

# 带有不确定性的公共租赁自行车的管理优化研究

任 爽<sup>†</sup>, 韩 冰

(北京交通大学 计算机与信息技术学院, 北京 100044)

**摘 要:** 研究城市公共租赁自行车的管理优化问题, 将其分成两个子问题, 即公共租赁自行车停放点的布局优化问题和公共租赁自行车的调度优化问题. 设置合适的公共租赁自行车停放点的目的, 一方面是方便管理人员的管理, 另一方面是方便公众的出行. 公共租赁自行车的调度需要保证调度过程中产生的总费用最少. 在公共租赁自行车的实际管理中, 每个停放点的需求量和调度车的行驶时间是不确定的, 因此引入两个不确定变量, 建立不确定 0-1 规划模型和不确定整数规划模型, 并利用不确定理论将两个不确定性模型分别转化为确定性等价类模型. 通过一个数值实验对所提出的模型进行验证, 根据第 1 个优化模型求解得到公共租赁自行车的最优停放点, 并基于最优停放点根据第 2 个优化模型求解生成公共租赁自行车的最优调度方案.

**关键词:** 公共租赁自行车; 停放点布局优化; 调度优化; 不确定理论; 0-1 规划模型; 整数规划模型

中图分类号: U492.1

文献标志码: A

## Management and optimization of public rental bikes with uncertainty

REN Shuang<sup>†</sup>, HAN Bing

(School of Computer and Information Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** This paper studies the management and optimization of public rental bikes in cities, and divides it into two sub-problems: the layout optimization of parking spots and the dispatching optimization of public rental bikes. The purposes of setting appropriate parking spots, on the one hand, is for easier controllers' management than before; on the other hand, is facilitating the traveling for everyone. The dispatching of bikes is for minimizing the total cost yielded during the dispatching process. In the actual management of public rental bikes, the demand of each parking spots and the time of the dispatch vehicles are uncertainties, therefore, the uncertain variables are introduced, and the uncertain 0-1 programming model and the uncertain integer programming model are established. The uncertainty models are transformed into equivalent deterministic models using the uncertainty theory. Finally, a numerical experiment is carried out to verify the models proposed in this paper. By solving the first optimal model, the optimal parking spots for public rental bikes are obtained, and then based on the optimal parking spots, the second optimal model is solved to generate the optimal dispatching scheme.

**Keywords:** public rental bikes; layout optimization of parking spots; dispatching optimization; uncertain theory; 0-1 programming model; integer programming model

## 0 引 言

近年来,城市公交系统、轨道交通系统越来越完善,覆盖面也越来越大,但是最后一公里出行难的问题依旧难以解决. 公共租赁自行车的出现,激活了海量的短途出行市场需求.

公共租赁自行车是一种新型的共享经济,是指企业在校园、地铁站点、公交站点、市民区、商业区等提供的自行车共享服务,可以随用随取,节约了购车成本,满足了环保出行的基本要求,属于一种分时租赁模式. 将公共租赁自行车纳入城市交通系统中,可以

有效解决城市最后一公里出行的问题,节省了时间成本和经济成本.

然而,在公共租赁自行车的实际运营中还存在着一些问题,比如市民乱停乱放问题严重等,既影响了城市的整洁环境,又增加了公共租赁自行车的管理难度. 一方面,公共租赁自行车停放点设置的随意性较高,对城市公共空间的占用逐渐增大;另一方面,由于公共租赁自行车有极强的流动性,停放点的需求量和实际停放量之间存在供需不平衡的问题,自行车的利用率也会降低. 现有的关于公共租赁自行车管理方

收稿日期: 2018-02-28; 修回日期: 2018-04-02.

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2018JBM019, 2018YJS044).

责任编委: 刘宝碇.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: sren@bjtu.edu.cn.

面的研究主要是对城市租赁自行车系统的特点和共性进行讨论,以提高系统的可持续性<sup>[1]</sup>.此外,也可借鉴相关的路径优化问题的研究成果<sup>[2-4]</sup>对公共租赁自行车的调度管理优化提供参考思路和方法.在国外,公共租赁自行车的运营管理模式是其发展的一个关键部分,通过良好的管理模式可以有效地节约运营成本,提高服务质量<sup>[5]</sup>.通过研究英国伦敦巴克莱公共租赁自行车系统的运作方式和管理模式,以对我国大中城市的公共租赁自行车系统进行优化,创造具有中国特色的公共租赁自行车系统,使公共租赁自行车这种低碳、健康、便捷的绿色出行方式成为人们短途出行的首选,成为我国城市公共交通体系的重要组成部分.

为了降低对城市公共空间的占用,提高公共租赁自行车的利用率,本文首先以市民到达停放点的总距离最小为优化目标,建立公共租赁自行车停放点的布局优化模型;其次,由于调度人员凭自身经验所确定的各停放点之间的调度路线及数量具有一定的盲目性,故以自行车调度成本和机会损失成本之和最小为优化目标,建立公共租赁自行车的调度优化模型,将闲置的公共租赁自行车调度到需求量较大的停放点,以提高调度的科学性.

此外,在公共租赁自行车的实际使用中,市民出行的差异性会导致需求量的波动,早晚高峰期会导致不同路段调度车行驶时间的波动,因此需求量和行驶时间是不精确的经验数据,且不能通过概率提前统计出来,需要依据专家的经验 and 知识来估计事件可能发生的信度.为了描述这些经验数据,本文基于不确定理论,将需求量和行驶时间视为不确定变量,建立对应的不确定模型,然后将不确定性模型转化为确定性等价类模型来求解,最后通过一个数值实验验证模型的可行性.

## 1 问题描述

### 1.1 问题背景

本文旨在解决城市现存的公共租赁自行车利用率低的问题,主要包括两点因素:对于公共空间的占用率和公共资源即自行车的使用率.因此,首先建立公共租赁自行车停放点的布局优化模型,从备选停放点中优化出最优的停放点,目的是降低对城市公共空间的占有率;其次建立公共租赁自行车的调度优化模型,通过优化调度路径,将闲置的公共租赁自行车调度到需求量较大的停放点,目的是提高调度的科学性,最终提升公共租赁自行车的利用率,减少对城市公共空间的占用,达到最小化公共资源投入的目的.

由于市民出行的差异性和早晚高峰期的影响,导致需求量和不同路段调度车行驶时间是不精确的变量,故本文采用不确定理论进行建模.

### 1.2 不确定理论<sup>[6-9]</sup>

2007年创立并经过不断完善的不确定理论<sup>[9]</sup>为学者们提供了一个公理系统来刻画信度和置信水平,处理优化模型中的不确定变量,并为有效处理难以获取精确信息的不确定决策问题提供了良好的数学基础.到目前为止,不确定理论已被广泛应用于多个实际领域,如工程调度<sup>[10-11]</sup>、生产计划<sup>[12-13]</sup>、交通运输<sup>[14-15]</sup>、带有不确定变量的函数求解<sup>[16]</sup>、存储论<sup>[17]</sup>、金融<sup>[18-19]</sup>、路径规划<sup>[20]</sup>、不确定统计<sup>[21]</sup>等.为便于本文后续的分析,本节简要介绍不确定理论的部分定义、公理及推论.

