henan University of Finance and Economics, Zhengzhou 450003, China; 2. School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: An integral sliding surface with a compensator is constructed for a class of uncertain singular time-delay systems with external disturbance in this paper. Firstly, based on the Lyapunov stability theory and linear matrix inequality, a robust asymptotically stability criterion is presented for sliding mode dynamics with all admissible uncertainties under some decay rate. Then, a new adaptive sliding mode control law is designed to make sure that the trajectories of the sliding mode dynamics can be driven to a region near equilibrium point in finite time. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: singular systems; sliding mode control; adaptive control; admissibility

0 引 言

众所周知, 广义系统在过去几十年里已经引起了众多学者的关注, 广泛应用于各种实际工程领域中, 如电路系统、机器人研究等领域^[1-3]. 与常规系统相比, 广义系统的稳定性分析不仅需要考虑渐近稳定, 而且还要考虑无脉冲性(针对连续广义系统)^[4]及因果性(针对离散广义系统)^[5]. 目前, 已有大量的文献对广义时滞系统进行研究, 并获得了诸多有意义的进展, 如可容许分析^[6-7]、稳定分析^[8-9]、鲁棒控制和过滤器设计^[10-11]、 H_∞ 控制^[12-13]、观测器设计^[14-15]等. 文献[16]利用一种新的积分不等式和 Lyapunov 法, 得到了 Takagi-Sugeno 模糊广义模型的一个可容许判据, 保证了该系统的正则性、无脉冲性和稳定性. 值得指出的是, 该方法同样适用于研究一类不确定广义系统鲁棒耗散控制等问题; 文献[17]研究了广义时滞系统的可容许性问题; 文献[18]研究了一类广义系统鲁

棒稳定性和鲁棒镇定问题, 利用严格的线性矩阵不等式等工具, 提出了系统鲁棒渐近稳定的充分条件. 20 世纪 50 年代以来, 滑模控制理论作为一种有效的鲁棒控制策略已成功应用于各种复杂系统(包括鲁棒控制系统^[19]、不确定系统^[20-21]、Markovian 跳变系统^[22-23]等)以及其他实际工程系统中. 滑模控制方法具有快速响应、良好的暂态性能以及对不确定性和外部干扰的鲁棒性等优势^[24-25].

文献[26]研究了一类具有外部扰动的不确定离散广义系统的鲁棒控制问题, 利用严格的 LMI 等工具, 给出了一个充分性判据, 以确保滑动模态方程是可容许的(即正则的、因果的和稳定的). 最近, 文献[27]设计了一系列线性滑模面来研究不确定广义时滞系统的鲁棒渐近稳定性问题, 同时设计了一种自适应控制器, 使得系统状态在有限时间内达到给定的滑模面产生滑动模态. 此外, 对于此类控制问题, 还可以

收稿日期: 2018-01-28; 修回日期: 2018-11-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374079).

责任编辑: 徐胜元.

[†]通讯作者. E-mail: huiminxiao@126.com.

利用构造观测器的方法进行研究. 文献[28]研究了一类变时滞离散马尔科夫跳变系统的 H_∞ 滤波器设计问题, 提出小增益定理来处理时滞, 使得所得结果具有更小的保守性.

针对一类具有外部扰动的不确定广义时滞系统, 本文探讨该类系统的自适应滑模控制方案. 首先, 利用Lyapunov稳定性理论和线性矩阵不等式等工具, 设计一个积分型滑模面, 给出滑动模态方程鲁棒渐近稳定的充分条件; 然后, 设计自适应滑模控制器, 保证闭环系统的状态可在有限时间内到达滑模面并作滑动运动; 最后, 以仿真实例验证所提出方法的有效性.

1 问题描述

考虑如下的不确定广义时滞系统:

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \\ [A + \Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t) + [A_d + \Delta A_d(t)]\boldsymbol{x}(t - \tau) + B\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t - \tau)) + D\boldsymbol{w}(t); \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t); \\ \boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s), s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$ 为系统状态向量; $\boldsymbol{u}(t) \in R^m$ 为系统控制输入向量; $\boldsymbol{w}(t) \in R^h$ 为空间上的外部扰动输入向量; $\boldsymbol{y}(t) \in R^q$ 为系统输出向量; 矩阵 E 满足 $\text{rank}(E) = r \leq n$; A 、 A_d 、 B 、 C 和 D 为已知的适当维数实矩阵; $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t - \tau)) \in R^n$ 为未知函数; $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为已知的初始值函数; $\tau > 0$ 为时滞.

假设1^[1] $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t - \tau))$ 为未知的非线性函数, 且对于任意的 $t \geq 0$, 满足条件

$$\text{rank}(B, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t - \tau))) = \text{rank}(B).$$

假设2^[1] 存在一个已知函数 $g(\|\boldsymbol{x}(t)\|, \|\boldsymbol{x}(t - \tau)\|) \in R$, 使得 $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t - \tau))\| \leq g(\|\boldsymbol{x}(t)\|, \|\boldsymbol{x}(t - \tau)\|)$ 恒成立, 其中 $g(\cdot, \cdot)$ 是一个二元连续非负函数, 且满足 $g(0, 0) = 0$.

