

三参数区间数下非线性可拓关联度决策方法

许立波^{1†}, 李兴森², 郭 研¹

(1. 浙江大学宁波理工学院 计算机与数据工程学院, 浙江 宁波 315000;

2. 广东工业大学 可拓学与可拓创新方法研究所, 广州 510006)

摘 要: 针对属性值为三参数区间数和权重未知的多属性决策问题, 提出一种新的基于非线性可拓简单关联度的多属性决策方法和框架. 该方法基于可拓简单关联函数提出非线性可拓三参数区间关联度的计算方法, 通过定义区间映射变换算子, 将不同类型指标的关联度计算均变换为效益型指标的单调递增关联度计算. 该方法内含偏好态度系数的设置以反映决策者态度倾向带来的决策不确定性, 而且能够体现人们进行决策评价时的非线性思维. 最后通过算例分析表明所提出方法的合理性和稳定性.

关键词: 决策; 可拓学; 三参数区间数; 关联度

中图分类号: N945

文献标志码: A

Nonlinear extension dependent degree method to three-parameter interval number decision making

XU Li-bo^{1†}, LI Xing-sen², GUO Yan¹

(1. College of Computer and Data Engineering, Zhejiang University Ningbo Institute of Technology, Ningbo 315000, China; 2. Research Institute of Extenics and Innovation Methods, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In view of the multi-attribute decision making problem with attribute values being three-parameter interval number and weights unknown, a new decision making approach based on nonlinear extension dependent degree is proposed. According to traditional extension simple dependent functions, it proposes a nonlinear extension dependent function for three-parameter interval number. Then, through an interval mapping transformation operator, the processes of computing dependent degree under different types of attributes are transformed to the simple and monotonous process under benefit-type attribute. The method can not only reflect decision uncertainty from risk preference of a decision maker by adjusting its attitude coefficients, but also express a nonlinear thinking model in the evaluation of people. Finally, an example is presented to illustrate the effectiveness and stability of the proposed method.

Keywords: decision making; extenics; three-parameter interval number; dependent degree

0 引 言

在多属性决策中, 由于客观事物的复杂性和动态性以及决策者认识的有限性, 属性信息往往具有模糊性和不确定性特征, 很难用一个精确的数值进行描述. 因此, 区间数、模糊数、联系数、灰数等能够描述不确定性信息的方法理论得到了广泛的研究应用^[1-4]. 区间数理论作为可能的解决方案之一, 产生了许多有价值的研究成果, 但是传统二元区间数对不确定性信息的描述过于粗糙, 只关注于区间上下界而忽视其内在的偏好信息, 极大地限制了实际的应用场景. 相较而言, 三参数区间数^[5]不仅保留了区间上下

界信息, 而且能够突出取值可能性最大的重心值, 具有对不确定性信息更强的描述能力, 因此近年来成为不确定性决策研究的关注点之一. 文献[6-7]根据灰色系统理论, 建立三参数区间灰数概念及其关联度和贴近度的计算方法. 文献[8]直接将区间三参数和的比值大小作为区间比较结果, 通过两个比较矩阵进行方案排序. 文献[9]将区间可能度排序方法拓展到三参数区间, 并建立三参数区间数 TOPSIS 模型. 文献[10]结合三参数区间灰数的重心值、中心值和区间长度, 定义了一种精确记分函数作为比较依据. 文献[11]提出将三参数区间数转化为两参数区间数, 这

收稿日期: 2018-02-02; 修回日期: 2019-03-23.

基金项目: 浙江省自然科学基金项目(LY16G010010, LY18F020001); 宁波市创新团队项目(2016C11024).

责任编辑: 张维海.

[†]通讯作者. E-mail: xu_libo@163.com.

样即可使用传统区间数的可能度排序方法. 文献[12-13]利用三角模糊数描述三参数区间, 基于模糊数运算法则和理想点距离测度实现排序. 文献[14]提出三参数区间模糊集概念并给出其运算关系和距离测度. 文献[15]基于前景理论采用灰数综合前景值进行决策分析, 充分考虑了决策者的风险心理态度.

总的来看, 现有的研究虽然取得了很大的进展, 但还有待改进. 其一, 大多数研究是建立在模糊数相关运算理论(包括得分函数、模糊距离、贴近度以及可能度等方法)的基础上, 然后进行三参数区间数领域的拓展推广, 因此缺少新的方法和框架. 其二, 现有框架大多是先定义区间与区间之间的距离, 再通过测度其与正负理想点之间的距离来定义排序关系, 距离度量一般以向量间差值的绝对值或平方根形式表达, 使得不同区间之间的差异值基本以线性体现, 不符合人们的决策习惯. 其三, 很多决策模型过于确定化, 丢失了结果的不确定性信息, 后期难以进行稳定性检测和不确定性分析. 对此, 文献[16]提出集对分析方法, 将三参数区间数转化为联系数表达, 不但保持了结果的不确定性, 而且计算过程简单, 是值得继续深化的思路.

针对以上问题, 本文提出一种新的基于非线性可拓简单关联度的多属性决策方法和框架. 首先基于可拓简单关联度的思想, 给出非线性可拓简单关联度计算表达式及其映射变换方法; 然后扩展出三参数区间非线性关联度计算表达式及其区间映射变换方法, 使得在不同类型指标下的关联度排序计算形式统一简洁, 而且无需定义区间距离以及贴近度等系列概念, 对于权重完全未知的情况, 给出基于三参数区间数相离度最大化的客观权重赋值方法; 接着通过算例, 结合与已有方法的对比分析, 表明所提出方法的可行性和简洁性; 最后根据偏好态度系数的不同设置给出排序结果并进行进一步分析, 反映决策者对评价高低值及统计值的不同风险倾向态度, 体现该方法的不确定性分析能力, 并充分反映出非线性关联对评价决策的影响.

1 可拓三参数区间简单关联度

1.1 三参数区间数

定义1 设 R 为实数集, 对于任意 $a, b \in R$ 且 $a \leq b$, 称 $X = [a, b]$ 为区间数. 其中: a 为区间下界, b 为区间上界. 当 $a = b$ 时, X 退化为普通实数.

定义2^[8-9] 设 R 为实数集, 对于任意 $a, b, m \in R$ 且 $a \leq m \leq b$, 称 $\bar{X} = [a, m, b]$ 为三参数区间数. 其中: a 和 b 分别为区间数的下上界; m 为此区间中具有特殊统计意义的取值, 如可能性最大的取值或者均

值, 称为区间重心值或理想值.