**定义1** 不确定测度.假设 $\Gamma$ 是一个非空集合,由 $\Gamma$ 的子集构成的集合 $L$ 是 $\Gamma$ 上的一个 $\sigma$ 代数, $L$ 中的所有元素都被称为事件,为每一个事件 $A$ 赋一个值 $M\{A\}$ ,用来表示事件 $A$ 发生的置信水平.如果 $M\{A\}$ 满足以下3条公理<sup>[7-8]</sup>,则称其为不确定测度.

**公理1**(规范性) 对于论域集 $\Gamma$ ,  $M\{A\} = 1$ .

**公理2**(自对偶性) 对于任意事件 $A \in L$ ,有 $M\{A\} + M\{A^c\} = 1$ ,其中 $A^c$ 为 $A$ 的对立事件.

**公理3**(次可列可加性) 对于任意可列的事件序列 $\{A_i\}$ ,有 $M\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{A_i\}$ .

事实上,不确定测度 $M\{A\}$ 可以理解为不确定事件发生的信度,而不是频率,来源于专家评估的事件 $A$ 发生的认知程度,具有一定的主观性.

**定义2** 不确定空间.假设 $\Gamma$ 为非空集合, $L$ 为 $\Gamma$ 上的一个 $\sigma$ 代数, $M$ 为不确定测度,则称三元组 $(\Gamma, L, M)$ 为不确定空间.

**公理4**(乘积公理) 假设 $(\Gamma_i, L_i, M_i)(i = 1, 2, \dots, n)$ 为一个不确定空间,不确定测度 $M$ 为定义在 $\sigma$ 代数空间 $L = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$ 上的一个不确定测度,满足 $M\{\prod_{i=1}^n A_i\} = \min_{1 \leq i \leq n} M_i\{A_i\}$ .

**定义3** 不确定变量.不确定变量 $\xi$ 是从不确定空间 $(\Gamma, L, M)$ 到实数集的一个可测函数,即对于任意实数Borel集 $B$ ,集合 $\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma | \xi(\gamma) \in B\}$ 是 $L$ 中的一个事件.

不确定空间和不确定变量的定义与概率论中的概率空间和随机变量的定义形式类似,但由于不确定测度与概率测度有本质的区别,不确定变量的内涵也不同于随机变量.

**定义4** 不确定分布.将不确定变量 $\xi$ 的不确定分布 $\Phi$ 定义为 $\Phi(x) = M\{\xi \leq x\}$ ,其中 $x$ 为任意实数.

**定义5** 正则不确定分布. 如果一个不确定分布  $\Phi$  满足对于任意  $\alpha \in (0, 1)$ , 其逆分布  $\Phi^{-1}(\alpha)$  存在且唯一, 则该不确定分布是正则不确定分布.

正则不确定分布  $\Phi$  是连续函数. 例如线性不确定分布、“之”字形不确定分布都是正则不确定分布.

**定义6** 逆不确定分布. 假设一个不确定变量  $\xi$  的正则不确定分布为  $\Phi$ , 则其逆函数  $\Phi^{-1}$  称为  $\xi$  的不确定逆分布函数. 不确定逆分布函数是  $[0, 1]$  区间上的单调递增函数.

在决策过程中, 可以采用不确定分布的形式刻画任意不确定变量. 如果不确定变量  $\xi$  具有“之”字形不确定分布  $\Phi(x)$ , 则称其为“之”字形不确定变量, 记为  $\xi \sim Z(a, b, c)$ , 其中  $a, b, c$  均为实数且满足  $a \leq b \leq c$ . “之”字形不确定分布如下:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ (x - a)/2(b - a), & a < x \leq b; \\ (x + c - 2b)/2(c - b), & b < x \leq c; \\ 1, & x > c. \end{cases} \quad (1)$$

不确定分布  $\Phi(x)$  如图1所示. 显然, “之”字形不确定变量的不确定分布为分段函数形式, 其中每段图像均为线性函数. 在实际应用中, “之”字形不确定变量是较为常用的非精确数据的表示方式.

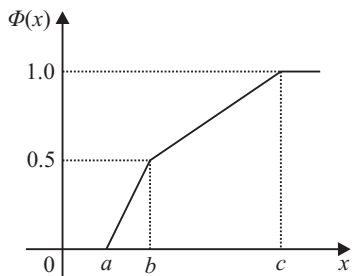


图1 “之”字形不确定分布

**定理1** 假设一个不确定变量  $\xi$  具有连续不确定分布  $\Phi$ , 则对于任意实数  $x$ , 均有  $M\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$ ,  $M\{\xi \geq x\} = 1 - \Phi(x)$ .

对于任意区间  $[a, b]$ , 可得  $\Phi(a) - \Phi(b) \leq M\{a \leq \xi \leq b\} \leq \Phi(b) \wedge (1 - \Phi(a))$ .

**定理2** 假设  $\xi$  是一个服从连续不确定分布  $\Phi(x)$  的不确定变量, 当且仅当  $h(x) \leq f_\xi(\alpha)$  时, 若  $0 < \Phi(x) < 1$ ,  $g(x, \xi) = h(x) - \xi$ , 置信水平  $\alpha \in (0, 1)$ , 则有  $M\{g(x, \xi) \leq 0\} \geq \alpha$ , 其中  $f_\xi(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ .

**定理3** 假设  $\xi$  是一个服从连续不确定分布  $\Phi(x)$  的不确定变量, 当且仅当  $h(x) \geq f_\xi(\alpha)$  时, 若  $0 < \Phi(x) < 1$ ,  $g(x, \xi) = h(x) - \xi$ , 置信水平  $\alpha \in (0, 1)$ , 则有  $M\{g(x, \xi) \geq 0\} \geq \alpha$ , 其中  $f_\xi(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$ .

定理2和定理3为机会约束的等价定理, 相关结论对于构建机会约束规划模型的等价类起着关键作

用.

**推论1** “之”字形不确定变量  $\xi \sim Z(a, b, c)$  的逆不确定分布如下:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & 0 < \alpha < 0.5; \\ (2 - 2\alpha)b + (2\alpha - 1)c, & 0.5 \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (2)$$

将上述定义、定理及推论运用到之后的模型转化过程中, 便于模型的求解和计算分析.

## 2 数学建模

### 2.1 公共租赁自行车停放点的布局优化建模

首先建立公共租赁自行车停放点的布局优化模型, 将公共租赁自行车停放点的布局网络表示为  $G = (V, E)$ ,  $V$  是公共租赁自行车的备选停放点集合,  $E$  是不同停放点之间的线路集合, 以此确定参数、决策变量、目标函数和约束条件.

#### 2.1.1 参数说明

$V$ : 公共租赁自行车的备选停放点集合,  $i = 1, 2, \dots, n \in V$ ;

$N$ : 最大的停放点数量;

$S$ : 需求量转移的最大距离;

$E$ : 不同停放点之间的线路集合, 从  $i$  点到  $j$  点的线路  $(i, j) \in E$ ;

$[m_i, M_i]$ : 规定在  $i$  点的可停放量范围;

$s_{ij}$ :  $i$  点到  $j$  点的距离;

$d_i^k$ : 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内  $i$  点的需求量, 由于需求量具有不确定性, 用不确定变量  $\tilde{d}_i^k$  来表示.

