

带启动时间和可修服务台的M/M/1/N工作休假排队系统

黎锁平^{1,3†}, 杨喜娟^{1,2}, 彭 铎¹, 陈金淑³

(1. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 兰州 730050; 2. 兰州交通大学
电子与信息工程学院, 兰州 730070; 3. 兰州理工大学 理学院, 兰州 730050)

摘 要: 分析带有启动时间、服务台可故障的M/M/1/N单重工作休假排队系统. 在该系统中, 服务台在休假期间不是完全停止工作, 而是处于低速服务状态. 假定服务台允许出现故障且当出现故障时, 服务台停止为顾客服务且立即进行修理. 服务台的失效时间和修理时间均服从指数分布, 且工作休假期和正规忙期具有不同的取值; 同时, 从关闭期到正规忙期有服从指数分布的启动时间. 建立此工作休假排队系统的有限状态拟生灭过程(QBD), 使用矩阵几何方法得到QBD的各稳态概率相互依赖的率阵, 从而求得稳态概率向量. 通过有限状态QBD的最小生成元和稳态概率向量得到系统的基本阵和协方差矩阵, 求解出系统方差、系统稳态可用度、系统吞吐率、系统稳态队长、系统稳态故障频度等系统性能. 数值分析体现了所提出方法的有效性和实用性, 通过敏感性分析将各参数对系统性能的影响进行了初探, 为此模型的实际应用提供了很好的理论依据.

关键词: 可修服务台; 有限缓存; 工作休假; 拟生灭过程; 矩阵几何解; 性能分析

中图分类号: O226 **文献标志码:** A

Analysis of M/M/1/N working vacation queuing system with setup times and repairable service station

LI Suo-ping^{1,3†}, YANG Xi-juan^{1,2}, PENG Duo¹, CHEN Jin-shu³

(1. School of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China; 3. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: The paper analyzes the M/M/1/N single working vacation queueing system with setup time and server breakdowns. In this system, the server works at a lower service rate instead of stopping working completely during the vacation period. It is assumed that the server is subject to breakdown. The server stops services for customers and is repaired immediately when a breakdown occurs. Both the breakdown time and the repair time for the server follow exponential distributions, and they have different values in the working vacation period and regular busy period respectively. Meanwhile, the setup time from shut down period to regular busy period follows exponential distribution too. We establish the finite quasi birth and death (QBD) process of the system. Matrix-geometric approach is utilized to develop the interdependent rate matrix of the QBD, which helps to get the steady state probability vector. The fundamental matrix and covariance matrix of the system are obtained through the infinitesimal generator of the finite QBD and the steady state probability vector. With the fundamental matrix and covariance matrix, the steady state performances of the system, such as the output variance, availability, throughput, the queue length and fault frequency of the system, are obtained. Numerical analysis shows the effectiveness and feasibility of the proposed approach. Meanwhile, sensitivity analysis studies the influence of the parameters on the performances of the system, which provides a good theoretical basis for the practical application of the proposed model.

Keywords: repairable service station; finite capacity; working breakdown; quasi birth and death process; matrix-geometric approach; performance analysis

0 引 言

文献[1]研究通讯网中波分复用技术时在其建

立的M/M/1排队模型中引入工作休假策略(working vacation, WV), 这种休假策略不同于经典休假排队

收稿日期: 2018-06-04; 修回日期: 2018-09-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61663024); 欧盟国际合作项目(573879); 教育部春晖计划合作科研项目(Z2016001); 兰州交通大学青年基金项目(2015007); 兰州理工大学红柳一流学科建设计划项目.

责任编辑: 苏为洲.

†通讯作者. E-mail: lsuop@163.com.

论,在休假期间服务台不是完全停止为顾客服务而是以较低速率服务顾客.之后,工作休假策略在连续时间排队模型和离散时间排队模型中都得到了广泛的研究和应用.在文献[1]的基础上,文献[2]使用随机分解方法,得到了M/M/1工作休假排队模型中稳态队长和等待时间的随机分解结构,并讨论了工作休假模型的随机分解特性与经典M/G/1休假模型的关系.文献[3]将工作休假策略应用到服务过程为一般分布的M/G/1休假模型,求得多重工作休假策略下稳态队长的分布和任意顾客的系统逗留时间.文献[4]则对M/G/1单重工作休假排队模型进行分析,利用补充变量法和矩阵分析法求得了稳态队长分布和任意时刻的服务特性.文献[5]考虑一般到达过程的GI/M/1工作休假模型,使用矩阵几何方程求解系统中顾客数和顾客逗留时间的平稳分布.文献[6]则将工作休假策略拓展到了离散时间排队模型中,研究了Geom/Geom/1多重工作休假模型,对系统中的顾客数及顾客等待时间进行了分析.文献[7]在Geom/Geom/1多重工作休假模型的基础上引入负顾客和伯努利反馈机制,利用矩阵几何解求得队长稳态分布、平均队长等指标.文献[8]考虑了离散时间有限缓存的GI/Goem/1/N工作休假模型,利用离散补充变量法求得了稳态情形下任意时刻的队长分布.

对M/M/1工作休假排队模型的研究中,文献[1]研究了M/M/1多重工作休假排队模型,求得了系统中顾客数的概率分布函数,即顾客逗留时间的拉氏变换.文献[9]考虑了单重工作休假M/M/1排队模型,利用拟生灭过程和矩阵几何解的方法得到系统稳态下顾客数的概率分布,并求得稳态指标的随机分解结果.文献[10]考虑了N-策略下工作休假M/M/1排队模型,利用均值分析的方法求得顾客期望逗留时间,以对顾客行为特征进行分析.文献[11]在单重工作休假M/M/1排队模型中引入了启动时间,通过求解得到稳态队长及稳态等待时间的分布及其随机分解结果.之后,文献[12]对带启动期和有限缓存的单重工作休假M/M/1/N排队模型进行分析,使用矩阵解法求得了此模型中的系统平均队长,系统等待队长等系统性能指标.

在实际应用中,经常会出现服务台发生故障而不能为顾客服务的情形,而现有文献中考虑服务台故障的工作休假排队模型相对较少.文献[13-14]分析了服务台有多重故障的M/M/1工作休假模型及服务可中断、维修多重可选的M/E_k/1工作休假模型,利用矩阵几何方法求得了稳态系统队长等系统指标.文献

[15]分析了多重工作休假的M/M/1可修排队系统的可靠性问题,求出了忙期和工作休假期服务台广义服务时间的分布函数.文献[16]在N-策略下M/M/1工作休假排队模型中考虑了服务台故障,求得了稳态下系统中顾客数的矩阵形式的表达式.

