

## 四旋翼无人机轨迹稳定跟踪控制

李俊芳, 李峰<sup>†</sup>, 吉月辉, 高强

(天津理工大学 电气电子工程学院, 天津 300384)

**摘要:** 针对四旋翼无人机轨迹稳定跟踪控制问题, 为抑制外界扰动和参数不确定性的影响, 设计一种双环鲁棒控制系统. 首先, 基于动态面内模法设计输出调节器进行位置控制, 可解决系统的渐近跟踪及干扰抑制问题; 其次, 利用高阶滑模设计姿态控制器, 可实现全局有限时间收敛, 消除系统抖振和相对阶的限制; 再次, 为进一步提高控制精度, 采用一种鲁棒精确微分器对姿态角指令信号进行精确求导; 最后, 对系统稳定性进行严格的数学证明, 并与 PID 控制和传统滑模控制进行仿真对比, 结果验证了所提出控制策略的优越性和鲁棒性.

**关键词:** 四旋翼无人机; 输出调节; 动态面; 高阶滑模

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Trajectory stable tracking control of quadrotor UAV

LI Jun-fang, LI Feng<sup>†</sup>, JI Yue-hui, GAO Qiang

(School of Electrical and Electronic Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of stable tracking control of quadrotor trajectory, a double-loop robust control system is designed to suppress the influence of external disturbance and parameter uncertainty. Firstly, the output regulator is designed for position control based on the dynamic surface internal model method, which can solve the problems of asymptotic tracking and disturbance rejection. Then, the higher order sliding mode is used to design the attitude controller, which can realize the global finite-time convergence, eliminate the chattering and relative order limitation of the system. In order to further improve the control precision, a robust accurate differentiator is adopted to accurately differentiate the attitude angle command signal. Finally, the strict mathematical proof for the stability of the system is given, and compared with PID control and traditional sliding mode control, the simulation results verify the superiority and robustness of the proposed control strategy.

**Keywords:** quadrotor; output regulation; dynamic surface; higher order sliding mode

### 0 引言

近年来, 由于通信、嵌入式技术的快速发展, 四旋翼无人机作为一种新型的开发研究及应用平台, 引起了众多学者的广泛关注. 由于具有体积紧凑、机动灵活、可自主飞行等优势<sup>[1]</sup>, 四旋翼无人机已广泛应用于各个领域. 在应用方面, 四旋翼无人机可进入危险的复杂环境代替人类执行军事侦查、边境巡逻和灾害救援等任务, 可携带检测传感设备进行气象勘测、地形绘制、巡检防护等工作. 在研究领域, 作为一种研究平台, 可进行姿态检测、轨迹跟踪、智能控制等研究, 具有重要的研究价值. 然而, 由于四旋翼无人机的非线性、强耦合和欠驱动等特性, 使得位置轨迹跟踪控制系统的设计具有挑战性<sup>[2]</sup>.

目前, 针对四旋翼无人机的控制问题, 已提出一

系列不同的控制策略. 文献 [3-4] 分别提出线性 PID 算法和自适应 PID 算法, 通过仿真验证所设计控制策略在不同干扰情况下的有效性和稳定性. 但是线性控制方法难以保证系统全局稳定性, 处理系统耦合和不确定性干扰的能力有限, 难以满足复杂环境下的飞行控制要求.

为此, 众多学者寻求非线性控制算法实现对四旋翼无人机的控制. 文献 [5-6] 分别采用反步法和自适应设计四旋翼无人机控制律, 实现了位置及姿态的稳定跟踪控制. 但是, 所设计控制系统响应速度慢, 对外部扰动灵敏, 不能实现渐近跟踪和干扰抑制.

针对非线性系统的渐近跟踪及干扰抑制问题, 输出调节理论中的内模原理是一种行之有效的解决方法<sup>[7-11]</sup>. 其中文献 [8] 应用内模原理设计四旋翼无人

收稿日期: 2018-05-14; 修回日期: 2018-08-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61603274).

责任编辑: 易建强.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: FengL\_stu93@163.com.

机的姿态控制器,通过仿真和实验验证了姿态的渐近跟踪和干扰抑制。当被控系统存在未知参数时,文献[9]采用输出调节验证了航天器在干扰频率未知情况下的扰动抑制问题。文献[10]利用一类非线性内模解决非线性系统的全局鲁棒输出调节问题。

滑模控制(sliding mode control, SMC)因其鲁棒特性,对扰动不灵敏及可简化控制器设计等优点,逐渐成为非线性系统控制的热点方法。然而,滑模控制的不连续开关特性会引起系统的抖振,为了解决这一弊端,国内外学者做了大量探索,如采用边界层法、趋近律方法或结合模糊控制、神经网络等方法。其中边界层法只能保证系统状态收敛到以滑模面为中心的边界层内,且边界层的引入会导致稳态误差出现,降低系统鲁棒性;采用趋近律方法抑制抖振与参数调整相关,若参数调整不当,其抑制和削弱抖振效果不明显;结合智能控制方法对削弱系统抖振起到了一定作用,但设计过程复杂,已不是理论上理想的滑模控制器,而是被特殊控制器所替代的近似滑模控制器。为完全消除抖振现象,近年来提出了多种形式的高阶滑模(higher order sliding mode, HOSM)控制方法<sup>[12-20]</sup>,与上述方法不同之处在于:高阶滑模是从滑模控制的本质出发,将不连续控制输入应用于滑模面的高阶微分中,使得控制量是本质连续的,在很大程度上抑制抖振甚至消除抖振。