#### 2.1.2 决策变量、目标函数、约束条件

公共租赁自行车停放点的布局优化模型涉及到的决策变量如下:  $x_{ij}$ : 0-1 变量, 若  $i$  点不被设置为最佳停放点, 则  $x_{ij} = 0, \forall j \in V$ ; 若  $i$  点被设置为最佳停放点, 但  $j$  点的需求量不会转移到  $i$  点, 则  $x_{ij} = 0$ ; 若  $i$  点被设置为最佳停放点, 且  $j$  点的需求量会转移到  $i$  点, 则  $x_{ij} = 1$ .

建模的优化目标是最小化市民到达自行车停放点的总距离, 即使得转移需求量与转移距离的乘积最小化, 建立目标函数如下:

$$\min_x \sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in E} \tilde{d}_j^k \cdot s_{ij} \cdot x_{ij}. \quad (3)$$

模型需要满足的约束条件如下.

1) 所有转移到  $i$  点的需求量之和满足  $i$  点要求的可停放量范围:

$$m_i \leq \sum_{j \in V} \tilde{d}_j^k \cdot x_{ij} \leq M_i, \quad i \in V, \quad k \in K. \quad (4)$$

2) 停放点的个数不能超过规定的最大停放点数量:

$$0 \leq \sum_{i \in V} x_{ii} \leq N. \quad (5)$$

3) 需求量转移的距离不超过设定的最大距离:

$$s_{ij} \cdot x_{ij} \leq S, (i, j) \in E. \quad (6)$$

### 2.1.3 数学模型

本文的公共租赁自行车停放点的布局优化模型属于0-1规划模型(ILP). 其中, 需求量是不精确的经验数据, 所以采用不确定理论来建模, 将需求量设置为不确定变量. 建立的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in E} \tilde{d}_j^k \cdot s_{ij} \cdot x_{ij}. \\ \text{s.t.} \quad & m_i \leq \sum_{j \in V} \tilde{d}_j^k \cdot x_{ij} \leq M_i, i \in V, k \in K; \\ & 0 \leq \sum_{i \in V} x_{ii} \leq N; \\ & s_{ij} \cdot x_{ij} \leq S, (i, j) \in E. \end{aligned} \quad (7)$$

通过建立自行车停放点的布局优化模型来求解满足所有约束条件的最优自行车停放点, 为之后的自行车调度优化建模提供条件.

## 2.2 公共租赁自行车的调度优化建模

根据2.1节的公共租赁自行车停放点的布局优化模型求解产生的最优停放点, 建立相应的公共租赁自行车的调度优化模型. 将公共租赁自行车的调度网络表示为  $G' = (V', E')$ ,  $V'$  是求得的最优停放点集合,  $E'$  是不同停放点之间的线路集合. 在公共租赁自行车的调度优化问题中, 涉及到的费用包括机会惩罚成本、人力成本、运输成本, 因此公共租赁自行车的调度优化为一个多目标优化问题, 并由此确定参数、决策变量、目标函数和约束.

### 2.2.1 参数说明

$K$ : 一天内要求每个停放点的最迟备好自行车时刻  $k$  的集合,  $k \in K$ ;

$V'$ : 公共租赁自行车停放点的布局优化模型求得的最优停放点集合,  $i = 1, 2, \dots, n \in V'$ ;

$E'$ : 不同停放点之间的线路集合, 从  $i$  点到  $j$  点的线路  $(i, j) \in E'$ ;

$N$ : 一辆调度车的最大可装载量;

$P$ : 调度车总数量;

$T$ : 搬运一辆自行车所需时间;

$c$ : 单位距离运输一辆自行车的成本;

$h$ : 人工搬运一辆自行车的成本;

$a$ : 由于单位时间内的需求量不确定, 且市民的骑

行距离也不确定, 为了简化处理, 将机会惩罚成本系数作为一个固定值;

$s_{ij}$ : 从  $i$  点到  $j$  点的路程长度;

$m_i$ : 停放点  $i$  的最大可停放量;

$r_i^k$ : 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内,  $i$  点的实际停放量, 满足  $0 \leq r_i^k \leq m_i, i \in V', k \in K$ ;

$t_{ij}$ : 线路  $(i, j)$  上调度车的行驶时间, 因为行驶时间具有不确定性, 所以用不确定变量  $\tilde{t}_{ij}$  来表示;

$d_i^k$ : 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内  $i$  点的需求量(包括公共租赁自行车停放点的布局优化模型求得的), 因为需求量具有不确定性, 所以用不确定变量  $\tilde{d}_i^k$  来表示.

### 2.2.2 决策变量、目标函数、约束条件

公共租赁自行车的调度优化模型涉及到的决策变量如下.

$y_i^k$ : 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内, 调度车到达  $i$  点的具体时刻;

$z_{ij}^k$ : 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内, 调度车要从  $i$  点往  $j$  点运输的公共租赁自行车的数量.

由于早晚高峰期导致的调度车行驶时间的不确定性, 若调度车未在规定时刻到达停放点, 则会产生需求量的流失, 故设  $F(y)$  是机会惩罚成本. 即, 若调度车在最迟备好时刻  $k$  之前到达  $i$  点, 并将公共租赁自行车调度完成, 则未产生损失, 惩罚成本为零; 若调度车在最迟备好时刻  $k$  之后到达  $i$  点, 损失费用为实际到达  $i$  点的时间  $y_i^k$  与最迟备好时刻  $k$  的差值和单位时间机会惩罚系数  $a$  的乘积, 公式如下:

$$F(y) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \max((y_i^k - k), 0) \cdot a. \quad (8)$$

调度过程中产生的调度成本设为  $F(z)$ , 公式如下:

$$\begin{aligned} F(z) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \cdot h + \\ \sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in E'} z_{ij}^k \cdot s_{ji} \cdot c. \end{aligned} \quad (9)$$

第1部分是搬运单车的人力成本, 即一天搬运自行车的总量与单位成本的乘积; 第2部分是调度车的运输成本, 即运输一辆自行车的单位距离成本与一天运输总路程的乘积.

对于该多目标优化问题, 采用线性加权和法. 分别给出两个目标函数的权系数  $\lambda_i (i = 1, 2)$ , 将两个目标函数用同一尺度统一起来, 得到新的目标函数, 称之为效用函数  $U$ . 优化目标是最小化总费用, 目标函数如下:

$$\min F(U) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \max((y_i^k - k), 0) \cdot a \cdot \lambda_1 +$$

$$\left( \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \cdot h + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E'} z_{ij}^k \cdot s_{ji} \cdot c \right) \cdot \lambda_2. \quad (10)$$

模型需要满足的约束条件如下。

1) 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内, 调度车到达  $j$  点的具体时刻与调度车到达  $i$  点的具体时刻的差值不小于在  $i$  点搬运单车所花时间与从  $i$  点到  $j$  点路上调度车所花时间的总和, 即

$$T \cdot \left| \sum_{l \in V', l \neq i} z_{li}^k - \sum_{l \in V', l \neq i} z_{il}^k \right| + \tilde{t}_{ij} \leq y_j^k - y_i^k, \quad (i, j) \in E', k \in K. \quad (11)$$