三参数区间数是区间数的深化, 对不确定和模糊评价的表达更加丰富和准确. 以对产品的性能评价为例, 设决策评价为三参数区间数 $[4, 6, 8]$, 表示用户群评价的下上界分别为4和8, 而评价为6的比例最高或者均分是6; 也可以表示单一用户评价认为产品的得分在4~8之间, 6是可能性最大的得分; 还可以表示产品性能的所有指标中最低分和最高分是4和8, 均分是6. 因此, 虽然三参数区间数与三角模糊数^[17-18]表达形式相似, 两者均表示左右端点为临界点、中间端点为最具代表性的点, 但三角模糊数定位于元素隶属模糊集合的程度, 三参数区间数定位于概率或统计意义的表达, 其含义更为普遍和多样化, 值得深入研究和应用.

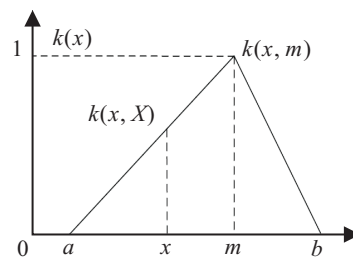
1.2 可拓简单关联度及其映射变换

文献[19]给出一种可拓简单关联度定义, 设有限区间 $X = [a, b]$, 最优值为 $m \in X$, 则有

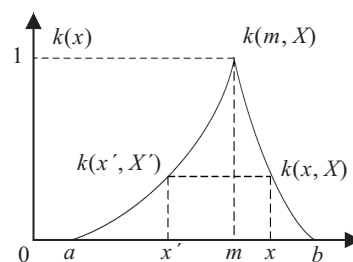
$$k(x, X) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & x \leq m; \\ \frac{b-x}{b-m}, & x \geq m. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $k(x, X)$ 称为点 x 关于区间 X 的可拓简单关联度, 如图1(a)所示. 特别地, 当 $m = a$ 或 b , 且 $x \in X$ 时, 有

$$k(x, X) = \begin{cases} \frac{b-x}{b-a}, & m = a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & m = b. \end{cases} \quad (2)$$



(a) 线性函数



(b) 非线性函数

图1 可拓简单关联函数

定义3 设有限区间 $X = [a, b]$, 最优值为 $m \in X$, 则有

$$k(x, X) = \begin{cases} \frac{x-a}{2m-x-a}, & x \leq m; \\ \frac{b-x}{b+x-2m}, & x \geq m. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $k(x, X)$ 称为点 x 关于区间 X 的非线性可拓简单关联度,如图1(b)所示,且满足如下性质:

- 1) 当 $x = m$ 时, $k(x, X)$ 有最大值且 $k(x, X) = 1$;
- 2) 当 $x \in X$,且 $x \neq a, b$ 时, $k(x, X) > 0$;
- 3) 当 $x \notin X$,且 $x \neq a, b$ 时, $k(x, X) < 0$;
- 4) 当 $x = a$ 或 $x = b$ 时, $k(x, X) = 0$.

特别地,当 $m = a$ 或 b ,且 $x \in X$ 时,有

$$k(x, X) = \begin{cases} \frac{b-x}{b+x-2a}, & m = a; \\ \frac{x-a}{2b-x-a}, & m = b. \end{cases} \quad (4)$$

如图1(a)所示,文献[19]中的可拓关联度是关于最优点 m 的线性函数,但现实的决策或评价应用中,更多的隶属度或相关性都是非线性的.如对某方案的效益型指标进行评估,评分区间为 $0 \sim 10$,假设方案 a, b, c, d 得分分别为 $1, 2, 8, 9$,显然决策者会认为方案 a 和 b 没有多大区别,因为得分均远离理想值.但决策者会认为方案 d 明显优于 c ,这种优越性在高分段体现得更明显,符合人们的思维习惯.虽然方案 a, b 之间得分差异与方案 c, d 是一样的,但实际的决策意义却区别很大.因此,本文提出非线性关联度的概念并给出一种表达式,在如图1(b)所示的凸函数关联度下,方案 c, d 的得分差异明显大于 a, b 的差异.当最优点 m 在端点时,可拓简单关联度是单调递增或递减函数,计算过程更加简洁且直观性更强.但当最优点 m 不在端点时,关联度计算公式需要根据最优点 m 的位置进行变化,为此提出映射变换的方法,将最优点不在端点时的关联度运算变换为最优点在端点的关联度运算,从而保持运算的单调性和简洁性.

定义4 设有限区间 $X = [a, b]$,最优值为 $m \in X, m \neq a, b$,对于 $\forall x \in X$,存在变换 $\theta(x) = x'$,使得 $x' \in [a, m]$ 且 $k(x', X) = k(x, X)$ 成立,称 x' 为 x 的关联度等值映射点, θ 为关联度等值映射变换.

定理1 设有限区间 $X = [a, b]$,最优值为 $m \in X, m \neq a, b$,对于 $\forall x \in X$,若 x' 为 x 的非线性关联度等值映射点,则有 $x' \in [a, m]$,且

$$x' = \theta(x) = \begin{cases} \frac{(b-a)m - (m-a)x}{b-m}, & x \in (m, b]; \\ x, & x \in [a, m]. \end{cases} \quad (5)$$

证明 由定义3和定义4可知,当 x' 是 x 的非线性关联度等值映射点时,有 $x \in (m, b], x' \in [a, m]$,且满足 $k(x', X) = k(x, X)$.因此有

$$\begin{aligned} k(x', X) &= \frac{x' - a}{2m - x' - a} = k(x, X) = \frac{b - x}{b + x - 2m} \Rightarrow \\ x' - a &= \frac{b - x}{b + x - 2m} (2m - a) - \frac{b - x}{b + x - 2m} x' \Rightarrow \\ \left(1 + \frac{b - x}{b + x - 2m}\right) x' &= \frac{b - x}{b + x - 2m} (2m - a) + a \Rightarrow \\ 2(b - m)x' &= 2mb - 2mx + 2ax - 2am \Rightarrow \\ x' &= \frac{(b - a)m - (m - a)x}{b - m}. \end{aligned}$$

显然, x' 是 x 的线性相关函数且单调,当 $x = m$ 和 b 时, x' 取极值 m 和 a ,即 $x' \in [a, m]$. \square

对于有限区间 $X = [a, b]$,最优值 $m \in X, m \neq a, b$,通过上述定义的映射变换实现了将任意区间内的点及其关联度运算映射到 X 的左半区间即单调递增区间 $[a, m]$ 上,由此推出定理2.

定理2 设有限区间 $X = [a, b]$,最优值为 $m \in X, m \neq a, b, \forall x \in X$,对 x 作映射变换 $\theta(x) = x'$,并变换区间 X 为其左半区间 $X' = [a, m]$,即单调递增区间,则有 $k(x', X') = k(x, X)$.

证明略,根据定理1易得,如图1(b)所示.

该定理实现了将最优点不在端点的简单关联度计算转变为最优点在右端点的简单关联度计算,使得关联度计算表达式变得简单统一.