综合现有研究成果,本文以内模原理和高阶滑模控制为基础,引入动态面控制,设计四旋翼无人机双环控制系统,所提出的控制策略能够有效实现轨迹的渐近跟踪和干扰抑制,并实现全局有限时间收敛。本文的主要工作包括:1)采用基于动态面内模法(dynamic surface internal mode, DSIM)的输出调节器实现位置子系统的控制;2)采用高阶滑模对姿态进行控制,削弱系统抖振,实现有限时间收敛;3)采用一种鲁棒精确微分器,对姿态角指令信号进行更加精准的求导,提高控制精度。

## 1 四旋翼无人机动力学模型与分析

建立四旋翼无人机动力学模型,首先确定两个坐标系:惯性坐标系 $E(O_E X_E Y_E Z_E)$ 和机体坐标系 $B(O_B X_B Y_B Z_B)$ ,如图1所示。假设四旋翼无人机是刚体,可通过惯性坐标系与机体坐标系之间的关系描述其运动状态。

四旋翼无人机的4个控制输入为

$$\begin{cases} U_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4, \\ U_2 = (F_4 - F_2)l, \\ U_3 = (F_3 - F_1)l, \\ U_4 = (F_4 + F_2 - F_1 - F_3)l. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $l$ 为旋翼转子与无人机质心之间的距离; $F_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 为每个电机所产生的升力。

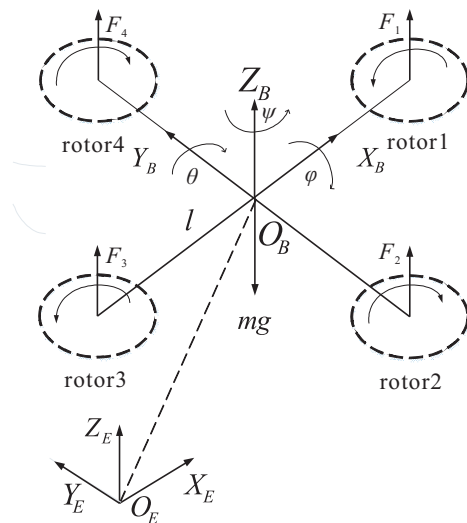


图1 惯性坐标系与机体坐标系结构示意图

利用牛顿-欧拉方程,四旋翼无人机动力学模型可分为位置动力学和姿态动力学两部分,即

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m}[U_1(\cos\varphi \sin\theta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi)] + d_x, \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m}[U_1(\cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi)] + d_y, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}[U_1 \cos\varphi \cos\theta - mg] + d_z; \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{I_x}[U_2 + (I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}], \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_y}[U_3 + (I_z - I_x)\dot{\varphi}\dot{\psi}], \\ \ddot{\psi} &= \frac{1}{I_z}[U_4 + (I_x - I_y)\dot{\varphi}\dot{\theta}]. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $\vartheta = [x, y, z]^T$ 为四旋翼无人机在惯性坐标系下的位置坐标; $\omega = [\varphi, \theta, \psi]^T$ 为四旋翼无人机的姿态角,即横滚角、俯仰角、偏航角; $I_x, I_y, I_z$ 分别为绕机体坐标系 $x, y, z$ 轴的转动惯量; $d_x, d_y, d_z$ 为扰动; $m$ 为无人机质量; $g$ 为重力加速度。

在动力学模型中, $U_1$ 被分配到 $x, y, z$ 三个方向的位移量中, $U_2, U_3, U_4$ 分别被分配到3个姿态角通道的输入量中,整个控制系统可以分解成由 $U_1$ 组成的位置控制和由 $U_2, U_3, U_4$ 组成的姿态控制。因此,将控制系统设计为双环控制回路,外环为位置回路设计,采用基于动态面内模法的输出调节器进行控制;内环为姿态控制回路,采用高阶滑模进行控制。

## 2 位置控制器设计

### 2.1 系统状态方程及外系统

四旋翼无人机位置动力学方程用系统状态方程表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u + d. \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $x_1 = [x, y, z]^T$ ,  $x_2 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ ,  $u = [u_x, u_y, u_z]^T$ .  $u_x$  和  $u_y$  为待设计的水平位置控制律,  $u_z$  为待设计的高度控制律.

系统的参考输入和扰动由以下外系统产生:

$$r(t) = R(\omega), \quad d(t) = D(\omega), \quad \dot{\omega} = S\omega. \quad (4)$$

其中:  $r(t)$  和  $d(t)$  分别为生成参考输入  $R(\omega)$  及扰动  $D(\omega)$  的外系统,  $\dot{\omega} = S\omega$  为生成外系统信号  $\omega$  的线性自治微分方程.