本文受文献[11,13]的启发,在考虑启动时间和服务台故障的情况下,研究有限缓存的M/M/1/N工作休假模型.这种模型广泛出现在实际生活中,比如邮局的职员,当他完成取递任务,发现当前没有顾客的时候,会进行第2项任务,比如给信件排序等;当职员出现小意外(如划破手)时,即可停止工作,及时进行治疗,治愈后开始根据当前状态进行相应工作.在生产制造过程中生产机器也会出现类似情况.本文利用拟生灭过程和矩阵分析的方法求解模型的平稳概率向量,对系统的性能指标进行求解.本文的贡献在于除了求得系统稳态可用度、系统稳态队长等性能指标外,还用矩阵分析的方法求得了系统在时间间隔 $[0, T]$ (其中 T 为服务周期,指从顾客进入系统直到服务完成所用的平均时间)内系统服务顾客个数的方差,且通过系统方差和系统稳态可用度求得系统某置信度下的区间估计.这一研究是现有关于工作休假的文献中从未涉及的,但将为M/M/1/N工作休假模型的实际应用提供很好的理论依据.

1 模型描述

考虑一个M/M/1/N单重工作休假模型,其模型描述如下:

1) 系统中仅有一个服务台,每次只能服务一个顾客,在顾客进入服务台之前有一个缓冲区,用来容纳等待服务的顾客,缓冲区的容量为 N (不包括正在服务的顾客).

2) 顾客的到达率服从参数为 λ 的泊松分布.

3) 当缓冲区中无顾客时,服务台进入一个随机长度为 V 、服从参数为 θ 指数分布的工作休假.工作休假期间,服务台按顺序对到达的顾客以一个较低的速率 μ_w 进行服务.当工作休假结束时,如果缓冲区中有顾客,则服务台将服务速率调整为 μ_b ($\mu_b > \mu_w$),进入一个正规忙期;否则,服务台进入一个关闭期.

4) 在关闭期内,如果缓冲区中有到达的顾客,则关闭期结束;此时,服务台不是直接为顾客服务,而是进入启动期,启动时间 S 服从参数为 s 指数分布,启动期结束后进入一个正规忙期.

5) 服务台为顾客服务的过程中有故障发生,故障发生后,立刻进行维修,维修完成后,服务台继续为顾客进行服务,在工作休假期间,服务台的失效时间和

修理时间分别服从参数为 α_w 和 β_w 的指数分布;在正规忙期内,服务台的失效时间和修理时间分别服从参数为 α_b 和 β_b 的指数分布.故障期间,服务台停止为发生故障时正在服务的顾客进行服务,当故障维修后,服务台接着为此顾客进行服务.

6) 顾客的到达、服务速率、工作休假时间以及启动时间、失效时间和修理时间是相互独立的,顾客的服务顺序遵循先到先服务(first in first out, FIFO)的原则.

综合考虑上述模型,该模型在服务台休假期间仍有服务速率,可见该模型本质上属于具有可变服务率的M/M/1/N排队系统.

2 平稳方程及稳态概率向量的求解

2.1 系统平稳方程

令 $L(t)$ 表示 t 时刻缓冲区中的顾客数($t \geq 0$),即 t 时刻系统的队长, $L(t)$ 的取值最大为 N .令 $J(t)$ 为 t 时刻服务台的工作状态,根据模型描述有

$$J(t) = \begin{cases} 1, & \text{系统处于启动期或关闭期;} \\ W, & \text{系统处于工作休假期;} \\ B, & \text{系统处于正规忙期.} \end{cases}$$

令 $R(t)$ 表示 t 时刻服务台是否有故障,其取值为0表示服务台有故障,取值为1表示服务台无故障. $\{L(t), J(t), R(t)\}$ 是一个三维马尔科夫过程,其状态空间为 $\Omega = \{(0, W, 1), (0, W, 0), (0, 1, 1)\} \cup \{(k, j, \eta) : 1 \leq k \leq N; j = 1, W, B; \eta = 0, 1\}$.其中 $(0, 1, 1)$ 表示系统处于关闭期,且服务台无故障; $(k, 1, 1), k \geq 1$,表示系统处于启动期且缓冲区中有 k 个顾客,服务台无故障; $(k, W, 1), k \geq 0$,表示系统处于工作休假状态且缓冲区中有 k 个顾客,服务台无故障; $(k, B, 1), k \geq 1$,表示系统处于正规忙期且缓冲区中有 k 个顾客,服务台无故障; $(k, W, 0), k \geq 0$,表示系统处于工作休假状态且缓冲区中有 k 个顾客,服务台处在维修期; $(k, B, 0), k \geq 1$,表示系统处于正规忙期且缓冲区中有 k 个顾客,服务台处在维修期.系统的状态转移如图1所示.

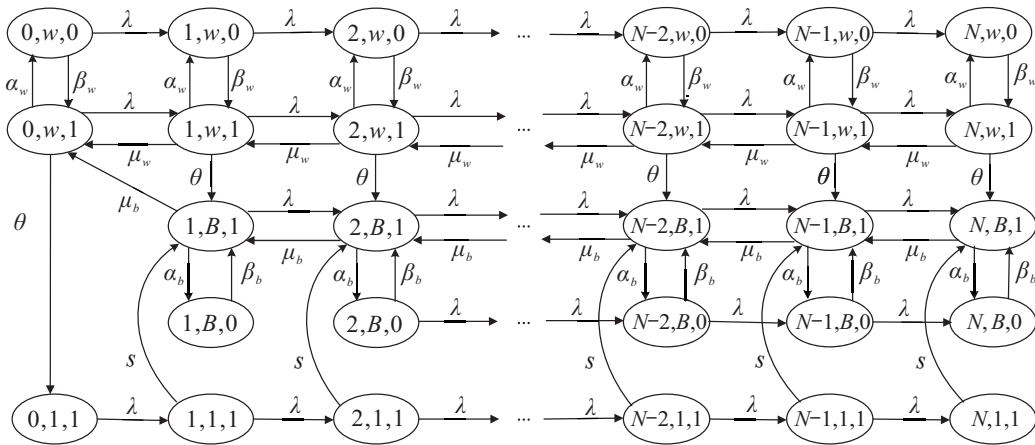


图1 带启动时间和可修服务台的M/M/1/N的工作休假模型的状态转移

当缓冲区中没有顾客(即 $k = 0$)时仅有3个状态,可得系统的平稳方程为

$$-(\lambda + \beta_w)P(0, W, 0) + \alpha_w P(0, W, 1) = 0; \quad (1)$$

$$-(\lambda + \theta + \alpha_w)P(0, W, 1) + \beta_w P(0, W, 0) + \mu_w P(1, W, 1) + \mu_b P(1, B, 1) = 0; \quad (2)$$