2) 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内,  $i$  点的需求量与实际停放量的差值不超过调度车向  $i$  点输入的自行车数  $\sum_{j \in V'} z_{ji}^k$  与从  $i$  点输出的自行车数  $\sum_{j \in V'} z_{ij}^k$  (无论调度车上有多少辆自行车, 都包含在  $z_{ij}^k$  中) 的差值, 即

$$\left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \geq \tilde{d}_i^k - r_i^k, \quad i \in V', k \in K. \quad (12)$$

如果  $\tilde{d}_i^k - r_i^k < 0$ , 则说明此时  $i$  点为供应节点; 如果  $\tilde{d}_i^k - r_i^k > 0$ , 则说明此时  $i$  点为需求节点; 如果  $\tilde{d}_i^k - r_i^k = 0$ , 则说明此时  $i$  点为转运节点, 供需平衡。

3) 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内, 所有线路上运输的自行车总数量不超过所有调度车的最大可装载量, 即

$$0 \leq \sum_{(i,j) \in E'} z_{ij}^k \leq N \cdot P, \quad k \in K. \quad (13)$$

### 2.2.3 数学模型

因为在本文中假设目标函数和约束是线性的, 所以公共租赁自行车调度优化模型属于整数线性规划 (ILP)。其中, 需求量和行驶时间是不精确的经验数据, 所以采用不确定理论来建模, 将需求量和行驶时间设置为不确定变量。建立的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{y,z} & \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \max((y_i^k - k), 0) \cdot a \cdot \lambda_1 + \\ & \left( \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \cdot h + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E'} z_{ij}^k \cdot s_{ji} \cdot c \right) \cdot \lambda_2. \\ \text{s.t. } & T \cdot \left| \sum_{l \in V', l \neq i} z_{li}^k - \sum_{l \in V', l \neq i} z_{il}^k \right| + \tilde{t}_{ij} \leq y_j^k - y_i^k, \\ & (i, j) \in E', k \in K; \\ & \left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \geq \tilde{d}_i^k - r_i^k, \quad i \in V', k \in K; \end{aligned}$$

$$0 \leq \sum_{(i,j) \in E'} z_{ij}^k \leq N \cdot P, \quad k \in K. \quad (14)$$

此模型用于产生自行车的最优调度方案, 从而最小化调度所需费用, 为管理者提供调度的决策依据。

## 3 不确定性模型的求解

利用本文 1.2 节介绍的定义、定理及推论, 将 2.1.3 节和 2.2.3 节提出的不确定公共租赁自行车停放点的布局优化模型和不确定公共租赁自行车的调度优化模型转化为确定性等价类模型。

### 3.1 公共租赁自行车停放点的布局优化模型

假设某一时刻的需求量为“之”字形不确定变量, 所有转移到  $i$  点的需求量之和满足  $i$  点的可停放量范围的置信水平为  $\gamma$ , 由推论 1 可得不确定变量  $\tilde{d}_j^k$  的逆不确定分布为

$$\Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma) = \begin{cases} (1 - 2\gamma)a + 2\gamma b, & 0 < \gamma < 0.5; \\ (2 - 2\gamma)b + (2\gamma - 1)c, & 0.5 \leq \gamma < 1. \end{cases} \quad (15)$$

#### 3.1.1 约束条件的转化

在布局优化模型中, 带不确定变量  $\tilde{d}_j^k$  的约束条件如下:

$$m_i \leq \sum_{j \in V} \tilde{d}_j^k \cdot x_{ij} \leq M_i, \quad i \in V, k \in K. \quad (16)$$

根据逆不确定分布  $\Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma)$ , 可以得到下面的转化:

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{j \in V} \tilde{d}_j^k \cdot x_{ij}\right) &= \sum_{j \in V} x_{ij} \cdot E(\tilde{d}_j^k) = \\ & \sum_{j \in V} x_{ij} \cdot \int_0^1 \Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma) d\gamma, \quad i \in V, k \in K, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $E(\tilde{d}_j^k) = \int_0^1 \Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma) d\gamma$  为不确定变量  $\tilde{d}_j^k$  的期望值。最终转化为如下带有逆分布函数的机会约束:

$$m_i \leq \sum_{j \in V} x_{ij} \cdot \int_0^1 \Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma) d\gamma \leq M_i, \quad i \in V, k \in K. \quad (18)$$

#### 3.1.2 目标函数的转化

在布局优化模型中, 带不确定变量  $\tilde{d}_j^k$  的目标函数如下:

$$\min_x \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} \tilde{d}_j^k \cdot s_{ij} \cdot x_{ij}. \quad (19)$$

根据 3.1.1 节的式 (17) 逆不确定分布  $\Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma)$  的转化, 得到如下带有逆分布函数的目标函数:

$$\min_x \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} \int_0^1 \Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma) d\gamma \cdot s_{ij} \cdot x_{ij}. \quad (20)$$

3.1.3 确定性等价类模型

通过3.1.1节和3.1.2节的转化过程,可以得出以下确定性公共租赁自行车停放点的布局优化模型:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} \int_0^1 \Phi_{\tilde{t}_{ij}^k}^{-1}(\gamma) d\gamma \cdot s_{ij} \cdot x_{ij}. \\ \text{s.t.} \quad & m_i \leq \sum_{j \in V} x_{ij} \cdot \int_0^1 \Phi_{\tilde{d}_j^k}^{-1}(\gamma) d\gamma \leq M_i, \quad i \in V, k \in K; \\ & 0 \leq \sum_{i \in V} x_{ii} \leq N; \\ & s_{ij} \cdot x_{ij} \leq S, \quad (i,j) \in E. \end{aligned} \quad (21)$$

3.2 公共租赁自行车的调度优化模型

假设行驶时间和需求量均为“之”字形不确定变量,模型满足调度车到达停放点*i*和停放点*j*的时间要求的置信水平为 $\alpha_{ij}^k, 0 < \alpha_{ij}^k \leq 1, (i,j) \in E', k \in K$ ;满足停放点*i*的需求量与实际停放量之间的差值和人工搬运的自行车数相等的置信水平为 $\beta_i^k, 0 < \beta_i^k \leq 1, i \in V', k \in K$ .由推论1可得,不确定变量 $\tilde{t}_{ij}^k$ 和 $\tilde{d}_i^k$ 的逆不确定分布分别为

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{t}_{ij}^k}^{-1}(\alpha_{ij}^k) = & \begin{cases} (1 - 2\alpha_{ij}^k)a + 2\alpha_{ij}^k b, & 0 < \alpha_{ij}^k < 0.5; \\ (2 - 2\alpha_{ij}^k)b + (2\alpha_{ij}^k - 1)c, & 0.5 \leq \alpha_{ij}^k < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{d}_i^k}^{-1}(\beta_i^k) = & \begin{cases} (1 - 2\beta_i^k)a + 2\beta_i^k b, & 0 < \beta_i^k < 0.5; \\ (2 - 2\beta_i^k)b + (2\beta_i^k - 1)c, & 0.5 \leq \beta_i^k < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

3.2.1 约束条件的转化

1) 在调度优化模型中,带不确定变量 $\tilde{t}_{ij}^k$ 的机会约束如下:

$$T \cdot \left| \sum_{l \in V', l \neq i} z_{li}^k - \sum_{l \in V', l \neq i} z_{il}^k \right| + \tilde{t}_{ij} \leq y_j^k - y_i^k, \quad (i,j) \in E', k \in K. \quad (24)$$