**假设1** 外系统是中性的稳定的, 即系统的平衡点  $\omega = 0$  是稳定平衡点,  $S\omega$  的所有特征根均在虚轴上.

## 2.2 位置系统内模设计

### 2.2.1 计算零误差不变流形

针对系统模型(3)和外系统(4), 存在一个全局定义的解  $x = \pi(\omega)$ ,  $u = \alpha(\omega)$  满足

$$\begin{aligned} \pi_1(\omega) &= R(\omega), \\ \pi_2(\omega) &= \dot{\pi}_1(\omega) - f_1 - \Delta f_1 - D_1(\omega), \\ \alpha(\omega) &= \dot{\pi}_2(\omega) - f_2 - \Delta f_2 - D_2(\omega). \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)表示状态空间中一个受控不变子流形, 在此流形上的调节误差恒为零.  $f_i$  为未知连续函数,  $\Delta f_i$  为包含未建模动态的不确定项,  $\alpha(\omega)$  为流形前馈项, 用于扰动抑制. 当此流形为受控不变的零误差流形时, 输出调节问题就转换为设计误差反馈控制律保证流形的吸引性问题.

定义状态变换  $\sigma = x - \pi(\omega)$ , 有

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = x_1 - \pi_1(\omega), \\ \dot{\sigma}_2 = x_2 - \pi_2(\omega), \end{cases} \quad (6)$$

则由式(3)和(5)可得如下系统:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \sigma_2, \\ \dot{\sigma}_2 = u - \alpha(\omega). \end{cases} \quad (7)$$

### 2.2.2 系统浸入与内模变换

由于用于扰动抑制的前馈项  $\alpha(\omega)$  不可量测, 需对此项进行重构, 作如下假设.

**假设2** 存在一个正整数  $q$  和一组实数  $a_0, a_1, \dots, a_{q-1}$ , 其多项式是 Hurwitz 的, 即

$$\begin{aligned} L_s^q \alpha(\omega) &= \\ a_0 \alpha(\omega) &+ a_1 L_s \alpha(\omega) + \dots + a_{q-1} L_s^{q-1} \alpha(\omega). \end{aligned} \quad (8)$$

在假设2的条件下, 外系统可浸入如下可观测系统:

$$\dot{\tau}(\omega) = \Phi \tau(\omega),$$

$$\alpha(\omega) = \Gamma \tau(\omega). \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= [\alpha(\omega), L_s \alpha(\omega), \dots, L_s^{q-1} \alpha(\omega)]^T, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & \dots & a_{q-1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

可见, 内模原理将前馈控制量浸入一个中性稳定系统中, 浸入过程与  $\alpha(\omega)$  的 Lie 导数满足的多项式有关, 因此对于被控对象受到的不确定性干扰具有鲁棒性.

基于线性观测器理论, 对于任意可控矩阵对  $(M, N)$ ,  $N \in \mathbf{R}^{q \times 1}$ ,  $M \in \mathbf{R}^{q \times q}$  为 Hurwitz 矩阵, 因为  $(\Phi, \Gamma)$  是可观测的, 故存在一个非奇异矩阵  $T$  满足以下 Sylvester 方程:

$$T\Phi - MT = N\Gamma. \quad (10)$$

令  $\phi = \Gamma T^{-1}$ ,  $\eta = T\tau$ , 利用确定性等价原则得到内模的标准参数化形式如下:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= (M + N\phi)\eta, \\ \alpha &= \phi\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

为补偿过程中不确定因素, 选取具有误差项的内模形式

$$\dot{\xi} = (M + N\phi)\xi + i(\cdot) \quad (12)$$

作为调节器的内模部分, 其中  $i(\cdot)$  为待设计误差函数. 因此, 位置控制系统的输出调节器设计转化为对增广系统进行镇定控制器设计, 有

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = u - \alpha(\omega), \quad \dot{\xi} = (M + N\phi)\xi + i(\cdot). \quad (13)$$

### 2.3 位置增广系统镇定控制器设计

本节对等效误差系统设计反馈控制律, 保证在原点的镇定性. 对于增广系统(13), 以纵向高度通道为例, 首先采用动态面设计控制器, 可以有效防止“计算爆炸”问题.

**step 1:** 设  $e_{z1} = \sigma_{z1} - \sigma_{z1d}$ , 取  $\sigma_{z1d} = 0$ . 选取关于  $e_{z1}$  的 Lyapunov 候选函数

$$V_{z1} = \frac{1}{2} e_{z1}^2, \quad (14)$$

则有

$$\dot{V}_{z1} = e_{z1} \dot{e}_{z1} = e_{z1} \dot{\sigma}_{z1} = e_{z1} \sigma_{z2}. \quad (15)$$

设计虚拟控制

$$\bar{\sigma}_{z2} = -k_{z1} e_{z1}, \quad (16)$$

其中  $k_{z1}$  为待设计的控制器参数.

将  $\bar{\sigma}_{z2}$  通过一阶滤波器,有

$$\dot{\sigma}_{z2d} = -\frac{1}{\tau}(\sigma_{z2d} - \bar{\sigma}_{z2}). \quad (17)$$

其中:  $\sigma_{z2d}(0) = \bar{\sigma}_{z2}(0)$ ,  $\tau > 0$  为待设计控制器参数.