假设3^[17] $\Delta A(t)$ 和 $\Delta A_d(t)$ 为系统的不确定参数, 并满足以下条件:

$$[\Delta A(t) \quad \Delta A_d(t)] = M\boldsymbol{F}(t)[N \quad N_d].$$

其中: M 、 N 和 N_d 为已知的适当维数实矩阵; $\boldsymbol{F}(t)$ 为时间 t 的不确定连续实函数, 满足 $\boldsymbol{F}^T(t)\boldsymbol{F}(t) \leq I$.

假设4^[27] 存在正数 v_1 使得 $\|\boldsymbol{x}(t - \tau)\| \leq v_1\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 成立.

在研究之前, 对于如下系统给出定义和引理:

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_d\boldsymbol{x}(t - \tau); \\ \boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s), s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

定义1^[1] 系统(2)被称为:

1) 正则的和无脉冲的, 若矩阵对 (E, A) 是正则的和无脉冲的;

2) 稳定的, 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在标量 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任意初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(s)$ 满足 $\sup_{-\tau < t \leq 0} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\| < \delta(\varepsilon)$, 则系统(2)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足 $\boldsymbol{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}, t \rightarrow +\infty$;

3) 可容许的, 若系统是正则的、无脉冲的和稳定的.

引理1^[7] 若存在矩阵 $Q > 0$ 和 P , 使得线性矩阵不等式

$$\begin{aligned} E^T P + P^T E &\geq 0, \\ \begin{bmatrix} A^T P + P^T A + Q & P^T A_d \\ * & -Q \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned}$$

成立, 则称系统(2)是可容许的.

引理2^[17] 令 U 、 W 和 $F(t)$ 为适当维数的实矩阵, 且满足 $F^T(t)F(t) \leq I$, 则存在常数 $\varepsilon > 0$ 使得如下不等式成立:

$$UF(t)W + W^T F^T(t)U^T \leq \varepsilon^{-1}UU^T + \varepsilon W^T W.$$

2 主要结果

2.1 观测器设计

本节中, 设计如下状态观测器估计不确定广义时滞系统(1)的状态向量:

$$\begin{cases} E\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \\ A\hat{\boldsymbol{x}}(t) + A_d\hat{\boldsymbol{x}}(t - \tau) + L(\boldsymbol{y}(t) - C\hat{\boldsymbol{x}}(t)), \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = C\hat{\boldsymbol{x}}(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{y}}(t)$ 分别表示观测器系统的状态估计向量与输出向量, 观测器矩阵 $L \in R^{n \times q}$ 待定.

定义误差向量 $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$, 结合系统(1)和(3), 可得误差系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{e}}(t) = \\ [A - LC + \Delta A(t)]\boldsymbol{e}(t) + \Delta A(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \\ [A_d + \Delta A_d(t)]\boldsymbol{e}(t - \tau) + \Delta A_d(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t - \tau) + \\ B\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t - \tau)) + D\boldsymbol{w}(t), \\ \boldsymbol{y}_e(t) = C\boldsymbol{e}(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{y}_e(t)$ 为误差系统(4)的输出向量.

2.2 滑模面设计

通常, 滑模控制包含两个步骤: 滑模面泛函设计和控制信号设计. 在此部分中, 选择一个具有补偿器的积分型滑模面如下:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}(t) = G[\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(0)] - \int_0^t G(A + BK)\hat{\boldsymbol{x}}(s)ds - \int_0^t GA_d\hat{\boldsymbol{x}}(s - \tau)ds. \end{aligned} \quad (5)$$

其中: 矩阵 $K \in R^{m \times n}$ 为待设计矩阵, $G \in R^{m \times n}$ 为已知实矩阵且满足矩阵 GB 非奇异.

注 1 值得指出的是, 文献 [29] 提出了一个匹配的条件, 即存在一个矩阵 J , 使得 $GE = JC$ 成立. 因此, 结合式 (1) 和 (4), 式 (5) 可以改写为

$$s(t) = J[y(t) - \hat{y}(t)] - J[y(0) - \hat{y}] + G[E\hat{x}(t) - E\hat{x}(0)] - \int_0^t G(A + BK)\hat{x}(s)ds - \int_0^t GA_d\hat{x}(s - \tau)ds, \quad (6)$$

则滑模面式 (6) 的设计是可行的.