转化为

$$\begin{aligned} M \left( T \cdot \left| \sum_{l \in V', l \neq i} z_{li}^k - \sum_{l \in V', l \neq i} z_{il}^k \right| + \tilde{t}_{ij} \leq \right. \\ \left. y_j^k - y_i^k \right) \geq \alpha_{ij}^k, \quad (i,j) \in E', k \in K. \end{aligned} \quad (25)$$

不确定变量行驶时间 $\tilde{t}_{ij}^k$ 的不确定分布为 $\Phi_{\tilde{t}_{ij}^k}(\alpha_{ij}^k)$ ,转化为如下不等式:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{t}_{ij}^k}(\alpha_{ij}^k) - \left( T \cdot \left| \sum_{l \in V', l \neq i} z_{li}^k - \sum_{l \in V', l \neq i} z_{il}^k \right| - (y_j^k - y_i^k) \right) \leq 0, \\ (i,j) \in E', k \in K. \end{aligned} \quad (26)$$

其对应的逆不确定分布为 $\Phi_{\tilde{t}_{ij}^k}^{-1}(\alpha_{ij}^k)$ ,转化为

$$T \cdot \left| \sum_{l \in V', l \neq i} z_{li}^k - \sum_{l \in V', l \neq i} z_{il}^k \right| - (y_j^k - y_i^k) \geq \Phi_{\tilde{t}_{ij}^k}^{-1}(\alpha_{ij}^k), \quad (i,j) \in E', k \in K. \quad (27)$$

2) 在调度优化模型中,带不确定变量 $\tilde{d}_i^k$ 的约束条件如下:

$$\left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \geq \tilde{d}_i^k - r_i^k, \quad i \in V', k \in K. \quad (28)$$

转化为

$$\begin{aligned} M \left( \left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \geq \tilde{d}_i^k - r_i^k \right) \geq \beta_i^k, \\ i \in V', k \in K. \end{aligned} \quad (29)$$

不确定变量行驶时间 $\tilde{d}_i^k$ 的不确定分布为 $\Phi_{\tilde{d}_i^k}(\beta_i^k)$ ,转化为如下不等式:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{d}_i^k}(\beta_i^k) - \left( \left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| + r_i^k \right) \leq 0, \\ i \in V', k \in K. \end{aligned} \quad (30)$$

其对应的逆不确定分布为 $\Phi_{\tilde{d}_i^k}^{-1}(\beta_i^k)$ ,转化为

$$\left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \geq \Phi_{\tilde{d}_i^k}^{-1}(\beta_i^k) - r_i^k, \quad i \in V', k \in K. \quad (31)$$

3.2.2 确定性等价类模型

若规定 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,且通过3.2.1节的转化过程,可以得出以下确定性公共租赁自行车的调度优化模型:

$$\begin{aligned} \min_{y,z} \quad & \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \max((y_i^k - k), 0) \cdot a \cdot \lambda_1 + \\ & \left( \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} \left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| \cdot h + \right. \\ & \left. \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E'} z_{ij}^k \cdot s_{ij} \cdot c \right) \cdot \lambda_2. \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \quad T \cdot \left| \sum_{l \in V', l \neq i} z_{li}^k - \sum_{l \in V', l \neq i} z_{il}^k \right| - (y_j^k - y_i^k) \geq$$

$$\Phi_{\tilde{t}_{ij}^k}(\alpha_{ij}^k), \quad (i,j) \in E', k \in K;$$

$$\left| \sum_{j \in V'} z_{ji}^k - \sum_{j \in V'} z_{ij}^k \right| + r_i^k \geq \Phi_{\tilde{d}_i^k}^{-1}(\beta_i^k),$$

$$i \in V', k \in K;$$

$$0 \leq \sum_{(i,j) \in E'} z_{ji}^k \leq N \cdot P, \quad k \in K. \quad (32)$$

4 数值实验

为了将市民多元化的出行需求融合到本文的模型中,使所建的模型更能适用于现实情况,本文的数值实验选择北京市的西直门商圈,如图2所示.以西

直门地铁站为中心,周围两公里以内包含了校区、住宅区、商业区、公交站、地铁站等多种自行车停放点,因此数值实验综合了多种人群的出行特征,具有很好的代表性.

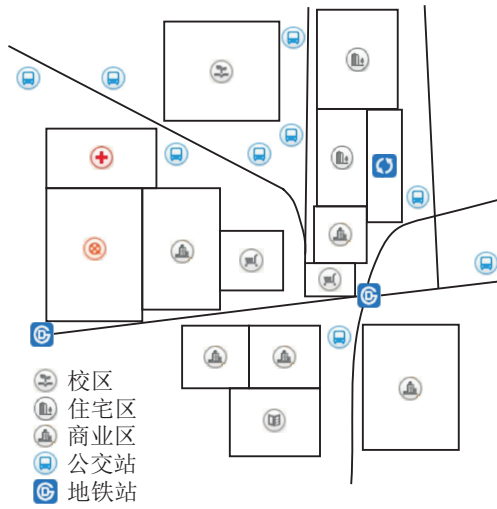


图2 西直门商圈示意图

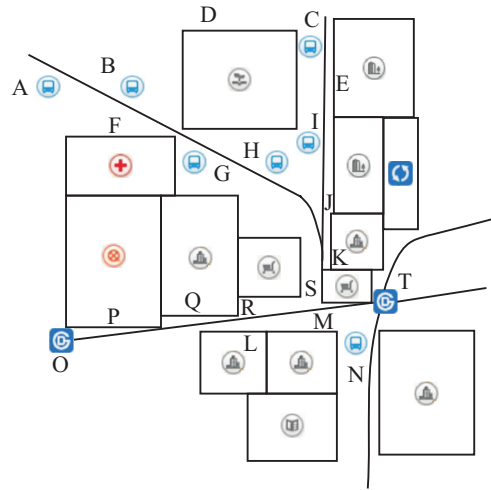


图3 西直门商圈的备选停放点分布

4.1 公共租赁自行车停放点的布局优化模型实验

对西直门商圈进行实地观测和统计,并综合考虑人群出行密度和频率,选取20个备选的公共租赁自行车停放点,并从A到T进行标注,如图3所示. 布局优化模型的目标是从中选择出满足条件的10个最优停放点.

4.1.1 已知条件

- 1) 停放点数量不大于10个;
- 2) 两个备选停放点之间进行需求量转移的距离不超过100m;
- 3) 公共租赁自行车的备选停放点集合为{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T};
- 4) 备选停放点之间距离的具体数据见表1;
- 5) 各备选停放点规定可停放自行车的数量范围、在最迟备好时刻 $k(k = 8)$ 之前的时间段内备选停放点需求量(不确定变量 $\tilde{d}_i^k$ )的具体数据见表2.