1.3 非线性可拓三参数区间关联度及其映射变换

定义5 设有限区间 $X = [a, b]$,最优值为 $m \in X$,子区间 $X_0 = [a_0, b_0], X_0 \in X$,则有

$$\begin{aligned} k(X_0, X) &= \alpha k(a_0, X) + (1 - \alpha)k(b_0, X), \\ \alpha &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $k(X_0, X)$ 称为子区间 X_0 关于区间 X 的可拓区间简单关联度,且满足如下性质:

- 1) 当 $a_0 = b_0$ 时, $k(X_0, X)$ 退化为可拓简单关联度;
- 2) 当 $a_0 = b_0 = m$ 时, $k(X_0, X)$ 达到最大值1;
- 3) 当 $a_0 = a, b_0 = b$ 时, $k(X_0, X)$ 有最小值0;
- 4) $X_0 \subset X, 0 < k(X_0, X) < 1$.

当 $m = a$ 或 b 时,区间关联度计算在区间 X 上简化为单调递增或单调递减函数.其中 α 代表决策者的偏好态度系数,不同的系数取值反映了决策者对于区间上下界关联度的倾向程度. $\alpha = 0.5$ 代表决策者对区间上下界无偏好; $\alpha > 0.5$ 代表决策者更重视区间下界的关联度.反之亦然.

定义6 设有限区间 $X = [a, b]$,最优值 $m \in X$,三参数子区间 $\overline{X_0} = [a_0, m_0, b_0]$ 且 $\overline{X_0} \subseteq X$,则有

$$\begin{aligned} k(\overline{X_0}, X) &= \\ \alpha k(a_0, X) &+ (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(b_0, X), \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta \leq 1, \alpha, \beta \in [0, 1]. \quad (7)$$

其中 $k(\overline{X}_0, X)$ 称为三参数子区间 \overline{X}_0 关于 X 的非线性可拓三参数区间简单关联度, 且满足如下性质:

- 1) 当 $a_0 = b_0 = m_0$ 时, $k(\overline{X}_0, X)$ 退化为简单关联度;
- 2) 当 $a_0 = b_0 = m_0 = m$ 时, $k(\overline{X}_0, X)$ 达到最大值且 $k(\overline{X}_0, X) = k(m_0, X) = k(m, X) = 1$;
- 3) 当 $a_0 = a, b_0 = b$ 时, $k(\overline{X}_0, X) = (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X)$, 特别地, 当 $a_0 = m_0$ 或 $b_0 = m_0$ 时, $k(\overline{X}_0, X)$ 达到最小值 0;
- 4) $\overline{X}_0 \subset X, 0 < k(\overline{X}_0, X) < 1$.

当 $m = a$ 或 b 时, 三参数区间关联度计算在区间 X 上简化为单调递增或单调递减函数. 上述三参数关联度表达式表征了三参数子区间 \overline{X}_0 与区间 X 的相互关系, 其中 α, β 代表决策者的偏好态度系数, 不同的系数取值反映了决策者对于区间上下界和重心值关联度的倾向程度. 表 1 为几种典型的态度系数设置方案. 其中: I 型代表决策者无偏好设置; II、IV 型代表决策者更倾向重视区间重心值的关联度; III 型代表决策者更重视区间上下界的关联度; V 和 VI 型分别代表决策者更重视区间上界、下界的关联度.

表 1 偏好态度系数的设置

| | I | II | III | IV | V | VI |
|----------------------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|
| α | 0.333 | 0.250 | 0.400 | 0.1065 | 0.222 | 0.444 |
| β | 0.333 | 0.25 | 0.400 | 0.1065 | 0.444 | 0.222 |
| $1 - \alpha - \beta$ | 0.333 | 0.500 | 0.200 | 0.7870 | 0.333 | 0.333 |

当 $m = a$ 或 b 时的三参数区间关联度计算简洁直观, 但当 $m \neq a, b$ 时, 三参数子区间的关联度计算和比较就变得复杂, 关联度计算形式会因区间上下界和重心值与最优点 m 的相对位置不同而复杂变化, 且态度系数也不能与区间上下界的关联度直接对应, 为此提出区间映射变换的方法, 将最优点不在端点时的区间关联度运算变换成最优点在端点的区间关联度运算, 从而保持区间关联度运算的单调性和简洁性.

定义 7 设有限区间 $X = [a, b]$, 最优值为 $m \in X, m \neq a, b$, 对于三参数子区间 $\overline{X}_0 = [a_0, m_0, b_0]$ 且 $\overline{X}_0 \subset X$, 存在映射变换 $\theta(\overline{X}_0) = \overline{X}'_0$, 使得 $k(\overline{X}'_0, X) = k(\overline{X}_0, X)$ 且 $\overline{X}'_0 \subseteq [a, m]$, 则称 \overline{X}'_0 为 \overline{X}_0 的关联度等值映射区间.

定理 3 设有限区间 $X = [a, b]$, 最优值 $m \in X, m \neq a, b$, 对于三参数子区间 $\overline{X}_0 = [a_0, m_0, b_0]$ 且 $\overline{X}_0 \subset X$, 若 \overline{X}'_0 为 \overline{X}_0 的关联度等值映射区间, 则有:

- 1) 当 $a_0, m_0, b_0 \in [a, m]$ 时, $\overline{X}'_0 = \theta(\overline{X}_0) = \overline{X}_0$.
- 2) 当 $a_0, m_0 \in [a, m], b_0 \in (m, b]$ 时, 有

$$\overline{X}'_0 = \begin{cases} [a_0, m_0, b'_0] = \left[a_0, m_0, \frac{(b-a)m - (m-a)b_0}{b-m} \right], \\ [b'_0, m_0, a_0] = \left[\frac{(b-a)m - (m-a)b_0}{b-m}, m_0, a_0 \right]. \end{cases}$$

- 3) 当 $a_0 \in [a, m], m_0, b_0 \in (m, b]$ 时, 有

$$\overline{X}'_0 = \begin{cases} [a_0, m'_0, b'_0] = \left[a_0, \frac{(b-a)m - (m-a)m_0}{b-m}, \frac{(b-a)m - (m-a)b_0}{b-m} \right], \\ [b'_0, m'_0, a_0] = \left[\frac{(b-a)m - (m-a)b_0}{b-m}, \frac{(b-a)m - (m-a)m_0}{b-m}, a_0 \right]. \end{cases}$$

- 4) 当 $a_0, m_0, b_0 \in (m, b]$ 时, 有

$$\overline{X}'_0 = [b'_0, m'_0, a'_0] = \left[\frac{(b-a)m - (m-a)b_0}{b-m}, \frac{(b-a)m - (m-a)m_0}{b-m}, \frac{(b-a)m - (m-a)a_0}{b-m} \right].$$

证明 不失一般性, 假设决策者定义 α 为低关联度偏好系数, β 为高关联度偏好系数, $1 - \alpha - \beta$ 为重心值关联度偏好系数. 这里只证明第 2) 种情况. 当 $a_0, m_0 \in [a, m], b_0 \in (m, b]$ 时, 分两种情况讨论:

1) 当 $k(a_0, X) > k(b_0, X)$ 时, 如图 2(a) 所示, 由于 $b_0 \in (m, b]$, 根据定理 1, 对 b_0 作等值映射变换 $\theta(b_0) = b'_0 = k(b_0, X)(m - a) + a$, 使 $k(b'_0, X) = k(b_0, X)$ 且 $b'_0 \in [a, m]$. 又由于关联度在区间 $[a, m]$ 上单调递增且 $k(b'_0, X) < k(a_0, X)$, 得到 $b'_0 < a_0$, 进而得到 $\overline{X}'_0 = [b'_0, m_0, a_0]$, 有

$$\begin{aligned} k(\overline{X}'_0, X) &= \alpha k(b'_0, X) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(a_0, X) = \\ &= \alpha k\left(\frac{(b-a)m - (m-a)b_0}{b-m}, X\right) + \\ &= (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(a_0, X) = \\ &= \alpha \frac{(b-a)m - (m-a)b_0 - a}{b-m} + \\ &= \alpha \frac{b-b_0}{b+b_0-2m} + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(a_0, X) = \\ &= \alpha k(b_0, X) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(a_0, X) = \\ &= k(\overline{X}_0, X). \end{aligned}$$

- 2) 当 $k(a_0, X) < k(b_0, X)$ 时, 如图 2(b) 所示, 同理

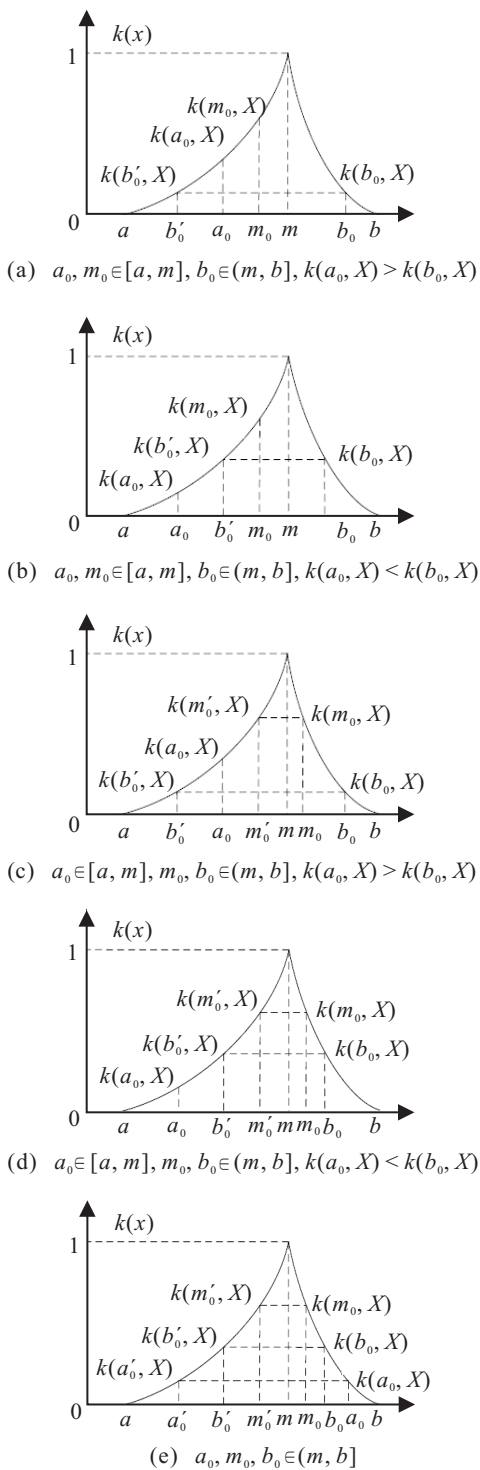


图2 区间关联度映射

得到 $\theta(b_0) = b'_0 = k(b_0)(m - a) + a, b'_0 \in [a, m]$ 且 $b'_0 > a_0$, 因此 $\overline{X'_0} = [a_0, m_0, b'_0]$, 有

$$\begin{aligned}
 k(\overline{X'_0}, \overline{X}) &= \\
 \alpha k(a_0, X) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(b'_0, X) &= \\
 \alpha k(a_0, X) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + & \\
 \beta k\left(\frac{(b - a)m - (m - a)b_0}{b - m}, X\right) &= \\
 \alpha k(a_0, X) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta \frac{b - b_0}{b + b_0 - 2m} &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha k(a_0, X) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(b_0, X) &= \\
 k(\overline{X_0}, \overline{X}). &
 \end{aligned}$$

当 $k(a_0, X) > k(b_0, X)$ 时, $\overline{X'_0} = [b'_0, m_0, a_0]$; 当 $k(a_0, X) < k(b_0, X)$ 时, $\overline{X'_0} = [a_0, m_0, b'_0]$. 其他几种情况如图2(c)~图2(e)所示, 此处不再赘述. □

对于有限区间 $X = [a, b]$, 最优值 $m \in X, m \neq a, b$, 通过上述定义的映射变换, 实现了将所有子区间及其关联度运算都映射到 X 的左半区间 $[a, m]$ 上, 由此推出定理4.

定理4 设有限区间 $X = [a, b]$, 最优值 $m \in X, m \neq a, b$, 有三参数子区间 $\overline{X_0} = [a_0, m_0, b_0]$, 且 $X_0 \subseteq X$, 对 X_0 作区间映射变换 $\theta(\overline{X_0}) = \overline{X'_0}$, 并变换区间 X 为其左半区间 $X' = [a, m]$, 即单调递增区间, 则有 $k(\overline{X'_0}) = k(\overline{X_0}, X)$.

证明过程略.

该定理实现了将最优点不在端点的三参数区间关联度计算变换为最优点在端点的单调递增的三参数区间关联度计算, 使得区间关联度计算表达式和排序过程变得简单统一.

非线性可拓三参数区间简单关联度包含如下一些意义:

- 1) 不仅测度了两个区间之间的关系, 而且测度了与第3个参数之间的关系, 因此对区间间关系的描述能力更强;
- 2) 通过区间映射变换, 关联度计算过程变得更简洁统一;
- 3) 非线性关联度体现了人们决策评价时的非线性思维, 即越接近最优点评价差异的价值越大, 如对于最优点为10的区间 $[0, 10]$, 很多时候认为评价区间为 $[3, 6, 8]$ 的方案要优于评价区间为 $[4, 6, 7]$ 的方案, 因为得到更高评价比得到更低评价的价值更大;
- 4) 通过态度系数的设置, 反映决策者对指标高低评价的不同态度偏好, 以便进行决策的不确定性分析;
- 5) 不同于三参数区间灰色关联度、三参数区间贴近度、三参数区间投影排序^[20]等已有方法, 表达了一种新的非基于距离的区间关系测度模型.