定义  $e_{z2} = \sigma_{z2} - \sigma_{z2d}$ ,  $y_{z2} = \sigma_{z2d} - \bar{\sigma}_{z2}$ , 选取 Lyapunov 候选函数

$$V_{z2} = V_{z1} + \frac{1}{2}y_{z2}^2, \quad (18)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z2} &= e_{z1}\dot{\sigma}_{z1} + y_{z2}\dot{y}_{z2} = \\ &e_{z1}\sigma_{z2} - y_{z2}\dot{\sigma}_{z2} - y_{z2}^2/\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

类似文献[21],可以证明:假定  $\forall p > 0$ , 对一切  $V(0) \leq P$ , 存在正增益常数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  和有限正时间常数  $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_i$ , 使得

$$\dot{V}_{z2} \leq -2a_0V_{z2} + i\varepsilon, \quad 2 \leq i \leq n-1. \quad (20)$$

其中:  $a_0 > n\varepsilon/p, \varepsilon > 0$ .

step 2: 定义

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi - \eta - Ne_{z2}, \\ e_{z2} &= \sigma_{z2} - \sigma_{z2d}, \end{aligned} \quad (21)$$

则由式(11)和(12)得到

$$\dot{\zeta} = (M + N\phi)\xi + i(\cdot) - (M + N\phi)\eta - Ne_{z2}. \quad (22)$$

选取全局 Lyapunov 候选函数

$$V_z = V_{z2} + \frac{1}{2}e_{z2}^2 + \frac{1}{2}\zeta^T Q \zeta, \quad (23)$$

其中  $Q$  为正定矩阵, 满足  $M^T Q + QM = -2kI, k > 0$ , 则  $V_z$  对时间的导数满足下式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &\leq -2a_0V_{z2} + \varepsilon + e_{z2}\dot{e}_{z2} + \zeta^T Q \dot{\zeta} \leq \\ &-2a_0V_{z2} + \varepsilon + e_{z2}(u_z - \phi\eta - \dot{\sigma}_{z2d}) + \zeta^T Q \dot{\zeta}. \end{aligned} \quad (24)$$

选取  $i(\cdot) = -Nk_{z2}e_{z2} - (M + N\phi)Ne_{z2}$ , 内模设计为

$$\dot{\xi} = (M + N\phi)\xi - Nk_{z2}e_{z2} - (M + N\phi)Ne_{z2}. \quad (25)$$

由式(7)、(11)和(25)得到

$$\dot{\zeta} = (M + N\phi)\zeta - Nk_{z2}e_{z2} - N(u_z - \phi\eta - \dot{\sigma}_{z2d}). \quad (26)$$

设计纵向高度控制律为

$$u_z = \dot{\sigma}_{z2d} - k_{z2}e_{z2} + \phi\xi - \phi Ne_{z2}. \quad (27)$$

水平位置中  $x$  轴和  $y$  轴控制律的推导与  $z$  轴类似, 分别为

$$\begin{aligned} u_x &= \dot{\sigma}_{x2d} - k_{x2}e_{x2} + \phi\xi - \phi Ne_{x2}, \\ u_y &= \dot{\sigma}_{y2d} - k_{y2}e_{y2} + \phi\xi - \phi Ne_{y2}. \end{aligned} \quad (28)$$

由四旋翼位置动力学方程可推导出总推力  $U_1$ 、 $\phi_d$  和  $\theta_d$ , 分别为

$$U_1 = m\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + (u_z + g)^2}, \quad (29)$$

$$\phi_d = \arcsin\left(m\frac{u_x \sin \psi_d - u_y \cos \psi_d}{U_1}\right), \quad (30)$$

$$\theta_d = \arctan\left(\frac{u_x \cos \psi_d + u_y \sin \psi_d}{u_z + g}\right). \quad (31)$$

### 3 姿态控制器设计

在本节中,设计基于高阶滑模的姿态控制器,实现系统快速收敛,有效消除系统抖振,保证闭环系统的稳定性.

首先,定义姿态跟踪误差为  $e = [e_\varphi, e_\theta, e_\psi]^T$ , 其中

$$e_\varphi = \varphi - \varphi_d, \quad e_\theta = \theta - \theta_d, \quad e_\psi = \psi - \psi_d. \quad (32)$$

由于四旋翼无人机姿态系统相对阶为2,为实现有限时间收敛,消除系统抖振,选取高阶滑模控制器阶数为3阶.以滚转通道为例设计控制器,选取滑模面为

$$\varsigma = e_\varphi. \quad (33)$$

对滑模面进行二阶微分,有

$$\ddot{\varsigma} = \ddot{e}_\varphi = \ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_d. \quad (34)$$

根据四旋翼无人机姿态动力学方程,式(34)可转化为

$$\begin{aligned} \ddot{\varsigma} &= \frac{U_2 + (I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}}{I_x} - \ddot{\varphi}_d = \\ &\frac{(I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}}{I_x} + \frac{U_2}{I_x} - \ddot{\varphi}_d. \end{aligned} \quad (35)$$

将式(35)整理为如下形式:

$$\ddot{\varsigma} = \mathbf{A}_{\text{nom}} + \mathbf{B}_{\text{nom}}U_2 - \ddot{\varphi}_d. \quad (36)$$

其中:  $\mathbf{A}_{\text{nom}} = [(I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}]/I_x$ ,  $\mathbf{B}_{\text{nom}} = 1/I_x$ .

控制量  $U_2$  首次出现在滑模面的二阶微分中,然而,滑模面的阶数与系统相对阶相同,所以抖振现象并没有消除.