根据滑模控制理论, 由 $\dot{s}(t) = 0$ 得到等效控制如下:

$$u_{eq}(t) = K\hat{x}(t) - (GB)^{-1}G\{[A + \Delta A(t)]e(t) + \Delta A(t)\hat{x}(t) + [A_d + \Delta A_d(t)]e(t - \tau) + \Delta A_d(t)\hat{x}(t - \tau) + Dw(t) + f(t, x(t), x(t - \tau))\}. \quad (7)$$

同时, 将式 (7) 代入 (4), 可得

$$E\dot{e}(t) = [BK + H\Delta A(t)]\hat{x}(t) + [HA - LC + H\Delta A(t)]e(t) + H\Delta A_d(t)\hat{x}(t - \tau) + [HA_d + H\Delta A_d(t)]e(t - \tau) + HDw(t) + f(t, x(t), x(t - \tau)) - B(GB)^{-1}Gf(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (8)$$

其中 $H = I - B(GB)^{-1}G$. 根据假设 2, $\text{rank}(B, f(t, x(t), x(t - \tau))) = \text{rank}(B)$, 可得滑动模态方程为

$$E\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + LCe(t) + A_d\hat{x}(t - \tau), \quad (9)$$

$$E\dot{e}(t) = [BK + H\Delta A(t)]\hat{x}(t) + [HA - LC + H\Delta A(t)]e(t) + H\Delta A_d(t)\hat{x}(t - \tau) + [HA_d + H\Delta A_d(t)]e(t - \tau) + HDw(t). \quad (10)$$

给出如下性能指标^[1]:

$$\|H\|_\infty = \sup_{0 \neq w(t) \in L_2[0, +\infty)} \frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} < \gamma^2. \quad (11)$$

注 2 对系统 (1) 的鲁棒稳定性分析问题可转化为对系统 (9) 和 (10) 的可容许性分析问题.

2.3 滑动模态方程可容许性分析

在本节中, H_∞ 性能分析的主要目标集中在两个方面:

- 1) 在扰动输入 $w(t) = 0$ 时, 证明滑动模态方程是可容许的;
- 2) 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 在零初始条件下, H_∞

性能指标 (11) 对于任意非零扰动 $w(t)$ 恒成立.

定理 1 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 若存在正定对称矩阵 R_1, R_2, R_3 , 矩阵 X, Y, Z 及常数 $\varepsilon_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & Z^T A_d & 0 & 0 & 0 \\ * & \Pi_{22} & 0 & Z^T H A_d & Z^T H D & X_1 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -X_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \text{sym}\{Z^T A\} + R_2 + \varepsilon_1 N^T N, \\ \Pi_{12} &= YC + X^T B^T, \\ \Pi_{22} &= \text{sym}\{Z^T H A - YC\} + R_3 + C^T C + \varepsilon_2 N^T N, \\ \Pi_{33} &= -R_2 + \varepsilon_3 N_d^T N_d, \\ \Pi_{44} &= -R_3 + \varepsilon_4 N_d^T N_d; \\ X_1 &= [Z^T H M \quad Z^T \quad H M \quad Z^T H M \quad Z^T H M], \\ X_2 &= \text{diag}\{\varepsilon_1 I, \varepsilon_2 I, \varepsilon_3 I, \varepsilon_4 I\}; \\ Z^T &= E^T R_1 + US^T, \end{aligned}$$

$S \in R^{n \times (n-r)}$ 为满足 $E^T S = 0$ 的任意列满秩向量. 则滑动模态方程 (9) 和 (10) 在 H_∞ 性能指标下是可容许的. 此时, 反馈矩阵 K, L 可分别从式 $K = B^+ Z^{-T} B X$ 和 $L = Z^{-T} Y$ 中得到.

证明 首先, 假设式 (11) 成立. 选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \hat{x}^T(t) E^T R_1 E \hat{x}(t) + e^T(t) E^T R_1 E e(t) + \int_{t-\tau}^t \hat{x}^T(s) R_2 \hat{x}(s) ds + \int_{t-\tau}^t e^T(s) R_3 e(s) ds, \quad (13)$$

则沿着解轨迹对式 (13) 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\hat{x}^T(t) E^T R_1 E \dot{\hat{x}}(t) + 2e^T(t) E^T R_1 E \dot{e}(t) + \hat{x}^T(t) R_2 \hat{x}(t) - \hat{x}^T(t - \tau) R_2 \hat{x}(t - \tau) + e^T(t) R_3 e(t) - e^T(t - \tau) R_3 e(t - \tau). \quad (14) \end{aligned}$$

同时, 注意到 $E^T S = 0$, 则可得如下等式:

$$\begin{cases} 0 = 2\hat{x}^T(t) US^T E \dot{\hat{x}}(t), \\ 0 = 2e^T(t) US^T E \dot{e}(t). \end{cases} \quad (15)$$

因此, 将式 (15) 代入 (14) 可得

$$\dot{V}(t) = 2\hat{x}^T(t) Z^T \{A\hat{x}(t) + LCe(t) + A_d\hat{x}(t - \tau)\} +$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^T(t)Z^T\{[BK + H\Delta A(t)]\hat{x}(t) + [HA - \\
 & LC + H\Delta A(t)]e(t) + H\Delta A_d(t)\hat{x}(t - \tau) + \\
 & [HA_d + H\Delta A_d(t)]e(t - \tau) + HDw(t)\} + \\
 & \hat{x}^T(t)R_2\hat{x}(t) - \hat{x}^T(t - \tau)R_2\hat{x}(t - \tau) + \\
 & e^T(t)R_3e(t) - e^T(t - \tau)R_3e(t - \tau). \quad (16)
 \end{aligned}$$