$$-\lambda P(0, 1, 1) + \theta P(0, W, 1) = 0; \quad (3)$$

$$-(\lambda + \beta_w)P(1, W, 0) + \alpha_w P(1, W, 1) + \lambda P(0, W, 0) = 0,$$

$$-(\lambda + \theta + \alpha_w + \mu_w)P(1, W, 1) + \beta_w P(1, W, 0) + \mu_w P(2, W, 1) + \lambda P(0, W, 1) = 0,$$

$$-(\lambda + \mu_b + \alpha_b)P(1, B, 1) + \beta_b P(1, B, 0) +$$

$$\theta P(1, W, 1) + \mu_b P(2, B, 1) + sP(1, 1, 1) = 0,$$

$$-(\lambda + \beta_b)P(1, B, 0) + \alpha_b P(1, B, 1) = 0,$$

$$-(\lambda + s)P(1, 1, 1) + \lambda P(0, 1, 1) = 0; \quad (4)$$

$$-(\lambda + \beta_w)P(i, W, 0) + \alpha_w P(i, W, 1) + \lambda P(i-1, W, 0) = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1; \quad (5)$$

$$-(\lambda + \theta + \alpha_w + \mu_w)P(i, W, 1) + \beta_w P(i, W, 0) + \mu_w P(i+1, W, 1) + \lambda P(i-1, W, 1) = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1; \quad (6)$$

$$-(\lambda + \alpha_b + \mu_b)P(i, B, 1) + \beta_b P(i, B, 0) + \mu_b P(i+1, B, 1) + \lambda P(i-1, B, 1) + \theta P(i, W, 1) + sP(i, 1, 1) = 0, \quad 2 \leq i \leq N-1; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda + \beta_b)P(i, B, 0) + \alpha_b P(i, B, 1) + \\
 & \lambda P(i - 1, B, 0) = 0, \quad 2 \leq i \leq N - 1; \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lambda P(i - 1, 1, 1) - (\lambda + s)P(i, 1, 1) = 0, \\
 & \quad 2 \leq i \leq N - 1; \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta_w P(N, W, 0) + \alpha_w P(N, W, 1) + \\
 & \lambda P(N - 1, W, 0) = 0, \\
 & -(\theta + \alpha_w + \mu_w)P(N, W, 1) + \\
 & \beta_w P(N, W, 0) + \lambda P(N - 1, W, 1) = 0, \\
 & -(\alpha_b + \mu_b)P(N, B, 1) + \beta_b P(N, B, 0) + \\
 & \lambda P(N - 1, B, 1) + \theta P(N, W, 1) + sP(N, 1, 1) = 0, \\
 & -\beta_b P(N, B, 0) + \alpha_b P(N, B, 1) + \\
 & \lambda P(N - 1, B, 0) = 0, \\
 & \lambda P(N - 1, 1, 1) - sP(N, 1, 1) = 0.
 \end{aligned}$$

利用式(1)~(3)的等量代换,将 $k = 0$ 的状态用状态 $k = 1$ 表示,再将状态按字典序排列,可得系统的最小生成元为

$$Q = \begin{bmatrix} C_1 & D & & & \\ A & C & D & & \\ & A & C & D & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & A & C_N \end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \begin{bmatrix} -(\lambda + \beta_w) & \beta_w & & & \\ \alpha_w(1 + \gamma\lambda\mu_w) & -(\lambda + \theta + \alpha_w + \mu_w) + \gamma\lambda\mu_w(\lambda + \beta_w) & & & \\ \gamma\lambda\alpha_w\mu_b & \gamma\lambda\mu_b(\lambda + \beta_w) & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & \theta & 0 & \gamma\theta\mu_w(\lambda + \beta_w) & \\ \leftarrow -(\lambda + \alpha_b + \mu_b) & \alpha_b & \gamma\theta\mu_b(\lambda + \beta_w) & & \\ & \beta_b & -(\lambda + \beta_b) & 0 & \\ & s & 0 & -(\lambda + s) & \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C = & \begin{bmatrix} -(\lambda + \beta_w) & \beta_w & & & \\ \alpha_w & -(\lambda + \theta + \alpha_w + \mu_w) & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ \leftarrow -(\lambda + \alpha_b + \mu_b) & \alpha_b & 0 \\ \beta_b & -(\lambda + \beta_b) & 0 \\ s & 0 & -(\lambda + s) \end{array} \right],$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 C_N = & \begin{bmatrix} -\beta_w & \beta_w & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_w & -(\theta + \alpha_w + \mu_w) & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha_b + \mu_b) & \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & \beta_b & -\beta_b & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & -s \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

且

$$\gamma = \frac{1}{\lambda\alpha_w + \lambda\theta + \lambda^2 + \theta\beta_w + \lambda\beta_w}.$$

根据文献[17-18],矩阵 Q 有分块三对角结构,这表明 $\{L(t), J(t), R(t)\}$ 是有限状态的拟生灭过程(QBD). 为方便起见,记最小生成元 $Q = (q_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, 5N$. 鉴于分块矩阵 D 是非奇异的对角阵,参照文献[19]矩阵分析的方法求解稳态概率向量.

2.2 稳态概率向量的求解

设 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ 为矩阵 Q 的平稳概率向量,每一个子向量 $\pi_i = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \pi_{i3}, \pi_{i4}, \pi_{i5})(1 \leq i \leq N)$ 为5维行向量. 由平稳方程组 $\pi Q = 0, \pi e = 1$ (e 为单位列向量)可得

$$\pi_1 C_1 + \pi_2 A = 0; \tag{11}$$

$$\pi_1 D + \pi_2 C + \pi_3 A = 0; \tag{12}$$

$$\pi_{i-1} D + \pi_i C + \pi_{i+1} A = 0, \quad 3 \leq i \leq N - 1; \tag{13}$$

$$\pi_{N-1} D + \pi_N C_N = 0. \tag{14}$$

因矩阵 C_1, C, C_N 是非奇异阵,且 $D = \lambda I$ (I 为单位矩阵)为对角阵,则由式(14)可得

$$\pi_{N-1} = -\pi_N C_N D^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \pi_N C_N = \pi_N R_{N-1}, \tag{15}$$

其中称 $R_{N-1} = -C_N/\lambda$ 为子率阵. 同时,假设 $\pi_N = \pi_N R_N$, 即 $R_N = I$, 则由式(13)和(15)可得

$$\begin{aligned}
 \pi_{i-1} = & -\frac{1}{\lambda} (\pi_i C + \pi_{i+1} A) = \\
 & -\frac{1}{\lambda} \pi_N (R_i C + R_{i+1} A) = \pi_N R_{i-1}, \tag{16}
 \end{aligned}$$

其中 $R_{i-1} = -(R_i C + R_{i+1} A) / \lambda, i = 3, 4, \dots, N - 1$.