为消除系统抖振,对式(36)求导,可得

$$\begin{aligned} \ddot{\varsigma} &= \mathbf{A}_{\text{nom}} + \mathbf{B}_{\text{nom}}\dot{U}_2 - \ddot{\varphi}_d = \\ &\frac{I_y - I_z}{I_x}(\ddot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\theta}\ddot{\psi}) + \frac{1}{I_x}V_\varphi - \ddot{\varphi}_d, \end{aligned} \quad (37)$$

其中  $V_\varphi = \dot{U}_2$ .

由上可知,需要  $\varphi_d$  的高阶微分信息,由于其解析求导过程复杂,为此,在文献[17]基础上,本文采用如下鲁棒精确微分器:

$$Z_1 = \lambda_1|Z_0 - \varphi_d|^{\frac{2}{3}}\text{sgn}(Z_0 - \varphi_d) + \dot{\varphi}_d,$$

$$Z_2 = \lambda_2|\dot{\varphi}_d - Z_1|^{\frac{1}{2}}\text{sgn}(\dot{\varphi}_d - Z_1) + \ddot{\varphi}_d,$$

$$Z_3 = \lambda_3 \text{sgn}(\ddot{\varphi}_d - Z_2). \quad (38)$$

其中:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  为待选取参数,  $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3$  分别为  $\varphi_d, \dot{\varphi}_d, \ddot{\varphi}_d, \ddot{\varphi}_d$  的实时估计值.

选取局部变量  $\nu_1 \in \mathbf{R}, \nu_2 \in \mathbf{R}, \nu_3 \in \mathbf{R}$ , 则滑模方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \dot{\zeta} = \nu_2, \quad \dot{\nu}_2 = \dot{\zeta} = \nu_3, \\ \dot{\nu}_3 &= \ddot{\zeta} = \mathbf{A}_{\text{nom}} + \mathbf{B}_{\text{nom}} V_\varphi. \end{aligned} \quad (39)$$

则可得  $V_\varphi$  为

$$V_\varphi = \mathbf{B}_{\text{nom}}^{-1} (-\mathbf{A}_{\text{nom}} + \omega_{\text{nom}}). \quad (40)$$

其中  $\omega_{\text{nom}}$  为待设计的辅助控制输入, 可选为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} \omega_{\text{nom}} &= -\beta_1 |\nu_1|^{\alpha_1} \text{sgn}(\nu_1) - \beta_2 |\nu_2|^{\alpha_2} \text{sgn}(\nu_2) - \\ &\quad \beta_3 |\nu_3|^{\alpha_3} \text{sgn}(\nu_3). \end{aligned} \quad (41)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$  均大于0, 且要保证多项式  $\lambda^3 + \beta_3 \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \beta_1$  满足Hurwitz稳定性判据,  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  满足  $\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1} - \alpha_i}, i = 2, 3, \alpha_4 = 1$ .

为保证全局鲁棒性, 设计如下积分高阶滑模控制器, 选取积分滑模面为

$$S(t) = \nu_3(t) - \nu_3(t_0) - \int_{t_0}^t \omega_{\text{nom}}(\tau) d\tau, \quad (42)$$

其中  $\nu_3(t_0)$  为初始值.

在滑模面上, 满足  $S(t) = \dot{S}(t) = 0$ , 由此可得

$$\dot{\nu}_3(t) = \omega_{\text{nom}}. \quad (43)$$

根据式(37)、(40)和(42), 可得

$$V_\varphi = I_x \left[ \ddot{\varphi}_d - \frac{I_y - I_z}{I_x} (\ddot{\theta}\psi + \dot{\theta}\dot{\psi}) + \dot{\nu}_3 \right], \quad (44)$$

同理

$$\begin{aligned} V_\theta &= I_y \left[ \ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{I_y} (\ddot{\varphi}\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi}) + \dot{\nu}_3 \right], \\ V_\psi &= I_z \left[ \ddot{\psi}_d - \frac{I_x - I_y}{I_z} (\ddot{\varphi}\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}) + \dot{\nu}_3 \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

## 4 稳定性分析

为方便分析, 引入下列引理, 其证明参见文献[17, 22].

**引理1**<sup>[22]</sup> 对被控系统(3)和外系统(4), 在假设1和假设2满足的前提下, 存在式(17)、(25)、(26)解决非线性系统的输出调节问题, 并使闭环系统的信号全局最终有界, 调节误差渐近趋于零.

**引理2**<sup>[17]</sup> 对于系统(39), 控制律(40)可以保证系统在有限时间内到达滑动模态.

**定理1** 在滑模上, 若控制律(40)应用于系统(39), 则状态变量  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  可在有限时间内收敛至0.

**证明** 定义Lyapunov方程

$$V_1 = \frac{1}{2} S^T S, \quad (46)$$

根据式(41)、(42)和(46), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= S^T \dot{S} = S^T (\dot{\nu}_3(t) - \dot{\nu}_3(t_0) - \omega_{\text{nom}}) = \\ &\quad - S^T \dot{\nu}_3(t_0) \leq 0, \end{aligned} \quad (47)$$

故所设计控制器可以在时保证系统各状态变量运动在滑模面上.

令  $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$ , 使得  $S^n + k_n S^{n-1} + \dots + k_2 S + k_1$  为Hurwitz多项式, 考虑如下系统<sup>[22]</sup>:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = u. \quad (48)$$

对于系统(48), 存在  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 对  $\forall \alpha \in (1 - \varepsilon, 1)$ , 反馈  $u = \chi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = -k_1 \text{sign} x_1 |x_1|^{\alpha_1} - \dots - k_n \text{sign} x_n |x_n|^{\alpha_n}$  是全局有限时间稳定的, 其中  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  满足  $\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1} - \alpha_i}, i = 2, \dots, n, \alpha_n = \alpha, \alpha_n = 1$ .