同时,根据引理2,可得存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$,使得

$$\begin{aligned}
 & 2e^T(t)Z^T H\Delta A(t)\hat{x}(t) = \\
 & 2e^T(t)Z^T HMF(t)N\hat{x}(t) \leq \\
 & \frac{1}{\varepsilon_1}e^T(t)Z^T HMM^T H^T Ze(t) + \varepsilon_1\hat{x}^T(t)N^T N\hat{x}(t), \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^T(t)Z^T H\Delta A(t)e(t) = \\
 & 2e^T(t)Z^T HMF(t)Ne(t) \leq \\
 & \frac{1}{\varepsilon_2}e^T(t)Z^T HMM^T H^T Ze(t) + \varepsilon_2e^T(t)N^T Ne(t), \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^T(t)Z^T H\Delta A_d(t)\hat{x}(t - \tau) = \\
 & 2e^T(t)Z^T HMF(t)N_d\hat{x}(t - \tau) \leq \\
 & \frac{1}{\varepsilon_3}e^T(t)Z^T HMM^T H^T Ze(t) + \\
 & \varepsilon_3\hat{x}^T(t - \tau)N_d^T N_d\hat{x}(t - \tau), \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^T(t)Z^T H\Delta A_d(t)e(t - \tau) = \\
 & 2e^T(t)Z^T HMF(t)N_d e(t - \tau) \leq \\
 & \frac{1}{\varepsilon_4}e^T(t)Z^T HMM^T H^T Ze(t) + \\
 & \varepsilon_4e^T(t - \tau)N_d^T N_d e(t - \tau). \quad (20)
 \end{aligned}$$

因此,通过推导可以得到

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) - \gamma^2\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) + \dot{V}(t) \leq \\
 & \xi^T(t)\Theta\xi(t) \leq \xi^T(t)\Xi\xi(t). \quad (21)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & Z^T A_d & 0 & 0 \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} & Z^T HD \\ * & * & -R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -R_3 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \\
 \Xi &= \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & Z^T A_d & 0 & 0 \\ * & \Xi_{22} & 0 & Z^T H A_d & Z^T HD \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi^T(t) &= \\
 & [\hat{x}^T(t) \quad e^T(t) \quad \hat{x}^T(t - \tau) \quad e^T(t - \tau) \quad w^T(t)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{11} &= \text{sym}\{Z^T A\} + R_2, \\
 \Theta_{12} &= Z^T LC + [BK + H\Delta A(t)]^T Z, \\
 \Theta_{22} &= \text{sym}\{Z^T(HA - LC + \\
 & H\Delta A(t))\} + R_3 + C^T C, \\
 \Theta_{23} &= Z^T H\Delta A_d(t), \\
 \Theta_{24} &= Z^T[HA_d + H\Delta A_d(t)], \\
 \Xi_{11} &= \text{sym}\{Z^T A\} + R_2 + \varepsilon_1 N^T N, \\
 \Xi_{12} &= Z^T LC + K^T B^T Z, \\
 \Xi_{22} &= \text{sym}\{Z^T HA - Z^T LC\} + R_3 + \\
 & C^T C + \varepsilon_2 N^T N + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \\
 & \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1})Z^T HMM^T H^T Z, \\
 \Xi_{33} &= -R_2 + \varepsilon_3 N_d^T N_d, \\
 \Xi_{44} &= -R_3 + \varepsilon_4 N_d^T N_d.
 \end{aligned}$$

特别地,令 $BX = Z^T BK, Y = Z^T L$,通过Schur补引理,式(12)等价于 $\Xi < 0$.因此,对于给定的常数 $\gamma > 0$,由式(12)可得

$$\dot{V}(t) \leq -\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) + \gamma^2\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t). \quad (22)$$

在零初始条件下,对式(22)由0到 $T(T > 0)$ 积分,可得

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_0^T \dot{V}(t)dt \leq \\
 & - \int_0^T \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)dt + \gamma^2 \int_0^T \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)dt. \quad (23)
 \end{aligned}$$

由此可得 H_∞ 性能分析的目标2)成立.