下面将关联度计算应用到不同类型的指标决策中.

1.4 不同类型决策指标区间的关联度

定理5 设效益型指标区间 $X = [a, b]$, 有三参数子区间 $\overline{X_0} = [a_0, m_0, b_0]$ 且 $\overline{X_0} \subseteq X$, 则有

$$\begin{aligned}
 k(\overline{X_0}, X) &= \\
 \alpha k(a_0, X) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0, X) + \beta k(b_0, X) &=
 \end{aligned}$$

$$\alpha \frac{a_0 - a}{2b - a_0 - a} + (1 - \alpha - \beta) \frac{m_0 - a}{2b - m_0 - a} + \beta \frac{b_0 - a}{2b - b_0 - a}. \quad (8)$$

证明 由于 $X = [a, b]$ 是效益型指标区间, b 是最优值, 根据定义3可得. \square

定理6 设效益型指标区间 $X = [a, b]$, 有三参数子区间 $\bar{X}_0 = [a_0, m_0, b_0]$ 和 $\bar{X}_1 = [a_1, m_1, b_1]$, 且 $\bar{X}_0, \bar{X}_1 \subseteq X$, 设

$$\gamma = \frac{\alpha(a_0 - a_1)}{(2b - a_0 - a)(2b - a_1 - a)} + \frac{(1 - \alpha - \beta)(m_0 - m_1)}{(2b - m_0 - a)(2b - m_1 - a)} + \frac{\beta(b_0 - b_1)}{(2b - b_0 - a)(2b - b_1 - a)},$$

有:

- 1) 当 $\gamma = 0$ 时, $k(\bar{X}_0, X) = k(\bar{X}_1, X)$;
- 2) 当 $\gamma > 0$ 时, $k(\bar{X}_0, X) > k(\bar{X}_1, X)$;
- 3) 当 $\gamma < 0$ 时, $k(\bar{X}_0, X) < k(\bar{X}_1, X)$.

证明 由定理5, 有

$$\begin{aligned} k(\bar{X}_0, X) - k(\bar{X}_1, X) &= \alpha k(a_0) + (1 - \alpha - \beta)k(m_0) + \beta k(b_0) - (\alpha k(a_1) + (1 - \alpha - \beta)k(m_1) + \beta k(b_1)) = \\ &= \alpha \left(\frac{a_0 - a}{2b - a_0 - a} - \frac{a_1 - a}{2b - a_1 - a} \right) + (1 - \alpha - \beta) \left(\frac{m_0 - a}{2b - m_0 - a} - \frac{m_1 - a}{2b - m_1 - a} \right) + \beta \left(\frac{b_0 - a}{2b - b_0 - a} - \frac{b_1 - a}{2b - b_1 - a} \right) = \\ &= \alpha \left(\frac{2(b - a)(a_0 - a_1)}{(2b - a_0 - a)(2b - a_1 - a)} \right) + (1 - \alpha - \beta) \left(\frac{2(b - a)(m_0 - m_1)}{(2b - m_0 - a)(2b - m_1 - a)} \right) + \beta \left(\frac{2(b - a)(b_0 - b_1)}{(2b - b_0 - a)(2b - b_1 - a)} \right) = \\ &= 2(b - a) \left(\frac{\alpha(a_0 - a_1)}{(2b - a_0 - a)(2b - a_1 - a)} + \frac{(1 - \alpha - \beta)(m_0 - m_1)}{(2b - m_0 - a)(2b - m_1 - a)} + \frac{\beta(b_0 - b_1)}{(2b - b_0 - a)(2b - b_1 - a)} \right). \end{aligned}$$

综上, 定理6得证. \square

表2给出了非线性和线性可拓关联度计算的例子. 可以看到, 区间数 $[2, 6, 8]$ 、 $[3, 6, 7]$ 和 $[1, 6, 9]$ 的重心值相同, 离最优点10的直接距离也相同, 因此线性区间关联度值相同, 但非线性关联度值有差异, 因为其值受高评价值的影响更大.

表2 效益型区间关联度运算例子

| $\alpha = \beta = 1$ | [2,6,8] | [3,6,7] | [4,6,7] | [1,6,9] | [0,6,9] |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | [0,10] | [0,10] | [0,10] | [0,10] | [0,10] |
| 非线性 | 0.402 | 0.381 | 0.406 | 0.433 | 0.416 |
| 线性 | 0.533 | 0.533 | 0.567 | 0.533 | 0.500 |

定理7 设固定型指标区间 $X = [a, b]$, 最优值 $m \in X, m \neq a, b$, 有三参数子区间 $\bar{X}_0 = [a_0, m_0, b_0]$ 且 $X_0 \subseteq X$, 对 X_0 作区间映射变换 $\theta(\bar{X}_0) = \bar{X}'_0$, 并变换区间 X 为效益型指标区间 $X' = [a, m]$, 则有 $k(\bar{X}'_0, X') = k(\bar{X}_0, X)$.

由定义7和定理4易得定理7, 证明略.

定理8 设成本型指标区间 $X = [a, b]$, 有三参数子区间 $\bar{X}_0 = [a_0, m_0, b_0]$ 且 $X_0 \subseteq X$, 对 X_0 作区间映射变换 $\theta(\bar{X}_0) = \bar{X}'_0 = [2a - a_0, 2a - m_0, 2a - b_0]$, 并变换区间 X 为效益型指标区间 $X' = [b', a] = [2a - b, a]$, 则有 $k(\bar{X}'_0, X') = k(\bar{X}_0, X)$.

由定义7和定理3易得定理8, 证明略.

以上定理实现了将成本型指标区间和固定型指标区间的关联度计算都变换为单调递增的效益型指标区间的关联度计算, 不但使得决策应用中的关联度计算过程统一为式(8)形式, 而且便于进行不确定性和动态性分析. 表3显示了一个固定型区间关联度的简单排序例子. 可以看到, 4个三参数区间经过映射变换后进行求值, 在重心值相同的情况下, 原始数 $[4, 6, 8]$ 、 $[3, 6, 7]$ 离最优点6的直接距离也相同, 但 $[3, 6, 7]$ 获得了更高的关联度值, 因为受高评价值的影响更大. $[2, 6, 8]$ 和 $[1, 6, 7]$ 的比较也是如此.