在滑模面上,  $S = \dot{S} = 0$ , 由  $\dot{S} = 0$  可使得  $\dot{\nu}_3(t) = \omega_{\text{nom}}$ , 因此由式(39)和(43)可得

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_2, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_3, \\ \dot{\nu}_3 &= -\beta_1 |\nu_1|^{\alpha_1} \text{sgn}(\nu_1) - \beta_2 |\nu_2|^{\alpha_2} \text{sgn}(\nu_2) - \\ &\quad \beta_3 |\nu_3|^{\alpha_3} \text{sgn}(\nu_3); \end{aligned} \quad (49)$$

并由式(41)中  $\omega_{\text{nom}}$  所满足的条件可得证系统(49)的有限时间稳定性.  $\square$

## 5 仿真结果及分析

本节将采用Matlab/Simulink仿真验证本文所提出控制策略的有效性和鲁棒性. 仿真对象采用ASC TEC公司生产的Hummingbird drones, 无人机参数及控制器参数如下:

$$\begin{aligned} m &= 0.25 \text{ kg}, \quad l = 0.2 \text{ m}, \quad I_x = I_y = 0.0033 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_z &= 0.0058 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad k_1 = 4, \quad k_2 = 10, \quad \tau = 0.1, \\ \lambda_1 &= -3, \quad \lambda_2 = -1.5, \quad \lambda_3 = -1.1, \quad \alpha_3 = 3/5. \end{aligned}$$

外系统为

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_1, \quad (50)$$

则外系统可浸入如下可观测线性系统:

$$\dot{\tau}(\omega) = \Phi \tau(\omega), \quad (51)$$

其中  $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ . 选取  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

由式(10)得  $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}^T$ .

由式(25)可得设计内模为

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 - e_2, \quad \dot{\xi}_2 = -k_1 \xi_1 - k_2 e_2, \quad (52)$$

其中  $e_2 = x_2 - \dot{\vartheta}_d - \sigma_{2d}$ .

由式(16)和(17)可设计滤波器为

$$\dot{\sigma}_{2d} = -\frac{1}{\tau}(\sigma_{2d} - \bar{\sigma}_2) = -\frac{1}{\tau}(\sigma_{2d} + k_1\sigma_1), \quad (53)$$

其中  $\sigma_1 = \vartheta - \vartheta_d$ .

本文进行3组仿真,仿真1是在无任何干扰存在的情况下,分别与双环PID控制系统(PID+PID)和双环滑模控制系统(SMC+SMC)进行轨迹跟踪性能对比,验证本文所设计控制策略(DSIM+HOSM)的优越性;在仿真2和仿真3中分别对以上3种控制系统的位置环加入小幅值正弦波干扰信号和随机白噪声,验证本文所设计控制系统的鲁棒性.

四旋翼无人机从惯性坐标系原点  $(x_E, y_E, z_E) = (0, 0, 0)$  沿由外系统所产生期望轨迹  $[x_d, y_d, z_d, \psi_d] = [3 \sin t, 3 \sin t, 3 \sin t, \sin t]$  飞行,横滚角  $\varphi$  和俯仰角  $\theta$  最终收敛到0,实现姿态平稳,达到稳定跟踪期望轨迹的目的.

**仿真1** 轨迹跟踪控制性能对比.

在无任何干扰存在的情况下,位置和偏航角轨迹跟踪仿真对比结果如图2所示.

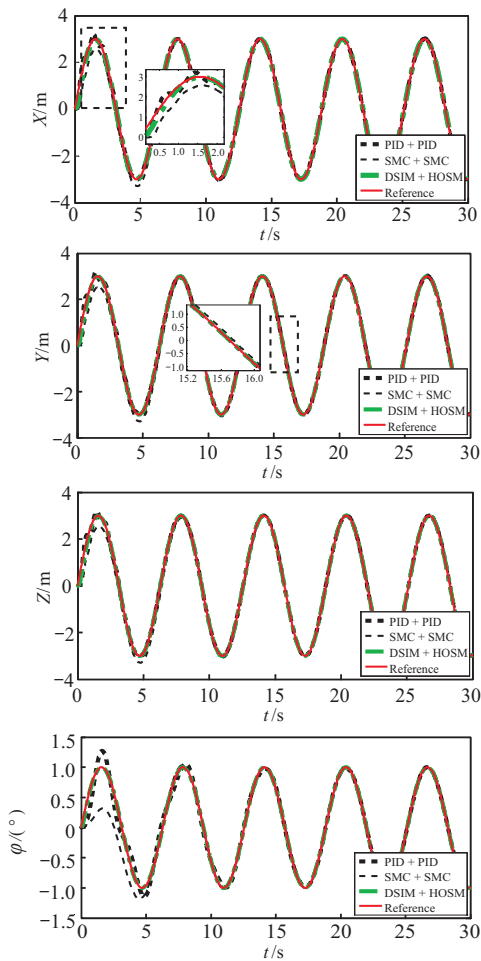


图2  $x, y, z, \psi$  跟踪仿真对比结果

图2表明,在无干扰存在的情况下,本文所设计控制系统可分别使位置轨迹  $X, Y, Z$  和偏航角  $\psi$  在1.5s和2s左右到达并稳定在参考值,实现对轨迹