由式(11)有

$$\pi_1 = -\pi_2 A C_1^{-1} = -\pi_N R_2 A C_1^{-1} = \pi_N R_1, \quad (17)$$

其中 $R_1 = -R_2 A C_1^{-1}$. 求解 $R_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的过程如图2所示.

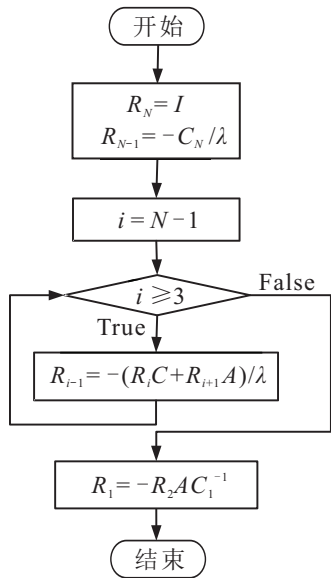


图2 R_i 计算流程

由式(12)、(16)和(17), 可得

$$\pi_N (R_1 D + R_2 C + R_3 A) = 0, \quad (18)$$

且有

$$\pi e = \pi_N (R_1 + R_2 + \dots + R_{N-1} + I) e = 1. \quad (19)$$

联立式(18)和(19)即可求得 π_N , 再依式(15)~(17)可求得稳态概率向量 π .

3 系统性能

在系统稳态分布的基础上, 下面分析反映系统性能的主要指标, 特别是给出系统服务顾客数的置信区间.

1) 系统方差.

设 $v_\xi(n)$ 表示从某一个初始状态出发, n 个服务周期中系统处于状态 ξ 的次数, $\text{cov}(v_\xi(n), v_\psi(n))$ 表示从某一个初始状态出发, n 个服务周期中系统处于状态 ξ 的次数与系统处于 ψ 的次数的协方差, 简记为 $c_{\xi\psi}$; $\pi = (\pi_{11}, \pi_{12}, \dots, \pi_{15}, \dots, \pi_{N1}, \pi_{N2}, \dots, \pi_{N5}) = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{5 \times N})$ 为 2.2 节中所求的平稳概率向量. 设系统的概率转移矩阵为 P , 参考文献 [20-21], 可得 QBD 过程的基本阵为

$$F = (I - P + e\pi)^{-1}.$$

其中: I 为单位阵, e 为元素都是 1 的 $(5 \times N)$ 维列向量, $P = I - YQ$, 而

$$Y = \begin{bmatrix} 1/q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/q_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/q_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/q_{5 \times N, 5 \times N} \end{bmatrix}$$

QBD 过程的基本阵为 $F = (e\pi + YQ)^{-1}$. 由文献 [20], 有如下引理.

引理 1 系统的协方差矩阵 $\text{Con} = \{c_{\xi\psi}\}$ 和方差由下式确定:

$$c_{\xi\psi} = \begin{cases} \pi_\xi F_{\xi\psi} + \pi_\psi F_{\psi\xi} - \pi_\xi \pi_\psi, & \xi \neq \psi; \\ \pi_\xi (2F_{\xi\xi} - 1 - \pi_\psi), & \xi = \psi. \end{cases}$$

其中: F 为基本阵, π 为平稳概率向量.

另外, 无需证明即可给出如下结果.

定理 1 设 U 为系统中有顾客输出状态的集合 (即服务台处于无故障状态, 且在工作休假期或正常忙期的有效状态集), 即 $U = \{(i, W, 1) \cup (i, B, 1), i = 1, 2, \dots, N\}$, 则系统的稳态可用度 Avai (availability) 和系统输出方差 V (output variance) 为

$$\text{Avai} = \sum_{r \in U} \pi_r, \quad V = \sum_{\xi, \psi \in U} c_{\xi\psi}.$$

由文献 [20] 中 Theorem 4.6.9 可知, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, $c_{\xi\xi}$ 服从 Markov 过程的中心极限定理. 同时, 由文献 [22] 可知, 对这个状态相依的 QBD 过程, $c_{\xi\psi}$ 也服从 Markov 过程的中心极限定理. 由此可知, 此 M/M/1/N 系统在时间区间 $[0, T]$ 内服务完的顾客数服从以 $\text{Avai} \cdot T$ 为期望, $V \cdot T$ 为方差的正态分布, 这样便可提供此系统在 $[0, T]$ 内服务顾客数的区间估计.

定理 2 假设 $T \rightarrow \infty$, 置信度为 $1 - \alpha$, 则系统在时间间隔 $[0, T]$ 内服务顾客数的区间估计为 $(\text{Avai} \cdot T - \sqrt{V \cdot T} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}, \text{Avai} \cdot T + \sqrt{V \cdot T} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}})$.

证明 由于 $c_{\xi\xi}$ 和 $c_{\xi\psi}$ 都服从 Markov 过程的中心极限定理, 服务台在时间间隔 $[0, T]$ 服务的顾客数的平均个数为 $\text{Avai} \cdot T$, 标准差为 $\sqrt{V \cdot T}$. 设 \bar{X} 为服务顾客数的平均个数, $\text{Avai} \cdot T$ 为 \bar{X} 的一个点估计, 则有

$$Z = \frac{\bar{X} - \text{Avai} \cdot T}{\sqrt{V \cdot T}} \sim N(0, 1).$$

由正态分布的分位点, 有

$$P(|Z| < u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha,$$

此即

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \text{Avai} \cdot T}{\sqrt{V \cdot T}}\right| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

亦即

$$P(\text{Avai} \cdot T - \sqrt{V \cdot T} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}} < \bar{X} < \text{Avai} \cdot T + \sqrt{V \cdot T} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha.$$

故系统在时间间隔 $[0, T]$ 内置信度为 $1 - \alpha$, 服务顾客数的区间估计为 $(\text{Avai} \cdot T - \sqrt{V \cdot T} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}, \text{Avai} \cdot T + \sqrt{V \cdot T} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}})$. 从而得证. \square

2) 系统吞吐率.

$$\text{TP} = \sum_{i=1}^N [P(i, W, 1)\mu_w + P(i, B, 1)\mu_b] = \sum_{i=1}^N [\pi_{i2}\mu_w + \pi_{i3}\mu_b].$$

3) 系统稳态队长.

$$L = \sum_{i=1}^N [i \cdot P(i, W, 0) + i \cdot P(i, W, 1) + i \cdot P(i, B, 0) + i \cdot P(i, B, 1) + i \cdot P(i, 1, 1)] = \sum_{i=1}^N \left(i \cdot \sum_{j=1}^5 \pi_{ij} \right).$$

4) 系统稳态故障频度.

$$\text{BF} = \sum_{i=1}^N [P(i, W, 0)\alpha_w + P(i, B, 0)\alpha_b] = \sum_{i=1}^N [\pi_{i1}\alpha_w + \pi_{i4}\alpha_b].$$

5) 系统处于关闭期的概率.