表3 固定型区间关联度运算例子

| 最优点6 | [0,10] | [2,6,8] | [3,6,7] | [4,6,8] | [1,6,7] |
|------------------------|--------|---------|-----------|---------|-----------|
| $\alpha = \beta = 1/3$ | | | | | |
| 映射 | [0,6] | [2,6,3] | [3,6,4.5] | [3,6,4] | [1,6,4.5] |
| 关联度 | | 0.511 | 0.6443 | 0.611 | 0.567 |

1.5 基于相离度偏差最大化的权重计算

在属性权重信息完全未知且决策者对方案无偏好的情形下, 从对方案进行排序的角度考虑, 若某个属性下所有方案的属性值相互差异越小, 则表明该属性对方案的区分作用越小, 应该被赋予较小的权重. 反之, 若某属性下各方案的属性值相互差异越大, 则表明其对方案的优劣区分作用越大, 应该被赋予更大的权重. 特别地, 当各方案的某属性值都相同时, 该属性对方案的排序毫无作用. 据此思想建立基于三参数区间数相离度偏差最大化的权重计算模型^[21-23], 考虑评价矩阵中的属性评价值都是以三参

数区间数形式给出,三参数区间数之间的差异可以用区间相离度进行量化表示. 设有评价矩阵 $(\overline{X}_{ij})_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, 评价值为三参数区间数 $\overline{X}_{ij} = [a_{ij}, m_{ij}, b_{ij}]$, W 为属性权重向量. 令 $d(\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj}) = |a_{ij} - a_{kj}| + |m_{ij} - m_{kj}| + |b_{ij} - b_{kj}|$ 为三参数区间数 $\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj}$ 的相离度, $D(W)$ 表示所有方案属性值与其他方案属性值的相离度总偏差, 权重向量 W 的选择应该使该总偏差最大. 因此, 可建立单目标最优化模型

$$\begin{aligned} \max D(W) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj}) w_j; \\ \text{s.t. } w_j &\geq 0, \sum_{j=1}^n w_j^2 = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

解此模型, 有拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(W, \lambda) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj}) w_j + \\ &\quad \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

求其偏导数, 令 $\frac{\partial L}{\partial w_j} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, 可求得拉格朗日函数稳定点. 由于约束条件是有界闭集, 目标函数 $D(W)$ 必有条件最大值和最小值. 将拉格朗日函数稳定点代入 $D(W)$ 后可知条件最大值的对应点为

$$w_j^* = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj}) \right]^2}}$$

对 w^* 进行归一化处理, 得到

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj})}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(\overline{X}_{ij}, \overline{X}_{kj})}. \tag{10}$$

2 决策算法过程

设决策问题的方案集 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, 属性集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 方案 s_i 在属性 u_j 下的评价

值为三参数区间数 $\overline{X}_{ij} = [a_{ij}, m_{ij}, b_{ij}]$, 则有评价矩阵 $(\overline{X}_{ij})_{m \times n}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Step 1: 对评价矩阵 $(\overline{X}_{ij})_{m \times n}$ 作区间映射变换, 将成本型和固定型指标属性及其三参数区间评价价值变换为对应的效益型指标属性及其三参数区间评价价值, 得到新的评价矩阵 $(\overline{X}'_{ij})_{m \times n}$.

Step 2: 根据需要, 确定 α, β 的态度系数设置.

Step 3: 取每个属性 u_j 的量值区间. 对事前明确有评价取值区间的属性, 该区间作为其量值区间; 对事前没有明确取值区间的属性, 按 max-min 原则取 $X'_j = [\min(\overline{X}'_{ij})_{m \times n}, \max(\overline{X}'_{ij})_{m \times n}] (i = 1, 2, \dots, m)$ 作为量值区间. 根据式 (8) 计算每个评价价值的三参数区间关联度 $k(\overline{X}'_{ij}, X'_j)$.

Step 4: 计算区间相离度偏差矩阵, 并根据式 (10) 计算最优权重集合 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Step 5: 得到每个方案 s_i 的综合三参数区间关联度 $K(s_i) = \sum_{j=1}^n w_j k(\overline{X}'_{ij}, X'_j)$, 并依据大小排序.

Step 6: 通过 α, β 取值变化进行不确定性分析.

3 算例分析

为便于比较说明, 算例采用文献 [12, 24] 的数据并稍作修改, 具体如下. 某单位对 5 名候选干部 (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) 进行年度考核, 制定了 6 项考核指标 ($u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$): 思想品德、工作态度、工作作风、文化水平、领导能力和开拓能力. 经过群众评议, 对每位候选人各项指标分别打分, 再进行统计处理, 得到每位候选人各指标的评议分作为属性值, 评分范围是事前确定的. 显然群众对同一候选人的评分各不相同, 因此属性值以三参数区间数形式给出, 前 5 项为越大越好的效益型属性, 评分范围为 $[0.80, 1.00]$. 为体现本文方法中区间映射变换的作用, 将原数据最后一项属性由效益型改为固定型, 评分范围为 $[0.80, 1.20]$, 其中 1.00 为最优值, 超过 1.00 表示过于激进, 反之表示过于保守. 最终属性值如表 4 所示. 依据上述信息, 确定最优人选.

表 4 评价数据表

| 候选 | u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6 |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| s_1 | [0.80 0.85 0.90] | [0.90 0.92 0.95] | [0.91 0.94 0.95] | [0.93 0.96 0.99] | [0.90 0.91 0.92] | [0.95 0.97 1.01] |
| s_2 | [0.90 0.95 1.00] | [0.89 0.90 0.93] | [0.90 0.92 0.95] | [0.90 0.92 0.95] | [0.94 0.97 0.98] | [0.90 0.93 1.05] |
| s_3 | [0.88 0.91 0.95] | [0.84 0.86 0.90] | [0.91 0.94 0.97] | [0.91 0.94 0.96] | [0.86 0.89 0.92] | [1.06 1.08 1.09] |
| s_4 | [0.85 0.87 0.90] | [0.91 0.93 0.95] | [0.85 0.88 0.90] | [0.86 0.89 0.93] | [0.87 0.90 0.94] | [1.04 1.07 1.08] |
| s_5 | [0.86 0.89 0.95] | [0.90 0.92 0.95] | [0.90 0.95 0.97] | [0.91 0.93 0.95] | [0.90 0.92 0.96] | [1.10 1.13 1.15] |

Step 1: 由表4得到评价矩阵.

Step 2: 由 Step 1 对评价矩阵作区间映射变换, 效益型属性区间及其值不变, 固定型属性区间及其属性值变换成效益型属性区间及对应属性值, 即 u_6 下的评价价值由

$$\begin{aligned}
& [0.95 \ 0.97 \ 1.01], [0.90 \ 0.93 \ 1.05], \\
& [1.06 \ 1.08 \ 1.09], [1.04 \ 1.07 \ 1.08], \\
& [1.10 \ 1.13 \ 1.15]
\end{aligned}$$

变换为

$$\begin{aligned}
& [0.95 \ 0.97 \ 0.99], [0.90 \ 0.93 \ 0.95], \\
& [0.91 \ 0.92 \ 0.94], [0.92 \ 0.93 \ 0.96], \\
& [0.85 \ 0.87 \ 0.90].
\end{aligned}$$

Step 3: 由 Step 2 确定 α 、 β 的系数设置方案, 为比较的一致性以及通用性, 设 $\alpha = \beta = 1/3$.