的快速无误差跟踪;用PID算法所设计的控制器使位置和偏航角分别在4s和6s时跟踪至参考值,且均出现超调现象,位置最大超调量为0.1m,偏航角最大超调量为 $0.3^\circ$ ;利用传统滑模算法所设计的控制器在大约13s时可使位置跟踪至参考轨迹,大约9s时偏航角  $\psi$  跟踪上  $\psi_d$ ,且位置和偏航角的跟踪误差较大,位置跟踪误差范围在0.25m之内,偏航角最大跟踪误差为 $0.7^\circ$ .由跟踪快速性和跟踪误差两方面表明,本文所设计的无人机控制系统位置及姿态跟踪响应快速,可以在无人机控制过程中实现对期望轨迹快速且稳定的跟踪.

图3给出了3种控制策略下横滚角  $\varphi$  及俯仰角  $\theta$  在四旋翼无人机轨迹跟踪过程中的变化曲线.结果显示,利用PID控制和普通滑模控制所产生的横滚角和俯仰角在四旋翼起飞时变化较大,在轨迹跟踪过程中逐渐收敛至0,分别在4s和2.5s左右实现姿态平稳;而利用本文所设计控制策略产生的横滚角和俯仰角可在1s之内无波动渐近收敛至0,实现姿态快速平稳,达到稳定跟踪期望轨迹的目的.

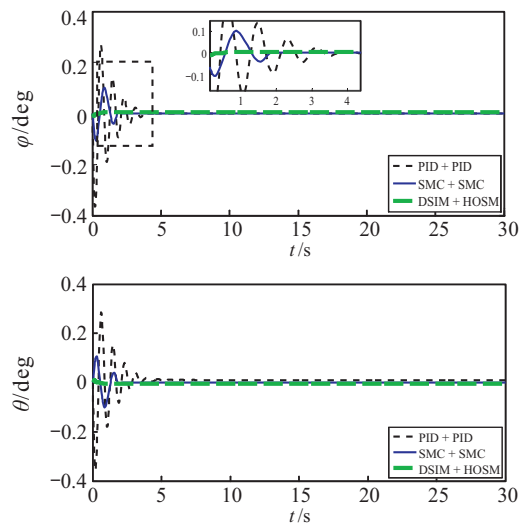


图3 横滚角  $\varphi$  和俯仰角  $\theta$  仿真对比结果

图4为本文所设计控制策略的  $U_2, U_3, U_4$  仿真结果.由图4可知,  $U_2$  的变化曲线较为平和,在  $\pm 0.004$  N·m 范围内平缓波动,抖振频率明显降低,而  $U_3$  和  $U_4$  则完全消除抖振现象,收敛至0.结果表明,高阶滑模

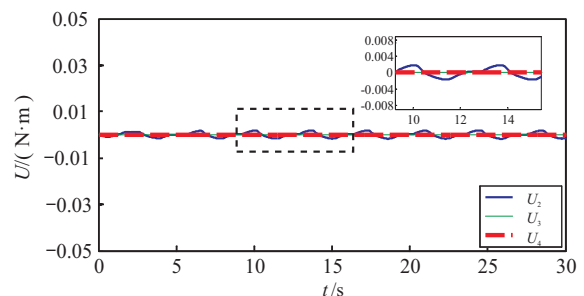


图4 控制量仿真结果

控制方法可有效削弱甚至抑制系统的抖振现象。

**仿真2** 正弦波信号干扰下的轨迹跟踪对比。

在仿真2中,对3种控制系统各位置通道加入相同的正弦波干扰信号,分别为 $d_x = d_y = d_z = 0.5 \sin t$ ,其仿真对比结果如图5所示。结果表明,在相同正弦波信号扰动存在的条件下,不同控制策略下的轨迹跟踪效果不同,无人机各位置状态变量均出现一定的跟踪误差,但利用本文所设计控制策略仍可实现对期望轨迹的渐近稳定跟踪,最大误差范围在0.2m之内,对轨迹的跟踪效果和抗扰能力明显优于PID控制和普通滑模控制,所设计控制器可有效实现干扰抑制,具有一定的鲁棒性。