由式(4)可得, 此概率为

$$P_{\text{idel}} = P(0, 1, 1) = \frac{\lambda + s}{\lambda} P(1, 1, 1) = \frac{\lambda + s}{\lambda} \pi_{15}.$$

4 数值分析及其结论

4.1 算例实现过程

设有缓冲区容量 $N = 5$ 的工作休假排队系统, 顾客的到达率、工作休假时间参数、启动时间参数分别为 $\lambda = 2, \theta = 0.2$ 及 $s = 2$. 机器 M 在正常忙期和工作休假期的服务速率、失效时间和修理时间在表1中列出.

表1 算例参数表

	服务速率	失效时间	修理时间
正常忙期	$\mu_b = 4$	$\alpha_b = 0.5$	$\beta_b = 2$
工作假期	$\mu_w = 1$	$\alpha_w = 0.3$	$\beta_w = 1$

由表1中的参数, 可求得子矩阵 C_1, D, C, A, C_N 及其子率阵 $R_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 分别为

$$C_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3833 & -2.6667 & 0.2 & 0 & 0.0833 \\ 0.3333 & 3.3333 & -6.5 & 0.5 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & -3.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}, R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & -1.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$R_4 =$

$$\begin{bmatrix} 0.5000 & -0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1500 & 0.7500 & -0.1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2500 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$R_3 =$

$$\begin{bmatrix} 0.8250 & -1.1250 & 0.0500 & 0 & 0 \\ -0.3375 & 0.8875 & -0.4000 & 0.0250 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5625 & -1.0625 & 0 \\ 0 & 0 & -4.2500 & 2.2500 & 0 \\ 0 & 0 & -4.2500 & 0.2500 & 2.0000 \end{bmatrix},$$

$R_2 =$

$$\begin{bmatrix} 1.4062 & -2.1313 & 0.2750 & -0.0125 & 0 \\ -0.6394 & 1.3469 & -1.2137 & 0.1500 & 0 \\ 0 & 0 & 14.6406 & -3.5156 & 0 \\ 0 & 0 & -14.0625 & 5.5625 & 0 \\ 0 & 0 & -14.0625 & 1.5625 & 4.0000 \end{bmatrix},$$

$R_1 =$

$$\begin{bmatrix} -0.0629 & -0.6280 & 0.1559 & 0.0195 & -0.0001 \\ -0.1658 & -0.5837 & -0.8213 & -0.1027 & -0.0806 \\ 2.8944 & 13.8043 & 10.1751 & 1.2719 & 1.1355 \\ -2.7802 & -13.2592 & -9.7733 & -1.2217 & -1.0907 \\ -2.7802 & -13.2592 & -9.7733 & -1.2217 & -1.0907 \end{bmatrix}.$$

根据2.2节提供的方法, 可以解出系统的平稳稳

态向量为

$$\pi = (0.012\ 2, 0.068\ 1, 0.031\ 5, 0.003\ 9, 0.004\ 0, 0.014\ 6, 0.064\ 3, 0.043\ 8, 0.007\ 4, 0.002\ 0, 0.017\ 1, 0.074\ 3, 0.047\ 5, 0.009\ 7, 0.001\ 0, 0.022\ 9, 0.114\ 3, 0.046\ 2, 0.010\ 6, 0.000\ 5, 0.114\ 3, 0.228\ 5, 0.040\ 1, 0.020\ 6, 0.000\ 5).$$

根据定理1求得系统稳态可用度和方差为 $Avai = 0.758\ 6, V = 0.350\ 9$.

假设系统运行 $T = 2000$ 个服务周期, $Avai \cdot T = 1517$ 为 $[0, T]$ 时间内服务台服务的顾客的平均个数. 由 $V \cdot T = 701.8$ 可知标准差为 26.49. 由定理2可得系统在 $[0, T]$ 时间内服务顾客数的置信度为 95% 的区间估计 $(Avai \cdot T - 1.96\sqrt{V \cdot T}, Avai \cdot T + 1.96\sqrt{V \cdot T}) = (1\ 465, 1\ 569)$.

由稳态向量,可计算系统其他性能为

$$TP = 1.386\ 1, L = 3.630\ 8,$$

$$BF = 0.080\ 4, P_{idle} = 0.008\ 1.$$

4.2 敏感性分析

为了研究系统参数对系统性能的影响情况,通过 Matlab R2016a 软件平台进行系统参数变动的数学实验. 在实验中,不需要变化的量以表1为基础,同时若缓冲区容量不发生变化,将其设定为 $N = 10$. 实验结果分析如下.

调整 (μ_b, μ_w) 、 (α_b, β_b) 、 (α_w, β_w) 的值,计算 V 、 $Avai$ 、 BF 及 P_{idel} 的数据结果如表2所示. 可以看出, V 随着 $\mu_b(\mu_w)$ 的增大而增大,随着 $\beta_b(\beta_w)$ 的增大而减小,而随着 $\alpha_b(\alpha_w)$ 的增大有先增后减的趋势; $Avai$ 随着 $\mu_b(\mu_w)$ 、 $\alpha_b(\alpha_w)$ 的增大而减小,随着 $\beta_b(\beta_w)$ 的增大而增大; BF 随着 $\alpha_b(\alpha_w)$ 的增大而增大,随着 $\beta_b(\beta_w)$ 的增大而减小; P_{idel} 随着 $\alpha_b(\alpha_w)$ 的增大而减小,随着 $\mu_b(\mu_w)$ 、 $\beta_b(\beta_w)$ 的增大而增大. 另外,失效时间倾向于增加系统故障频度,减小系统处于关闭状态的概率,而修理时间可以降低系统方差和系统故障频度,增加系统稳态可用度,同时可提高系统服务效率. 这一规律与我们的实际经验相同,即服务台的失效时间的参数 α_b 、 α_w 越大,平均失效时间的长度 $1/\alpha_b$ 、 $1/\alpha_w$ 越小,但失效频率增大,即服务台处于故障状态的概率越高,服务效率降低,处于空闲的概率降低;而服务台的修理时间的参数 β_b 、 β_w 越大,平均修理时间长度 $1/\beta_b$ 、 $1/\beta_w$ 越小,即服务台被修复的机率增加,服务台处于故障状态的概率降低,服务台的效率提高,处于空闲的概率增加. 而系统服务速率则倾向于增大系统方差,减少系统稳态可用度.