Step 4: 由 Step 3 确定每个属性的量值区间, 本例中, 前 5 个属性有确定的评价区间 $[0.80, 1.00]$, 最后一个属性的评价区间经过区间映射变换也变成 $[0.80, 1.00]$, 根据式 (8) 计算每个评价价值的三参数区间关联度, 如表 5 所示.

表 5 三参数区间关联度

| 候选 | u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k_{1j} | 0.1587 | 0.4540 | 0.5059 | 0.6843 | 0.3804 | 0.7480 |
| k_{2j} | 0.6444 | 0.3684 | 0.4540 | 0.4540 | 0.6986 | 0.4716 |
| k_{3j} | 0.4098 | 0.2070 | 0.5523 | 0.5281 | 0.2985 | 0.4488 |
| k_{4j} | 0.2294 | 0.4869 | 0.2421 | 0.3161 | 0.3613 | 0.5256 |
| k_{5j} | 0.3556 | 0.4540 | 0.5575 | 0.4869 | 0.4762 | 0.2294 |

Step 5: 按 Step 4, 由式 (9) 计算相离度偏差矩阵, 得到每个属性下各方案与其他方案的评价区间相离度偏差值. 根据式 (10) 和相离度偏差矩阵, 得到相离度偏差最大化权重向量

$$W = (0.2250, 0.1344, 0.1406, 0.1375, 0.1656, 0.1969).$$

Step 6: 按 Step 5, 由最优权重向量 W 和三参数区间关联度计算综合关联度, 如表 6 所示.

表 6 综合关联度排序

| 候选 | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $K(s_i)$ | 0.4722 | 0.5293 | 0.4081 | 0.3579 | 0.4104 |
| 排序 | ② | ① | ④ | ⑤ | ③ |

Step 7: 根据 α, β 的设置变化进行不确定性分析, α, β 代表决策者对于指标区间关联度上下界和重心值关联度的倾向程度, 表 7 显示了在不同设置下的决策排序. 结果表明, 不同态度系数下的决策排序有稍许差异, 只体现在一定条件下方案 s_3 和 s_5 会发生排序逆转, 说明当前排序总体不确定性较低, 方案 s_1, s_2, s_4 的相对排序并不随决策者对评价高低值态度倾向的改变而改变. $\alpha = \beta = 0.106, \alpha = 0.444, \beta = 0.222$ 时, 分别反映了决策者对评价重心值和评价下界的较大倾向度, 此时评价上界被相对轻视, 方案 s_3 和 s_5 会发生排序逆转. 观察原始数据表 4, 可以发现 s_3 在评价下界、评价重心值和评价上界与方案 s_5 的总体差值分别是 $-1, -2$ 和 -4 . 因此相对于方案 s_5 , 方案 s_3 在下界和重心值的总体评价比上界要好, 表明这种排序逆转在评价重心值和评价下界受倾向态度影响的情况下发生是合理的.

表 7 不同态度系数设置下的排序

| 候选 | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 | 排序 |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| $\alpha = \beta = 0.333$ | 0.4722 | 0.5293 | 0.4081 | 0.3579 | 0.4104 | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |
| $\alpha = \beta = 0.250$ | 0.4705 | 0.5260 | 0.4039 | 0.3528 | 0.4044 | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |
| $\alpha = \beta = 0.400$ | 0.4736 | 0.5319 | 0.4114 | 0.3620 | 0.4152 | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |
| $\alpha = \beta = 0.106$ | 0.4676 | 0.5204 | 0.3966 | 0.3440 | 0.3939 | $s_2 \succ s_1 \succ s_3 \succ s_5 \succ s_4$ |
| $\alpha = 0.222, \beta = 0.444$ | 0.5028 | 0.5680 | 0.4382 | 0.3847 | 0.4449 | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |
| $\alpha = 0.444, \beta = 0.222$ | 0.4416 | 0.4906 | 0.3779 | 0.3310 | 0.3758 | $s_2 \succ s_1 \succ s_3 \succ s_5 \succ s_4$ |

Step 8: 表 8 给出了不同算法在等权重、文献 [24] 权重和当前权重下的决策排序结果, 为保持比较的一致性, 偏好态度系数设为等倾向. 在等权重下和文献 [24] 权重下, 各方法的计算结果一致, 方案 s_5 排序高于 s_3 , 但在当前权重下, 其他方法的计算结果都是

方案 s_3 和 s_5 会发生排序逆转. 其原因是, 通过观察原始数据表 5 和当前权重, 发现方案 s_3 占优的属性 u_1 和 u_6 的权重较大, 而方案 s_5 占优的属性 u_2 和 u_5 的权重较小, 导致逆转发生. 但本文方法的计算结果未发生逆转, 原因在于如前文所述, 方案 s_5 在上界的评价表

表 8 不同方法的排序比较

| $\alpha = \beta = 0.333$ | 当前权重下排序 | 等权重下排序 | 文献[24]权重下排序 |
|--------------------------|---|---|---|
| 非线性关联 | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |
| 线性关联 | $s_2 \succ s_1 \succ s_3 \succ s_5 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |
| 联系数分析 | $s_2 \succ s_1 \succ s_3 \succ s_5 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |
| TOPSIS 方法 | $s_2 \succ s_1 \succ s_3 \succ s_5 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ | $s_2 \succ s_1 \succ s_5 \succ s_3 \succ s_4$ |

现更好,此时非线性关联对高评价的自然“增值”价值体现出来,抵消了一部分权重差异带来的影响,因此在有些场合下,其排序稳定性更高。

4 结 论

本文针对属性信息是具有统计或概率意义的三参数区间数的多属性决策问题,提出了一种新的非线性可拓关联度的决策方法和框架,给出了非线性可拓三参数区间简单关联度函数表达式,表达式通过偏好态度系数反映决策者对于指标区间上下界和重心值的倾向程度,并能体现人们进行决策评价时的非线性思维.通过定义关联度区间映射方法,将最优点不在端点的区间关联度计算变换为最优点在端点的单调递增的区间关联度计算,对于权重完全未知的情况,给出了基于区间相离度最大化的客观权重赋值方法.最后,针对不同的态度系数设置进行了决策的不确定性分析.未来的工作考虑将可拓关联度决策方法应用于混合值类型、残缺信息、方案偏好、时序动态、模糊集等各种决策场景中,以及进一步研究可拓关联度的可拓变换^[25]动态决策模型。

参考文献(References)

[1] 朱方霞, 陈华友. 区间多属性决策问题研究综述[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(3): 149-159.
(Zhu F X, Chen H Y. An review on the interval multi-attribute decision-making problem[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27(3): 149-159.)