接下来,考虑当 $w(t) = 0$ 时,滑动模态方程的相容许性分析问题.滑动模态方程(9)和(10)可改写为

$$\hat{E}\dot{\eta}(t) = \hat{A}(t)\eta(t) + \hat{A}_d(t)\eta(t - \tau). \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \eta(t) &= \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \\
 \hat{A}(t) &= \\
 & \begin{bmatrix} A & LC \\ BK + H\Delta A(t) & HA - LC + H\Delta A(t) \end{bmatrix}, \\
 \hat{A}_d(t) &= \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ H\Delta A_d(t) & HA_d + H\Delta A_d(t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

显然,存在矩阵 $P = \text{diag}\{Z, Z\}$,使得

$$\hat{E}^T P = P^T \hat{E} = \begin{bmatrix} E^T R_1 E & 0 \\ 0 & E^T R_1 E \end{bmatrix} \geq 0.$$

同时可知,存在矩阵 $Q = \text{diag}\{R_2, R_3\}$ 满足

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P^T \hat{A} + Q & P^T \hat{A}_d \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

因此, 式 (12) 等价于 (25). 由引理 1 可得, 当扰动 $w(t) = 0$ 时, 滑动模态方程是可容许的. \square

2.4 滑模可达性分析

在实际系统中, 状态向量并不能完全可测, 但可通过观测器系统与误差系统的输出向量进行估计. 即, 存在未知常数 $v_2, v_3, v_4 > 0$, 使得

$$\|\hat{x}(t)\| \leq v_2 \|\hat{y}(t)\|, \quad \|e(t)\| \leq v_3 \|\hat{y}(t)\| + v_4 \|\mathbf{y}(t)\|$$

成立. 再根据假设 1、假设 2 和假设 4, 得到如下估计式成立:

$$\begin{aligned} & \|G\Delta A(t)\|\|\hat{x}(t)\| + \|G(A + \Delta A(t))\|\|e(t)\| + \\ & \|G\Delta A_d(t)\|\|\hat{x}(t - \tau)\| + \\ & \|G(A_d + \Delta A_d(t))\|\|e(t - \tau)\| \leq \\ & l_1 \|\hat{y}(t)\| + l_2 \|\mathbf{y}(t)\|, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $l_1, l_2 \geq 0$ 为未知常数. 注意到, l_1 和 l_2 的界并不能得到, 因此令 $\hat{l}_i(t)$ 和 $\tilde{l}_i(t)$ 分别为 l_1 和 l_2 的估计式与误差式, 即 $\tilde{l}_1(t) = \hat{l}_1(t) - l_1, \tilde{l}_2(t) = \hat{l}_2(t) - l_2$. 因此, 设计如下自适应滑模控制器:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ad}(t) = & \\ & K\hat{x}(t) - (GB)^{-1} \{ \hat{l}_1(t) \|\hat{y}(t)\| + \hat{l}_2(t) \|\mathbf{y}(t)\| + \\ & \|G\|g + \|GD\|\|\mathbf{w}(t)\| + \rho \} \text{sgn}(\mathbf{s}(t)). \end{aligned} \quad (27)$$

其中: 自适应率 $\dot{\hat{l}}_1(t) = c_1 \|\hat{y}(t)\|, \dot{\hat{l}}_2(t) = c_2 \|\mathbf{y}(t)\|$, c_1, c_2 为正常数, 由设计者决定; ρ 为充分小的正常数.

定理 2 在自适应控制器 (27) 的作用下, 滑动模态方程的状态可在有限时间内达到滑模面并作滑动运动.

证明 选择李雅普诺夫函数

$$\tilde{V}(t) = (\mathbf{s}^T(t)\mathbf{s}(t))^{\frac{1}{2}} + \frac{c_1}{2} \tilde{l}_1^2(t) + \frac{c_2}{2} \tilde{l}_2^2(t).$$

对上式求导可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(t) = & \\ & \frac{\mathbf{s}^T(t)}{\|\mathbf{s}(t)\|} \dot{\mathbf{s}}(t) + c_1 \tilde{l}_1(t) \dot{\tilde{l}}_1(t) + c_2 \tilde{l}_2(t) \dot{\tilde{l}}_2(t) = \\ & \frac{\mathbf{s}^T(t)}{\|\mathbf{s}(t)\|} G \{ \Delta A(t) \hat{x}(t) + [A + \Delta A(t)] e(t) + \\ & \Delta A_d(t) \hat{x}(t - \tau) + [A_d + \Delta A_d(t)] e(t - \tau) + \\ & B\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) + D\mathbf{w}(t) - \\ & BK\hat{x}(t) \} + c_1 \tilde{l}_1(t) \dot{\tilde{l}}_1(t) + c_2 \tilde{l}_2(t) \dot{\tilde{l}}_2(t). \end{aligned} \quad (28)$$