表2 系统参数对系统性能的影响

		V	$Avai$	BF	P_{idel}
α_b	0.5	0.4167	0.7673	0.0843	0.0063
	1.5	0.6261	0.6390	0.4208	0.0042
	2.5	0.7400	0.5116	1.0947	0.0024
	3.5	0.6322	0.4078	1.9977	0.0012
	4.5	0.4577	0.3288	2.9406	0.0006
α_w	0.3	0.4167	0.7673	0.0843	0.0063
	2.3	0.5110	0.4288	1.2320	0.0015
	4.3	0.5848	0.2982	2.8738	0.0007
	6.3	0.5908	0.2310	4.6734	0.0003
	8.3	0.5691	0.1877	6.5450	0.0002
β_b	0.5	0.7024	0.5950	0.1814	0.0041
	1	0.4637	0.7470	0.0961	0.0060
	1.5	0.3907	0.7793	0.0773	0.0065
	2	0.3648	0.7927	0.0694	0.0067
	2.5	0.3527	0.8000	0.0651	0.0069
β_w	0.5	0.4831	0.6710	0.1119	0.0051
	1	0.4167	0.7673	0.0843	0.0063
	1.5	0.3475	0.8068	0.0728	0.0069
	2	0.3033	0.8284	0.0665	0.0073
	2.5	0.2753	0.8421	0.0625	0.0076
μ_b	2	0.2814	0.7937	0.0970	0.0012
	4	0.4167	0.7673	0.0843	0.0063
	6	0.4547	0.7582	0.0800	0.0081
	8	0.4714	0.7543	0.0781	0.0088
	10	0.4808	0.7521	0.0770	0.0092
μ_w	1	0.4167	0.7673	0.0843	0.0063
	3	0.4231	0.7268	0.0882	0.0227
	5	0.4321	0.6687	0.0976	0.0478
	7	0.4523	0.6242	0.1059	0.0673
	9	0.4880	0.5920	0.1121	0.0815

变化缓冲区容量 N , 各参数对系统吞吐率 TP 的影响情况如图3所示. 可以看出,随着 N 的逐渐增大, TP 的值先是递增的趋势,当 N 增大到一定值后, TP 的递增速率增大,且很快达到极大值;之后,随着 N 的增大, TP 的值急剧降为最小值,之后随着 N 的增大, TP 的值再不发生变化. 由图3(a)和图3(b)可以看出, TP 随着 α_b 和 α_w 的增大而减小,较大的 α_b 或 α_w 较先到达极值点;在图3(c)和图3(d)中, TP 随着 β_b 和 β_w 的增大而增大,同时,较大的 β_b 或 β_w 较先到达极值点;由图3(e)和图3(f)可以看出,随着 θ 或 s 的增大,即工作休假时间或启动时间减小, TP 增大,且较大的 θ 或 s 较先到达极值点.