表1 备选停放点之间的距离

距离	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
A	0	70	900	390	970	140	350	500	810	760	890	1400	1300	1600	2000	1700	1400	1200	1000	1400
B	700	0	830	320	900	150	360	460	750	710	870	1300	1200	1600	1900	1600	1300	1100	900	1300
C	900	830	0	830	140	250	1250	1400	390	450	540	1100	1300	1700	1950	1650	1350	960	1000	1600
D	390	320	830	0	620	780	420	570	650	710	800	1470	1370	1250	2000	1700	1400	1200	850	1450
E	970	900	140	620	0	530	1040	1190	280	300	290	740	640	940	1640	1340	1040	840	340	740
F	140	150	250	780	530	0	360	510	920	980	1070	1410	1310	1610	1400	1100	800	600	510	910
G	350	360	1250	420	1040	360	0	150	560	410	540	1050	950	1250	1650	1350	1050	850	650	1050
H	500	460	1400	570	1190	510	150	0	660	600	510	900	800	1100	1760	1300	1000	800	500	900
I	810	750	390	650	280	920	560	660	0	10	150	600	500	800	1500	1200	1000	900	200	600
J	760	710	450	710	300	980	410	600	10	0	90	540	440	740	1440	1140	840	640	140	540
K	890	870	540	800	290	1070	540	510	90	0	450	350	650	1350	1050	750	550	50	450	
L	1400	1300	1100	1470	740	1410	1050	900	600	540	450	0	100	1000	900	600	300	100	400	800
M	1300	1200	1300	1370	640	1310	950	800	500	440	350	100	0	900	1000	700	400	200	300	700
N	1600	1600	1700	1250	940	1610	1250	1100	800	740	650	1000	900	0	1800	2000	1300	1100	600	200
O	2000	1900	1950	2000	1640	1400	1650	1760	1500	1440	1350	900	1000	1800	0	300	600	800	1400	1600
P	1700	1600	1650	1700	1340	1100	1350	1300	1200	1140	1050	600	700	2000	300	0	300	1100	1700	1900
Q	1400	1300	1350	1400	1040	800	1050	1000	1000	840	750	300	400	1300	600	300	0	200	700	1100
R	1200	1100	960	1200	840	600	850	800	800	640	550	100	200	1100	800	1100	200	0	100	900
S	1000	900	1000	850	340	510	650	500	500	140	50	400	300	600	1400	1700	700	100	0	400
T	1400	1300	1600	1450	740	910	1050	900	900	540	450	800	700	200	1600	1900	1100	900	400	0

表2 备选停放点可停放量的最大值  
最小值和k时刻的需求量 辆

备选停放点	最大停放量	最小停放量	需求量
A	50	10	(0, 4, 8)
B	60	20	(10, 25, 30)
C	20	10	(0, 2, 3)
D	60	20	(10, 20, 35)
E	70	30	(10, 15, 20)
F	30	15	(3, 4, 5)
G	20	10	(0, 5, 8)
H	60	20	(10, 20, 30)
I	30	10	(0, 5, 10)
J	30	10	(0, 1, 2)
K	70	20	(10, 15, 20)
L	80	15	(10, 15, 20)
M	20	10	(3, 5, 6)
N	30	10	(1, 5, 7)
O	30	10	(1, 2, 5)
P	20	10	(15, 20, 30)
Q	50	10	(1, 5, 9)
R	50	10	(0, 1, 2)
S	30	10	(0, 5, 10)
T	80	20	(10, 15, 20)

4.1.2 实验结果

将本文所建的不确定公共租赁自行车停放点布局优化模型转化为确定性等价类模型后,在Windows 7系统中,使用Python调用Gurobi优化软件对模型求解,计算时间均不大于1s.运行的结果如下:当置信度 $\alpha = 0.95$ 时,在最迟备好时刻 $k$  ( $k = 8$ )之前的时间段内,求得的最优停放点的集合为{B,D,E,F,G,H,K,L,Q,T},需求量的转移过程为{A → B, C → E, I → E, J → K, M → L, N → T, O → P → Q, R → Q, S → K}.最优停放点分布及需求量的转移路径如图4所示,目标函数的最优结果为37539.0.

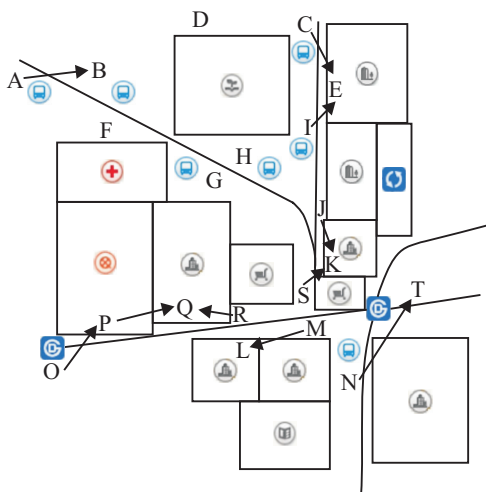


图4 最优停放点分布及需求量的转移路径

4.2 公共租赁自行车的调度优化模型实验

由4.1节的实验结果得出最优的停放点为{B, D, E, F, G, H, K, L, Q, T},西直门商圈的最终停放点布局如图5所示.基于上述优化后的停放点,求解公共租赁自行车的调度优化方案.

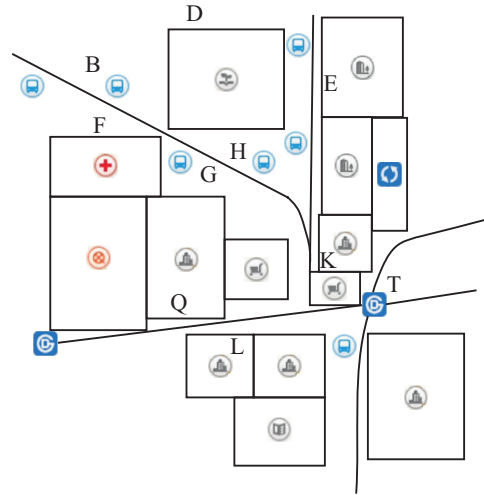


图5 西直门商圈的停放点分布

4.2.1 已知条件

- 1) 西直门商圈的停放点最大可停放量可以参见表2,停放点所能停放的公共租赁自行车总量约为580辆;
- 2) 调度车10辆,每辆调度车所能装载的最大自行车数为30辆;
- 3) 运输一辆公共租赁自行车的运输成本为0.1元/千米×辆;
- 4) 搬运一辆公共租赁自行车的搬运成本为0.1元/辆,所花时间为0.5 min;
- 5) 机会惩罚系数为0.1;
- 6) 最迟备好时刻 $k$ 为08:00(早高峰)、12:00、18:00(晚高峰);
- 7) 公共租赁自行车的停放点集合为{B, D, E, F, G, H, K, L, Q, T};
- 8) 停放点之间距离的具体数据可以参见表1;
- 9) 在最迟备好时刻 $k$ 之前的时间段内,每个停放点的实际停放量的具体数据见表3,所有停放点同一时刻的总停放量不能超过最大可停放量;

表3 最迟备好时刻之前的时间段内  
每个停放点的实际停放量 辆

最迟备好时刻	B	D	E	F	G	H	K	L	Q	T
$k = 08:00$	50	11	10	5	16	40	24	36	35	60
$k = 12:00$	20	10	42	30	20	36	32	20	10	28
$k = 18:00$	10	48	24	22	10	14	40	18	44	12

- 10) 在最迟备好时刻 $k$ 之前的时间段内,每个停放点需求量(不确定变量)的具体数据见表4;