将式 (27) 代入 (28), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(t) = & \\ & \frac{\mathbf{s}^T(t)}{\|\mathbf{s}(t)\|} \{ G\Delta A(t) \hat{x}(t) + G[A + \Delta A(t)] e(t) + \\ & G\Delta A_d(t) \hat{x}(t - \tau) + G[A_d + \Delta A_d(t)] e(t - \tau) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & G\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) + GD\mathbf{w}(t) \} - [\hat{l}_1(t) \|\hat{y}(t)\| + \\ & \hat{l}_2(t) \|\mathbf{y}(t)\| + \|G\|g(\|\mathbf{x}(t)\|, \|\mathbf{x}(t - \tau)\|) + \\ & \|GD\|\|\mathbf{w}(t)\| + \rho] + c_1 \tilde{l}_1(t) \dot{\tilde{l}}_1(t) + c_2 \tilde{l}_2(t) \dot{\tilde{l}}_2(t) \leq \\ & l_1 \|\hat{y}(t)\| + l_2 \|\mathbf{y}(t)\| - [\hat{l}_1(t) \|\hat{y}(t)\| + \\ & \hat{l}_2(t) \|\mathbf{y}(t)\| + \rho] + c_1 \tilde{l}_1(t) \dot{\tilde{l}}_1(t) + c_2 \tilde{l}_2(t) \dot{\tilde{l}}_2(t). \end{aligned}$$

同时, 注意到

$$\dot{\tilde{l}}_1(t) = \dot{\hat{l}}_1(t), \quad \dot{\tilde{l}}_2(t) = \dot{\hat{l}}_2(t), \quad (29)$$

则由式 (29) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(t) \leq & \\ & l_1 \|\hat{y}(t)\| + l_2 \|\mathbf{y}(t)\| - [\hat{l}_1(t) \|\hat{y}(t)\| + \\ & \hat{l}_2(t) \|\mathbf{y}(t)\| + \rho] + \tilde{l}_1(t) \|\hat{y}(t)\| + \tilde{l}_2(t) \|\mathbf{y}(t)\| = \\ & -\rho < 0, \quad \|\mathbf{s}(t)\| \neq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

此时, 将式 (30) 两边同时从 0 到 t_{fin} 积分可得, $\int_0^{t_{\text{fin}}} \dot{\tilde{V}}(t) dt \leq -\rho t_{\text{fin}}$. 由此可知, 当 $t \geq t_{\text{fin}} = \frac{1}{\rho} [\tilde{V}(0) - \tilde{V}(t_{\text{fin}})]$ 时, 满足 $\mathbf{s}(t) = 0$ 成立. 因此, 对于任意的 $t \geq t_{\text{fin}}$, 恒有 $\|\mathbf{s}(t)\| = 0$. \square

注 3 存在一个充分小的正常数 ε , 利用 $\text{sgn}(\mathbf{s}(t)) = \frac{\mathbf{s}(t)}{\|\mathbf{s}(t)\| + \varepsilon}$ 可减少系统抖振.

3 仿真算例

考虑具有如下系数的系统 (1):

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \\ A_d &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ -0.5 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \\ M &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ N_d &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \sin(t). \end{aligned}$$

非线性项 $g(\|\mathbf{x}(t)\|, \|\mathbf{x}(t - \tau)\|)$ 及外扰动 $w(t)$ 可选为 $g(\cdot, \cdot) = (x_1^2(t) + x_2^2(t))^{\frac{1}{2}} + (x_1^2(t - \tau) + x_2^2(t - \tau))^{\frac{1}{2}}$ 和 $w(t) = \sin t \cdot e^{-t}$. 同时选择 $\gamma = 0.6541, \rho = 0.01, c_1 = c_2 = 1$, 以及矩阵 $G = B^T$.

利用软件 Matlab 中的 LMI 工具箱来解式 (12), 得到可行解

$$\varepsilon_1 = 0.9887, \quad \varepsilon_2 = 0.9631,$$

$$\varepsilon_3 = 0.9960, \quad \varepsilon_4 = 0.9796,$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1.0331 & 0.0454 \\ 0.0454 & 0.9505 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0.9433 & -0.1110 \\ -0.1110 & 0.5135 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [-1.6474 \quad -1.8771], \\ \mathbf{Y} &= [2.8461 \quad 3.2380]^T, \\ \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} 1.0635 & 0.0875 \\ 0.0875 & 1.2504 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由此可得反馈矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [-1.5506 \quad -1.7669], \\ \mathbf{L} &= [2.4774 \quad 2.4161]^T. \end{aligned}$$

故,由式(5)可得滑模面函数为

$$\begin{aligned} s(t) &= 0.5[\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)] - 0.5[\mathbf{y}(0) - \hat{\mathbf{y}}(0)] + [0.1 \quad 0][\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(0)] + \\ &\int_0^t [0.1310\hat{x}_1(s) - 0.0647\hat{x}_2(s)]ds - \\ &xdz \int_0^t [0.07\hat{x}_1(s - \tau) + 0.02\hat{x}_2(s - \tau)]ds, \end{aligned}$$

由式(27)可得自适应控制器为

$$\begin{aligned} u_{ad}(t) &= [-1.5506 \quad -1.7669]\hat{\mathbf{x}}(t) - \\ &50\{\hat{l}_1(t)\|\hat{\mathbf{y}}(t)\| + \hat{l}_2(t)\|\mathbf{y}(t)\| + \\ &0.1414[(x_1^2(t) + x_2^2(t))^{\frac{1}{2}} + (x_1^2(t - \tau) + \\ &x_2^2(t - \tau))^{\frac{1}{2}}] + 0.01\}\text{sgn}(s(t)). \end{aligned}$$

为了降低系统抖振,用 $\frac{s(t)}{\|s(t)\| + 0.01}$ 代替 $\text{sgn}(s(t))$. 仿真结果如图1~图4所示.