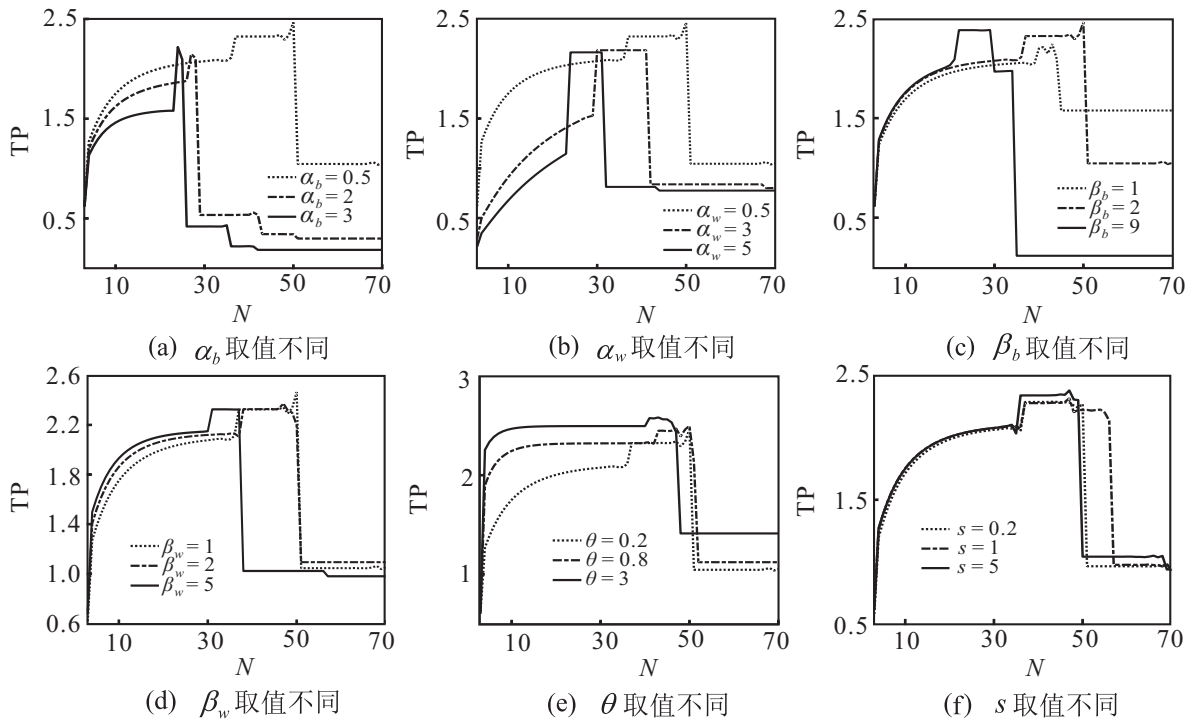


图3 系统吞吐量随缓冲区容量的变化情况

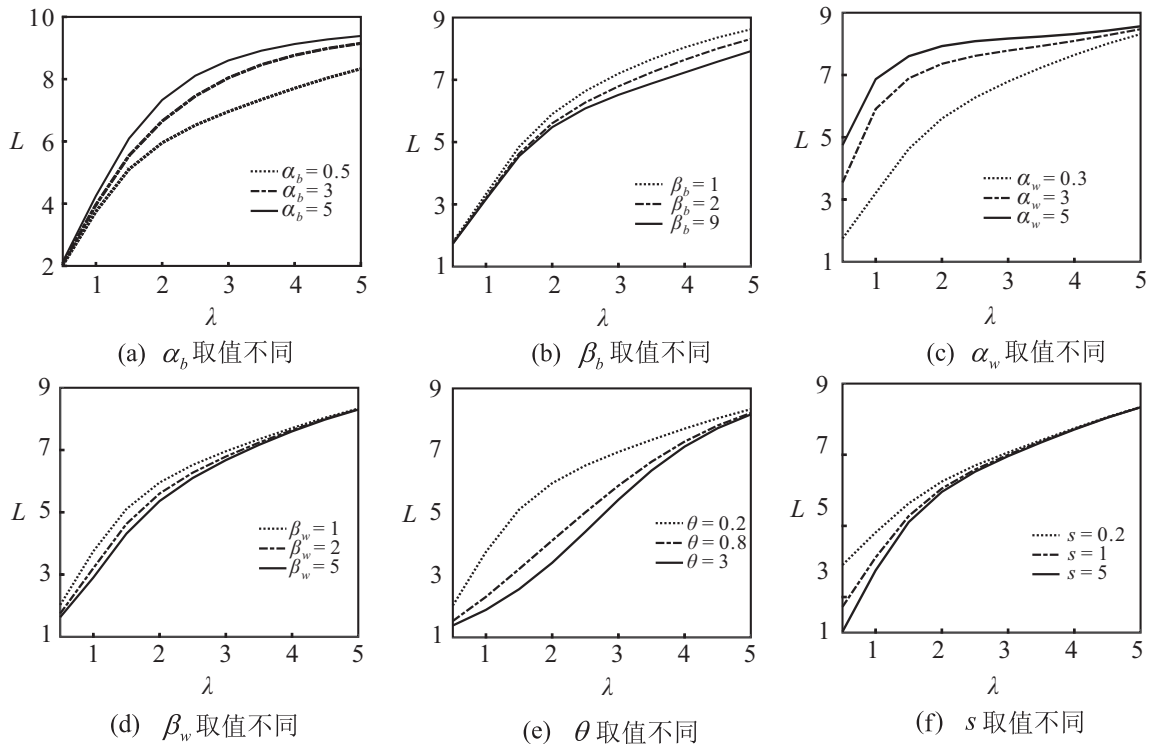


图4 系统稳态队长随顾客到达率的变化情况

图4为变化 λ 后,系统稳态队长 L 随各参数的变化情况. 整体而言, L 随着 λ 的增大而递增. 图4(a)~图4(d)分别描述了 α_b 、 β_b 、 α_w 、 β_w 取值不同时 L 的变化, L 随着 α_b 和 α_w 的增大而增大,随着 β_b 、 β_w 的增大而减小,即服务台的失效时间倾向于增加队长,而较大的修理时间可以减小队长,从而可以提高服务效率;图4(e)和图4(f)对取值不同的 θ 和 s 进行了描述,随着 θ 或 s 的增大, L 减小,当 θ 或 s 增大到一定值后, L

趋于饱和.

图5(a)~图5(d)描述了系统吞吐量 TP 随服务速率 μ_b 和 μ_w 的变化情况. 整体来看, TP 随着 μ_w 的增大而增大,当 μ_b 较小时, TP 随着 μ_b 的增大而增大,而当 μ_b 增大到一定程度时,系统吞吐量的大小随着 μ_b 的增大有较小幅度的下降,然后趋于平缓. 实验数据表明,这种情况仅出现于启动时间较长或缓冲区容量较小的情况. 其可能原因是:较大的 μ_b 使得机器的服务

效率增大,使得系统处于关闭状态的几率增大,从关闭状态到正规忙期的转换也相对增多;另外,启动时间过大,系统处于启动期的几率也相应增大,导致处于工作休假期和正规忙期的几率降低,系统的利用率下降.如果启动时间足够小,则这种现象的影响会足够小;如果缓冲区容量相对较大,则系统处于关闭状态的几率会减少,启动期相对较少,也能减少启动时间对系统吞吐率的影响.

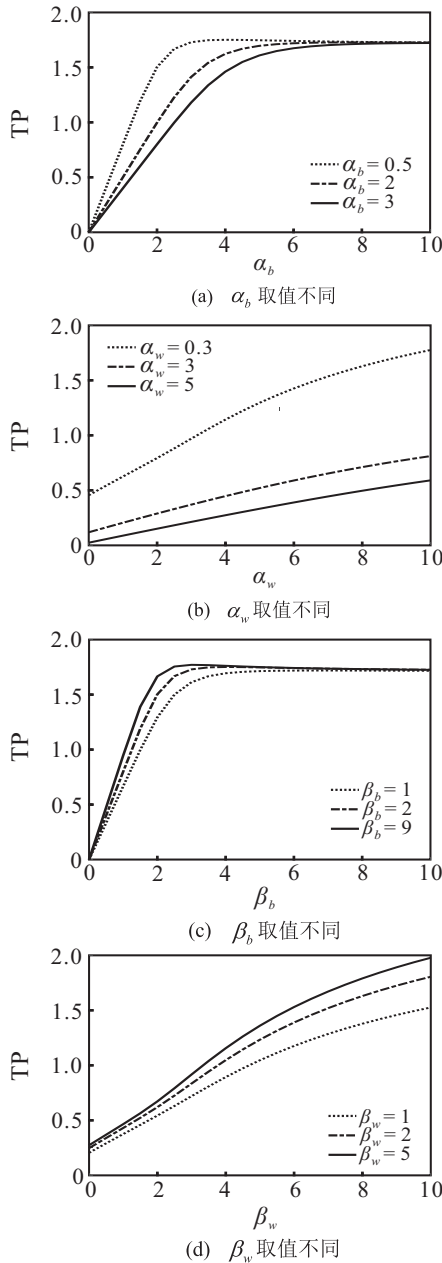


图5 系统吞吐率随服务速 μ_b 和 μ_w 的变化情况

综合上述图表,系统参数对系统各性能的影响归纳如下:

- 1) 系统中的缓冲区容量并不是越大越好,当缓冲区容量超过一定值时系统吞吐率反而降低,所以需根据系统参数选择合适的缓冲区容量.
- 2) 随着服务台的失效时间(修理时间)的增大,系

统队长、系统故障频率增大(减小),而系统稳态可用度、系统吞吐率、系统处于关闭期的概率减小(增大).系统方差随着修理时间的增大而减小,而随着失效时间的增加有先增后减的趋势.

3) 随着工作休假时间或启动时间的减小,系统队长减小,而系统吞吐率增大.