[2] 郭三党, 刘思峰, 方志耕. 基于核和灰度的区间灰数多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1042-1046.
(Guo S D, Liu S F, Fang Z G. Multi-attribute decision making model based on kernel and degree of greyness of interval grey numbers[J]. Control and Decision, 2016, 31(6): 1042-1046.)

[3] Zeng S Z, Chen J P, Li X S. A hybrid method for pythagorean fuzzy multiple-criteria decision making[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2016, 15(2): 403-422.

[4] 刘秀梅, 赵克勤. 基于联系数的属性权重未知的区

间数多属性决策研究[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(3): 143-148.
(Liu X M, Zhao K Q. Interval multi-attribute decision making with the attribute weight unknown based on connection number[J]. Mathematics in Practce and Theory, 2013, 43(3): 143-148.)

[5] 卜广志, 张宇文. 基于三参数区间数的灰色模糊综合评判[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(9): 43-45.
(Pu G Z, Zhang Y W. Grey fuzzy comprehensive evaluation method based on interval numbers of three parameters[J]. Systems Engineering and Electronc, 2001, 23(9): 43-45.)

[6] Luo D, Wang X. The multi-attribute grey target decision method for attribute value within three-parameter interval grey number[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(5): 1957-1963.

[7] Wang X, Song B, Luo D. Multi-attribute decision-making methods with three-parameter interval grey number[J]. Grey Systems, 2013, 3(3): 124-130.

[8] 胡启洲, 张卫华, 于莉. 三参数区间数研究及其在决策分析中的应用[J]. 中国工程科学, 2007, 9(3): 47-51.
(Hu Q Z, Zhang W H, Yu L. The research and application of interval numbers of three parameters[J]. Engineering Science, 2007, 9(3): 47-51.)

[9] 闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 等. 基于熵测度的三参数区间数信息下的 TOPSIS 决策方法[J]. 中国管理科学, 2013, 21(6): 145-151.
(Yan S L, Liu S F, Zhu J J, et al. TOPSIS decision-making method with three-parameter interval number based on entropy measure[J]. Chinese J of Management Science, 2013, 21(6): 145-151.)

[10] 李存斌, 赵坤, 祁之强. 三参数区间灰数信息下风险型多准则决策方法[J]. 自动化学报, 2015, 41(7): 1306-1314.
(Li C B, Zhao K, Qi Z Q. A risky multi-criteria decision-making method with three-parameter iterval grey number[J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(7): 1306-1314.)

[11] 陈志旺, 王小飞, 邵玉杰, 等. 三参数区间数多属性决策的后悔理论方法[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(9): 1214-1224.
(Chen Z W, Wang X F, Shao Y J, et al. Regret theory

- approach to multiple attribute decision making with three-parameter interval number[J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(9): 1214-1224.)
- [12] 许叶军, 达庆利. 基于理想点的三角模糊数多指标决策法[J]. *系统工程与电子技术*, 2007, 29(9): 1469-1471.
(Xu Y J, Da Q L. Method for triangular fuzzy number multiple attribute decision making based on ideal solution[J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2007, 29(9): 1469-1471.)
- [13] 陈晓红, 阳熹. 一种基于三角模糊数的多属性群决策方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2008, 30(2): 278-282.
(Chen X H, Yang X. Multiple attributive group decision making method based on triangular fuzzy numbers[J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2008, 30(2): 278-282.)
- [14] Lan R, Fan J L. TOPSIS decision-making method on three parameters interval-valued fuzzy sets[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2009, 29(5): 129-136.
- [15] 闫书丽, 刘思峰, 吴利丰. 一种基于前景理论的三参数区间灰数型群体灰靶决策方法[J]. *控制与决策*, 2015, 30(1): 105-109.
(Yan S L, Liu S F, Wu L F. A group grey target decision making method with three parameter interval grey number based on prospect theory[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(1): 105-109.)
- [16] 刘秀梅, 赵克勤. 基于联系数的属性权重未知的三角模糊数多属性决策[J]. *模糊系统与数学*, 2017(2): 95-106.
(Liu X M, Zhao K Q. Triangular fuzzy number multi-attribute decision-making with the attribute weight unknown based on connection number[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2017(2): 95-106.)
- [17] Molinari F. A new criterion of choice between generalized triangular fuzzy numbers[J]. *Fuzzy Sets & Systems*, 2016, 296(C): 51-69.
- [18] 胡丽芳, 关欣, 邓勇. 一种三角模糊数型多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2011, 26(12): 1877-1880.
(Hu L F, Guan X, Deng Y. Approach for fuzzy multi-attribute decision making[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(12): 1877-1880.)
- [19] 杨春燕, 蔡文. 可拓学[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 105-106.
(Yang C Y, Cai W. *Extenics*[M]. Beijing: Science Press, 2015: 105-106.)
- [20] 胡启洲, 于莉, 张爱萍. 基于三元区间数的多指标决策方法[J]. *系统管理学报*, 2010, 19(1): 25-30.
(Hu Q Z, Yu L, Zhang A P. Research about multi-objective decision making method based on interval numbers of three elements[J]. *Journal of Systems & Management*, 2010, 19(1): 25-30.)
- [21] 王应明. 运用离差最大化方法进行多指标决策与排序[J]. *系统工程与电子技术*, 1998(7): 24-26.
(Wang Y M. Using the method of maximizing deviations to make decision for multiindices[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 1998(7): 24-26.)
- [22] 王应明, 张军奎. 基于标准差和平均差的权系数确定方法及其应用[J]. *数理统计与管理*, 2003, 22(3): 22-26.
(Wang Y M, Zhang J K. A method based on standard and mean deviations for determining the weight coefficients of multiple attributes and its applications[J]. *Application of Statistics and Management*, 2003, 22(3): 22-26.)
- [23] 许叶军, 达庆利. 不确定型多属性决策的权系数确定及其应用[J]. *系统工程理论方法应用*, 2005, 14(5): 434-436.
(Xu Y J, Da Q L. Determine the weights of uncertain multi-attribute decision-making and its application[J]. *Systems Engineering — Theory Methodology Applications*, 2005, 14(5): 434-436.)
- [24] 刘秀梅, 赵克勤, 王传斌. 基于联系数的三角模糊数多属性决策新模型[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(10): 2399-2403.
(Liu X M, Zhao K Q, Wang C B. New multiple attribute decision-making model with triangular fuzzy numbers based on connection numbers[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(10): 2399-2403.)
- [25] Li X S, Tian Y J, Smarandache F, et al. An extension collaborative innovation model in the context of big data[J]. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2015, 14(1): 69-91.

作者简介

许立波(1976—), 男, 讲师, 博士, 从事决策理论与方法、智能信息处理等研究, E-mail: xu_libo@163.com;

李兴森(1969—), 男, 教授, 博士, 从事智能信息处理、知识管理等研究, E-mail: lixingsen@126.com;

郭研(1978—), 男, 讲师, 博士, 从事智能信息处理等研究, E-mail: guoyanbox@126.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)