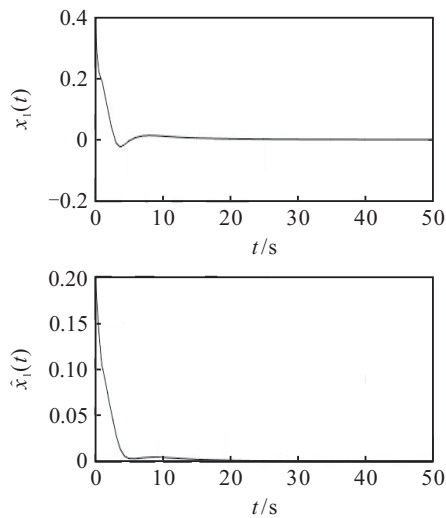


图1 子系统(1)的状态响应曲线

4 结论

本文研究了一类具有外部扰动的不确定广义时滞系统的自适应滑模控制问题. 首先,利用观测器系统,构造了一个积分型滑模面函数,利用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式等工具,得到了一个滑动模态方程在 H_∞ 的干扰衰减水平下鲁棒渐近稳定的充分判据;然后,设计了一个自适应滑模控制器,保证了系统状态在有限时间内到达滑模面,并作滑动运动;最后,通过一个仿真实例验证了所提出方法的有效性和可行性.

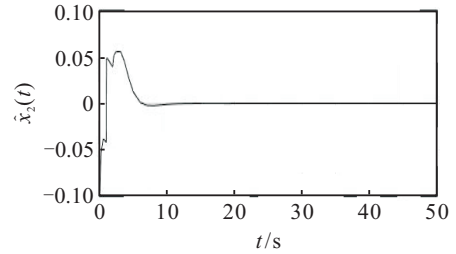
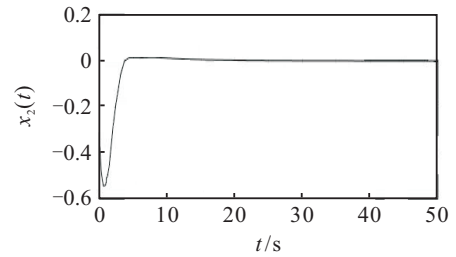


图2 子系统(2)的状态响应曲线

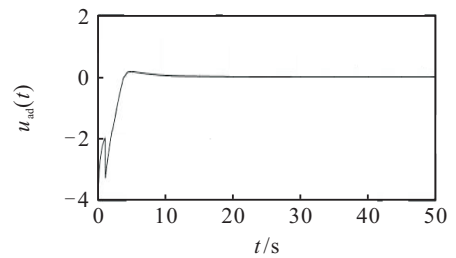
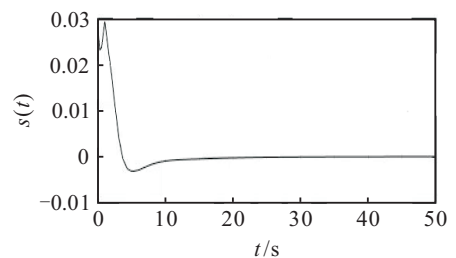


图3 滑模面泛函与自适应控制器响应曲线

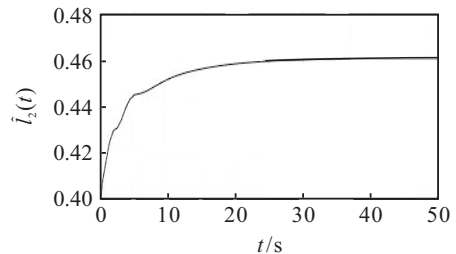
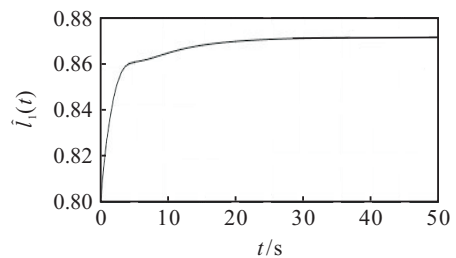


图4 自适应率响应曲线

参考文献(References)

[1] 高存臣, 刘云龙, 考永贵. 时滞广义变结构控制系统[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 1-11.
(Gao C C, Liu Y L, Kao Y G. Singular variable structure control systems with time delays[M]. Beijing: Science Press, 2017: 1-11.)