**表 4** 最迟备好时刻之前的时间段内  
每个停放点的需求量 辆

停放点	$k = 08:00$	$k = 12:00$	$k = 18:00$
B(包括 A 点转移过来的)	(10, 29, 38)	(0, 5, 10)	(10, 25, 30)
D	(10, 20, 35)	(10, 15, 20)	(10, 20, 30)
E(包括 C、I 点转移过来的)	(10, 22, 33)	(0, 5, 10)	(10, 15, 20)
F	(3, 4, 5)	(0, 5, 10)	(10, 15, 20)
G	(0, 5, 10)	(0, 10, 15)	(5, 15, 20)
H	(10, 20, 30)	(5, 10, 15)	(10, 20, 30)
K(包括 J 点转移过来的)	(10, 16, 22)	(10, 20, 30)	(10, 15, 25)
L(包括 M 点转移过来的)	(13, 20, 26)	(5, 10, 20)	(10, 15, 20)
Q(包括 O、P、R 点转移过来的)	(17, 28, 46)	(10, 15, 25)	(0, 5, 10)
T(包括 N 点转移过来的)	(11, 20, 27)	(10, 20, 30)	(10, 15, 20)

11) 在最迟备好时刻  $k$  之前的时间段内, 调度车在停放点之间的行驶时间(不确定变量)的具体数据见表 5.

**4.2.2 实验结果**

本文所建的不确定公共租赁自行车调度优化模型转化为确定性等价类模型后, 在 Windows 7 系统中, 使用 Python 调用 Gurobi 优化软件对模型求解, 计算时间均不大于 1 s. 运行的结果如下: 当置信度  $\alpha = 0.95$ , 权系数  $\lambda_1 = 0.5$  时, 求得的一天自行车调度所花费的总费用最少为 514.05.

**表 5** 最迟备好时刻之前的时间段内调度车在停放点之间的行驶时间 min

最迟备好时刻	停放点	B	D	E	F	G	H	K	L	Q	T
$k = 08:00$	B	0	(5, 10, 15)	(15, 20, 30)	(10, 15, 20)	(5, 10, 15)	(6, 12, 18)	(10, 15, 25)	(20, 25, 30)	(20, 25, 30)	(20, 25, 30)
	D	(5, 10, 15)	0	(10, 20, 25)	(10, 15, 20)	(6, 12, 18)	(8, 16, 26)	(8, 14, 26)	(25, 30, 35)	(22, 24, 32)	(24, 26, 34)
	E	(15, 20, 30)	(10, 20, 25)	0	(4, 8, 12)	(16, 18, 24)	(18, 22, 28)	(2, 6, 10)	(10, 12, 16)	(16, 18, 24)	(10, 12, 16)
	F	(10, 15, 20)	(10, 15, 20)	(4, 8, 12)	0	(6, 12, 18)	(10, 16, 20)	(1, 2, 3)	(10, 15, 20)	(12, 16, 20)	(10, 15, 20)
	G	(5, 10, 15)	(6, 12, 18)	(16, 18, 24)	(6, 12, 18)	0	(2, 4, 6)	(8, 10, 15)	(15, 20, 24)	(15, 20, 24)	(15, 20, 24)
	H	(6, 12, 18)	(8, 16, 26)	(18, 22, 28)	(10, 16, 20)	(2, 4, 6)	0	(8, 12, 14)	(15, 20, 30)	(18, 20, 24)	(15, 20, 30)
	K	(10, 15, 25)	(8, 14, 26)	(2, 6, 10)	(1, 2, 3)	(8, 10, 15)	(8, 12, 14)	0	(8, 10, 12)	(12, 15, 20)	(10, 15, 20)
	L	(20, 25, 30)	(25, 30, 35)	(10, 12, 16)	(10, 15, 20)	(15, 20, 24)	(15, 20, 30)	(8, 10, 12)	0	(5, 10, 15)	(14, 20, 24)
	Q	(20, 25, 30)	(22, 24, 32)	(16, 18, 24)	(12, 16, 20)	(15, 20, 24)	(18, 20, 24)	(0, 1, 2)	(5, 10, 15)	0	(15, 20, 24)
	T	(20, 25, 30)	(24, 26, 34)	(10, 12, 16)	(10, 15, 20)	(15, 20, 24)	(15, 20, 30)	(10, 15, 20)	(14, 20, 24)	(15, 20, 24)	0
$k = 12:00$	B	0	(5, 10, 15)	(15, 20, 30)	(10, 15, 20)	(5, 10, 15)	(6, 12, 18)	(10, 15, 25)	(20, 25, 30)	(20, 25, 30)	(20, 25, 30)
	D	(5, 10, 15)	0	(10, 20, 25)	(10, 15, 20)	(6, 12, 18)	(8, 16, 26)	(8, 14, 26)	(25, 30, 35)	(22, 24, 32)	(24, 26, 34)
	E	(15, 20, 30)	(10, 20, 25)	0	(4, 8, 12)	(16, 18, 24)	(18, 22, 28)	(2, 6, 10)	(10, 12, 16)	(16, 18, 24)	(10, 12, 16)
	F	(10, 15, 20)	(10, 15, 20)	(4, 8, 12)	0	(6, 12, 18)	(10, 16, 20)	(1, 2, 3)	(10, 15, 20)	(12, 16, 20)	(10, 15, 20)
	G	(5, 10, 15)	(6, 12, 18)	(16, 18, 24)	(6, 12, 18)	0	(2, 4, 6)	(8, 10, 15)	(15, 20, 24)	(15, 20, 24)	(15, 20, 24)
	H	(6, 12, 18)	(8, 16, 26)	(18, 22, 28)	(10, 16, 20)	(2, 4, 6)	0	(8, 12, 14)	(15, 20, 30)	(18, 20, 24)	(15, 20, 30)
	K	(10, 15, 25)	(8, 14, 26)	(2, 6, 10)	(1, 2, 3)	(8, 10, 15)	(8, 12, 14)	0	(8, 10, 12)	(12, 15, 20)	(10, 15, 20)
	L	(20, 25, 30)	(25, 30, 35)	(10, 12, 16)	(10, 15, 20)	(15, 20, 24)	(15, 20, 30)	(8, 10, 12)	0	(5, 10, 15)	(14, 20, 24)
	Q	(20, 25, 30)	(22, 24, 32)	(16, 18, 24)	(12, 16, 20)	(15, 20, 24)	(18, 20, 24)	(0, 1, 2)	(5, 10, 15)	0	(15, 20, 24)
	T	(20, 25, 30)	(24, 26, 34)	(10, 12, 16)	(10, 15, 20)	(15, 20, 24)	(15, 20, 30)	(10, 15, 20)	(14, 20, 24)	(15, 20, 24)	0
$k = 18:00$	B	0	(5, 10, 15)	(15, 20, 30)	(10, 15, 20)	(5, 10, 15)	(6, 12, 18)	(10, 15, 25)	(20, 25, 30)	(20, 25, 30)	(20, 25, 30)
	D	(5, 10, 15)	0	(10, 20, 25)	(10, 15, 20)	(6, 12, 18)	(8, 16, 26)	(8, 14, 26)	(25, 30, 35)	(22, 24, 32)	(24, 26, 34)
	E	(15, 20, 30)	(10, 20, 25)	0	(4, 8, 12)	(16, 18, 24)	(18, 22, 28)	(2, 6, 10)	(10, 12, 16)	(16, 18, 24)	(10, 12, 16)
	F	(10, 15, 20)	(10, 15, 20)	(4, 8, 12)	0	(6, 12, 18)	(10, 16, 20)	(1, 2, 3)	(10, 15, 20)	(12, 16, 20)	(10, 15, 20)
	G	(5, 10, 15)	(6, 12, 18)	(16, 18, 24)	(6, 12, 18)	0	(2, 4, 6)	(8, 10, 15)	(15, 20, 24)	(15, 20, 24)	(15, 20, 24)
	H	(6, 12, 18)	(8, 16, 26)	(18, 22, 28)	(10, 16, 20)	(2, 4, 6)	0	(8, 12, 14)	(15, 20, 30)	(18, 20, 24)	(15, 20, 30)
	K	(10, 15, 25)	(8, 14, 26)	(2, 6, 10)	(1, 2, 3)	(8, 10, 15)	(8, 12, 14)	0	(8, 10, 12)	(12, 15, 20)	(10, 15, 20)
	L	(20, 25, 30)	(25, 30, 35)	(10, 12, 16)	(10, 15, 20)	(15, 20, 24)	(15, 20, 30)	(8, 10, 12)	0	(5, 10, 15)	(14, 20, 24)
	Q	(20, 25, 30)	(22, 24, 32)	(16, 18, 24)	(12, 16, 20)	(15, 20, 24)	(18, 20, 24)	(0, 1, 2)	(5, 10, 15)	0	(15, 20, 24)
	T	(20, 25, 30)	(24, 26, 34)	(10, 12, 16)	(10, 15, 20)	(15, 20, 24)	(15, 20, 30)	(10, 15, 20)	(14, 20, 24)	(15, 20, 24)	0