4) 系统队长随着顾客的到达率的增大而增大,系统方差和系统处于关闭期的概率随着服务速率的增大而减小;系统吞吐率随工作休假期的服务率的增大而增大;而受启动时间及缓冲区容量大小等参数的影响,当正规忙期的服务率较小时,系统吞吐率随着增大,而当正规忙期的服务率较大时,系统吞吐率有小幅度的下降,之后趋于平缓.因此,需对启动时间、缓冲区大小等参数进行优化,使得系统吞吐率达到最优.

5 结论

本文对带有启动时间的可修M/M/1/N单重工作休假排队系统进行了分析.在这种排队系统中,服务台在工作休假期和正规忙期有不同的失效时间和修理时间,这种情况比服务台无故障或仅在正规忙期出现故障更贴近于实际.本文考虑的模型在制造业生产过程中广泛存在.通过求解模型,对工作休假模型中的系统方差的计算过程进行了初探,且根据系统输出方差和系统稳态可用度,得到了系统在时间间隔 $[0, T]$ 内的区间估计,填补了工作休假模型在这方面研究的空白.本文求解得到的系统性能指标的表达式及其对各性能指标的敏感性分析结论可为研究实时不可靠系统提供很好的理论依据,对更进一步地研究M/M/1/N工作休假模型的定性理论有很大的启发性.在后续的工作中,将尝试用此模型求解实际生产过程中的诸多问题,同时将模型拓展到多服务台的情况,并对系统参数进行优化.

参考文献(References)

- [1] Servi L D, Finn S G. M/M/1 queues with working vacations (M/M/1/WV)[J]. Performance Evaluation, 2002, 50(1/2/3/4): 41-52.
- [2] Liu W Y, Xu X L, Tian N S. Stochastic decompositions in the M/M/1 queue with working vacations[J]. Operations Research Letters, 2007, 35(5): 595-600.
- [3] Wu D, Takagi H. M/G/1 queue with multiple working vacations[J]. Performance Evaluation, 2006, 63(7): 654-681.
- [4] Zhang M, Hou Z T. M/G/1 queue with single working vacation[J]. Journal of Applied Mathematics and

- Computing, 2012, 39(1/2): 221-234.
- [5] Baba Y. Analysis of a GI/M/1 queue with multiple working vacations[J]. Operations Research Letters, 2005, 33(2): 201-209.
- [6] Tian N S, Ma Z Y, Liu M X. The discrete time Geom/Geom/1 queue with multiple working vacations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2008, 32(12): 2941-2953.
- [7] 胡昌亮, 朱翼隽. 负顾客及反馈的 Geo/Geo/1 多重工作休假排队系统的稳态队长分布[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(7): 1494-1500.
(Hu C L, Zhu Y J. Equilibrium distribution of the queue length in Geo/Geo/1 queue system with negative customer, feedback and multiple working vacations[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2012, 32(7): 1494-1500.)
- [8] 余妙妙, 唐应辉. 离散时间有限缓冲空间 GI/Geom/1/N 工作休假排队系统稳态概率算法及性能分析[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(9): 99-107.
(Yu M M, Tang Y H. Steady-state probability algorithm and performance analysis of the finite buffer discrete-time GI/Geom/1/N queueing system with working vacations[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2009, 29(9): 99-107.)
- [9] Tian N S, Zhao X Q, Wang K Y. The M/M/1 queue with single working vacation[J]. International Journal of Operational Research, 2009, 19(4): 621-634.
- [10] 刘维奇, 马庆庆, 李继红. N-策略工作休假 M/M/1 排队系统中的顾客行为研究[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(7): 1848-1856.
(Liu W Q, Ma Q Q, Li J H. Analysis of customer behaviors in M/M/1 queueing systems with N-policy and working vacation[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2016, 36(7): 1848-1856.)
- [11] 徐秀丽, 高红, 田乃硕. 对带启动时间和可变服务率的 M/M/1 休假排队的分析[J]. 应用数学学报, 2008, 31(4): 692-701.
(Xu X L, Gao H, Tian N S. Analysis of M/M/1 queue with set-up time and variable service time[J]. Applied Mathematics, 2008, 31(4): 692-701.)
- [12] 顾庆凤, 朱翼隽. 带启动期的 M/M/1/N 单重工作休假排队系统[J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2011, 34(2): 208-214.
(Gu Q F, Zhu Y J. M/M/1/N queueing system with single working vacations and start-up time[J]. Journal of Shangxi University: Nature Science Education, 2011, 34(2): 208-214.)
- [13] Jain M, Jain A. Working vacations queueing model with multiple types of server breakdowns[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(1): 1-13.
- [14] Jain M, Sharma G C, Sharma R. Working vacation queue with service interruption and multi-optional repair[J]. International Journal of Information and Management Sciences, 2011, 22(2): 157-175.
- [15] 贾礼君, 刘春平, 胡连华, 等. 工作休假的 M/M/1 可修排队的可靠性分析[J]. 山东理工大学学报: 自然科学版, 2012, 26(4): 48-52.
(Jia L J, Liu C P, Hu L H, et al. Reliability analysis of M/M/1 queueing system with repairable service station and multiple working vacations[J]. Journal of Shandong University of Technology: Nature Science Education, 2012, 26(4): 48-52.)
- [16] Yang D Y, Wu C H. Cost-minimization analysis of a working vacation queue with N-policy and server breakdowns[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 82: 151-158.
- [17] 田乃硕, 岳德权. 拟生灭过程与矩阵几何解[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 18-26.
(Tian N S, Yue D Q. Quasi - birth and death process and matrix geometric solution[M]. Beijing: Science Press, 2002: 18-26.)
- [18] Netus M F. Matrix-geometric solution in stochastic models[M]. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981: 81-132.
- [19] Elhafsi E H, Molle M. On the solution to QBD processes with finite state space[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2007, 25(4): 763-779.
- [20] Kemeny J G, Shell J L. Finite markov chains[M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 69-95.
- [21] Kemeny J G. Generalization of a fundamental matrix[J]. Linear Algebra and its Applications, 1981, 38: 193-206.
- [22] Howard R A. Dynamic probabilistic systems: Markov models[M]. New York: Dover Pubns, 2007: 189-240.

作者简介

黎锁平(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事随机控制与随机过程、随机制造系统等研究, E-mail: lsuop@163.com;

杨喜娟(1980—), 女, 讲师, 博士生, 从事随机控制及应用、智能制造系统的研究, E-mail: yangxj331@163.com;

彭铎(1976—), 男, 副教授, 博士, 从事无线通信理论与技术等研究, E-mail: 752739491@qq.com;

陈金淑(1976—), 女, 讲师, 博士, 从事随机分析与白噪声分析等研究, E-mail: 2640815695@qq.com.

(责任编辑: 孙艺红)