- [2] Sathishkumar M, Sakhivel R, Wang C, et al. Non-fragile filtering for singular Markovian jump systems with missing measurements[J]. *Signal Processing*, 2017,142(C): 125-136.
- [3] Boukas E K, Liu Z K. Delay-dependent stability analysis of singular linear continuous-time system[J]. *IEE Proc of Control Theory and Applications*, 2003, 150(4): 325-330.
- [4] Fang C, Chang F. Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations[J]. *Systems & Control Letters*, 1993, 21(2): 109-114.
- [5] Fang C H, Li L, Chang F R. Robust control analysis and design for discrete-time singular systems[J]. *Automatica*, 1994, 30(11): 1741-1750.
- [6] Gao X W, He H F, Qi W H. Admissibility analysis for discrete-time singular Markov jump systems with asynchronous switching[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 313(15): 431-441.
- [7] Zhuang G M, Ma Q, Zhang B Y, et al. Admissibility and stabilization of stochastic singular Markovian jump systems with time delays[J]. *Systems & Control Letters*, 2018, 114(C): 1-10.
- [8] Chaibi N, Tissir E H. Delay dependent robust stability of singular systems with time-varying delay[J]. *Int J of Control Automation & Systems*, 2012, 10(3): 632-638.
- [9] Emilia F. Stability of linear descriptor systems with delay: A Lyapunov-based approach[J]. *J of Mathematical Analysis & Applications*, 2002, 273(1): 24-44.
- [10] Wang S, Gao C, Jiang B, et al. Robust finite-time control for neutral systems with time-varying delays via sliding mode observer[J]. *Int J of Control Automation & Systems*, 2017, 15(5): 1-10.
- [11] Ma S, Boukas E K. A descriptor system approach to sliding mode control for uncertain Markov jump systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2707-2713.
- [12] Liu Z, Zhao L, Gao C. Observer-based adaptive H_∞ control of uncertain stochastic singular systems via integral sliding mode technique[J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 11(5): 668-676.
- [13] Wu Z, Zhou W. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain singular time-delay systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2007, 1(5): 1234-1241.
- [14] Alma M, Darouach M. Adaptive observers design for a class of linear descriptor systems[J]. *Automatica*, 2014, 50(2): 578-583.
- [15] Efimov D, Polyakov A, Richard J P. Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems[J]. *European J of Control*, 2015, 23: 26-35.
- [16] Li W, Feng Z, Sun W, et al. Admissibility analysis for Takagi-Sugeno fuzzy singular systems with time delay[J]. *Neurocomputing*, 2016, 205(C): 336-340.
- [17] Liu Z Y, Chong L, Bing C. Admissibility analysis for linear singular systems with time-varying delays via neutral system approach[J]. *ISA Trans*, 2016, 61(C): 141-146.
- [18] Chadli M, Karimi H R, Shi P. On stability and stabilization of singular uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems[J]. *J of the Franklin Institute*, 2014, 351(3): 1453-1463.
- [19] Sakhivel R, Joby M, Mathiyalagan K, et al. Mixed H_∞ and passive control for singular Markovian jump systems with time delays[J]. *J of the Franklin Institute*, 2015, 352(10): 4446-4466.
- [20] Liu Z, Gao C, Kao Y. Robust H_∞ control for a class of neutral-type systems via sliding mode observer[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2015, 271(C): 669-681.
- [21] Zhen L, Lin Z, Kao Y, et al. Robust passive control for a class of uncertain neutral systems based on sliding mode observer[J]. *ISA Trans*, 2016, 66(C): 64-76.
- [22] Boukas E K, Liu Z K. Robust H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1918-1924.
- [23] Kao Y, Xie J, Wang C, et al. A sliding mode approach to H_∞ non-fragile observer-based control design for uncertain Markovian neutral-type stochastic systems[J]. *Automatica*, 2015, 52(1): 218-226.
- [24] Han Y Q, Kao Y G, Gao C C. Robust observer-based H_∞ control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays via sliding mode approach[J]. *ISA Trans*, 2018, 80(C): 81-88.
- [25] Liu Z, Zhao Lin, Kao Y G, et al. Robust passive control for a class of uncertain neutral systems based on sliding mode observer[J]. *ISA Trans*, 2017, 66(C): 64-76.
- [26] Han Y, Kao Y, Gao C. Robust sliding mode control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays and external disturbances[J]. *Automatica*, 2017, 75(C): 210-216.
- [27] Liu Z, Gao C. A new result on robust H_∞ control for uncertain time-delay singular systems via sliding mode control[J]. *Complexity*, 2016, 21(S2): 165-177.
- [28] Wei Y, Wang M, Qiu J. New approach to delay-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump systems with time-varying delay and incomplete transition descriptions[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(5): 684-696.
- [29] Wang G. Stochastic stabilization of singular systems with Markovian switchings[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2015, 250(C): 390-401.

作者简介

肖会敏(1963—),男,教授,博士,从事复杂系统建模分析与控制、管理信息系统及计算机网络集成等研究, E-mail: huiminxiao@126.com;

孟欣(1992—),男,硕士生,从事广义时滞系统稳定性分析、时滞系统滑模变结构控制的研究, E-mail: ouc_mengxin@163.com.

(责任编辑: 齐 霁)