通过以上两个实验可以得出结论: 本文将提出的两个模型——停放点的布局优化模型和自行车的调度优化模型结合起来, 能够降低对城市公共空间的占用, 同时提高公共租赁自行车的利用率, 保证了市民的短途出行需求, 且方便了管理者对公共资源的规划与管理.

**5 结 论**

本文针对城市中公共租赁自行车的管理问题展开研究. 为了提高公共租赁自行车的利用率, 将管理优化问题进一步划分为两个问题进行讨论, 即自行车停放点的布局优化问题和自行车的调度优化问题. 由于市民出行存在差异性, 且城市交通存在早晚

高峰期,产生了需求量和不同路段调度车行驶时间的波动.为了描述这些经验数据,引入了不确定理论.根据两个问题建立了两个不确定性模型,并将其转化为确定性模型进行求解.最后,通过一个数值实验对模型进行了实验分析,实验结果表明本文建立的模型可以有效地解决公共租赁自行车的管理优化问题,提升资源的利用率.

未来的研究将进一步把公共租赁自行车纳入城市综合交通系统中,建立“公共租赁自行车-公共交通(公交车、地铁、出租车等)-公共租赁自行车”的出行方式,即结合不同的交通工具进行优化建模,综合考虑公共租赁自行车与其他各种城市交通工具的衔接方式、换乘地点,以及出行频率、路线等规律,最终找到满足不同出行需求的性价比最高的出行方式.

#### 参考文献(References)

- [1] Zhang L H, Zhang J, Duan Z Y, et al. Sustainable bike-sharing systems: Characteristics and commonalities across cases in urban China[J]. *J of Cleaner Production*, 2015, 97: 124-133.
- [2] 王全志, 隽海民, 钟绍鹏, 等. 基于大数据的大学城校园停车系统规划[J]. *交通运输研究*, 2017, 3(2): 37-45.  
(Wang Q Z, Jun H M, Zhong S P, et al. Campus Parking System planning based on big data: A case study of lingshui main campus of dalian university of technology[J]. *Transportation Research*, 2017, 3(2): 37-45.)
- [3] 葛显龙, 许茂增, 王伟鑫. 基于联合配送的城市物流配送路径优化[J]. *控制与决策*, 2016, 31(3): 503-512.  
(Ge X L, Xu M Z, Wang W X. Route optimization of urban logistics in joint distribution[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(3): 503-512.)
- [4] 黄敏, 崔妍, 林婉婷, 等. 带有费用折扣的多任务第4方物流路径优化问题[J]. *控制与决策*, 2013, 28(7): 997-1001.  
(Huang M, Cui Y, Lin W T, et al. Multi-task fourth party logistics routing problem with cost discount[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(7): 997-1001.)
- [5] Pittawat U. Efficiency management of public bike-sharing system in bangkok[C]. *Int Conf on Business, Law and Corporate Social Responsibility*. Phuket, 2014: 136-139.
- [6] Liu B D. *Theory and practice of uncertain programming*[M]. 1st ed. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [7] Liu B D. *Uncertainty theory*[M]. 5th ed. Beijing: Uncertainty Theory Laboratory, 2017: 11-133.
- [8] Liu B D. Uncertain set theory and uncertain inference rule with application to uncertain control[J]. *J of Uncertain Systems*, 2010, 4(2): 83-98.
- [9] Liu B D. *Uncertainty theory: A branch of mathematics for modeling human uncertainty*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [10] Gao Y, Li X Y, Li S K. Uncertain models on railway transportation planning problem[J]. *Elsevier J*, 2016, 40(7): 4921-4934.
- [11] Gao Y. Shortest path problem with uncertain arc lengths[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, 62(6): 2591-2600.
- [12] Yang L X, Gao Z Y, Li K P. Railway freight transportation planning with mixed uncertainty of randomness and fuzziness[J]. *Applied Soft Computing*, 2009, 11(1): 778-792.
- [13] Guo H Y, Wang X S, Zhou S L. A transportation problem with uncertain costs and random supplies[J]. *Int J of e-Navigation and Maritime Economy*, 2015, 2(C): 1-11.
- [14] Liu P, Yang L X, Wang L, et al. A solid transportation problem with type-2 fuzzy variables[J]. *Applied Soft Computing*, 2014, 24(C): 543-558.
- [15] Sheng Y H, Yao K. A transportation model with uncertain costs and demands[J]. *Information*, 2012, 15(8): 3179-3186.
- [16] Liu Y H, Ha M H. Expected value of function of uncertain variables[J]. *J of Uncertain Systems*, 2010, 4(3): 181-186.
- [17] Qin Z F, Samarjit K. Single-period inventory problem under uncertain environment[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(18): 9630-9638.
- [18] Chen X W, Liu Y H, Dan A. Uncertain stock model with periodic dividends[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2013, 12(1): 111-123.
- [19] Qin Z F, Li X. Option pricing formula for fuzzy financial market[J]. *J of Uncertain Systems*, 2008, 2: 17-21.
- [20] Yang L X, Zhang Y, Li S K, et al. A two-stage stochastic optimization model for the transfer activity choice in metro networks[J]. *Transportation Research Part B*, 2016, 83(C): 271-297.
- [21] Yao K, Gao J W. Uncertain random alternating renewal process with application to interval availability[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2015, 23(5): 1333-1342.

#### 作者简介

任爽(1981—),男,副教授,从事商务智能与大数据分析等研究, E-mail: sren@bjtu.edu.cn;

韩冰(1995—),女,硕士生,从事运筹优化与需求预测的研究, E-mail: 17120365@bjtu.edu.cn.

(责任编辑: 齐 霖)