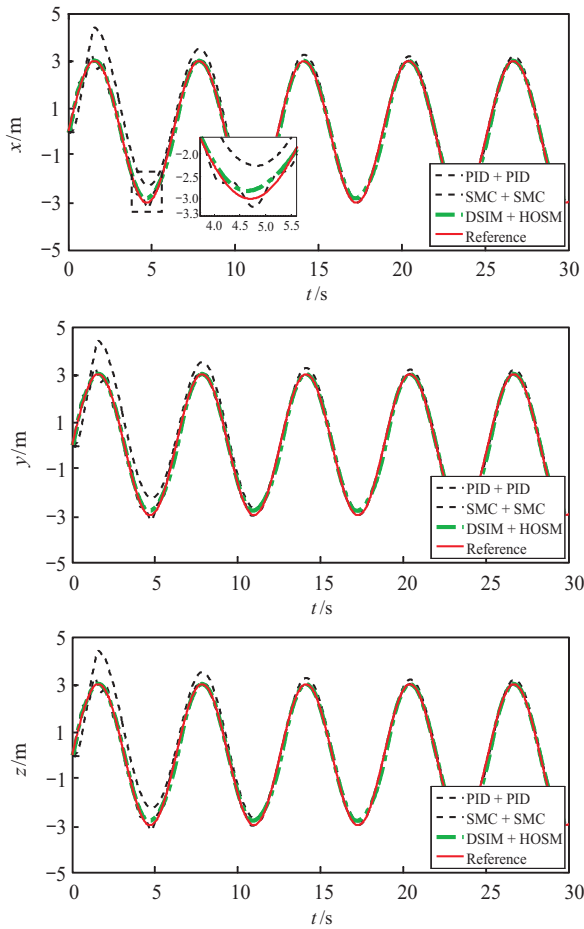


图5 正弦波干扰下轨迹跟踪仿真对比结果

**仿真3** 白噪声干扰下的轨迹跟踪对比。

在仿真3中,对3种控制系统各位置通道加入噪声功率为0.1dB、采样时间为4s的白噪声干扰,进一步验证本文所设计控制器的鲁棒性。其仿真对比结果如图6所示。

由图6可知,当无人机受到持续的白噪声干扰后,本文所设计控制器的各位置变量仅在大约5s和8s时出现较大的跟踪误差,此后误差明显减小并收敛至参考值,实现扰动抑制和对期望轨迹的渐近稳定跟踪;而PID控制和普通滑模控制则对持续干扰的抑制

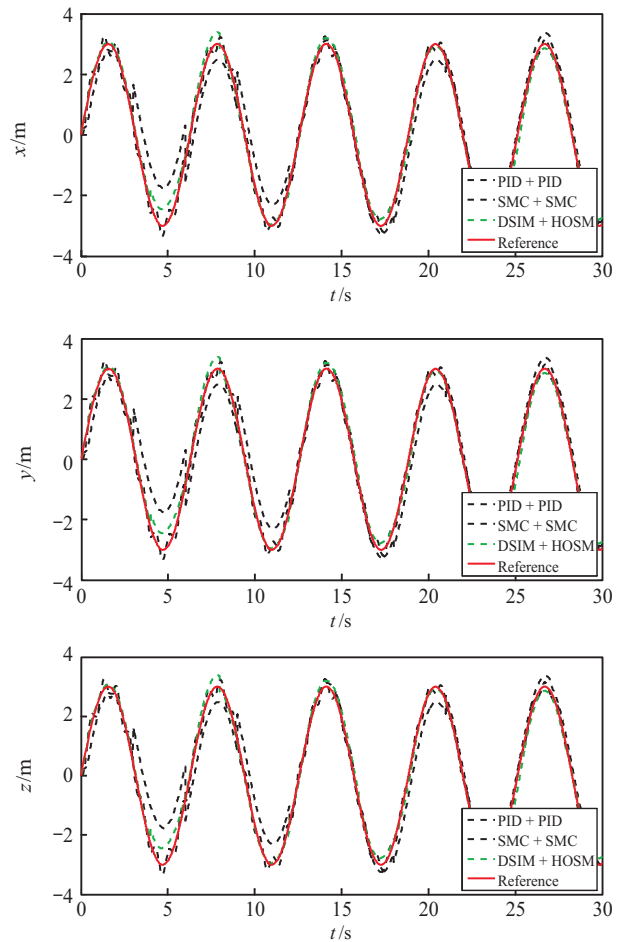


图6 白噪声干扰下轨迹跟踪仿真对比结果

能力较弱,轨迹跟踪过程中误差较大且未能消除。仿真结果表明,当无人机受到较大的外界干扰后,本文所设计控制系统仍能进行有效的干扰抑制,减弱跟踪误差直至输出值收敛至参考值,进一步验证了本文所设计控制系统的鲁棒性和优越性。

**6 结论**

本文针对六自由度四旋翼无人机,提出了一种双环控制系统。首先采用基于动态面内模法的输出调节器对无人机进行位置控制,实现了位置跟踪响应速度快,达到渐近干扰抑制,保证飞行器渐近跟踪期望轨迹的目的。其次,姿态控制采用积分高阶滑模控制方法,可有效消除系统抖振,实现各状态变量有限时间收敛。对系统稳定性进行了严格的数学证明,通过与PID控制和普通滑模控制进行Matlab/Simulink仿真对比,验证了本文所设计控制系统在四旋翼无人机轨迹跟踪控制中的有效性和鲁棒性。

**参考文献(References)**

[1] Dong W, Gu G Y, Zhu X Y, et al. Modeling and control of a quadrotor UAV with aero-dynamic concepts[J]. International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronics and Manufacturing

- Engineering, 2013, 7(5): 901-906.
- [2] Chen F Y, Jiang R Q, Zhang K K, et al. Robust backstepping sliding-mode control and observer-based fault estimation for a quadrotor UAV[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(8): 5044-5056.
- [3] Zuo Z Y. Trajectory tracking control design with command-filtered compensation for a quadrotor[J]. IET Control Theory and Application, 2010, 4(11): 2343-2355.
- [4] Pounds P E I, Bersak D R, Dollar A M. Stability of small-scale UAV helicopters and quadrotor with added payload mass under PID control[J]. Autonomous Robots, 2012, 33(1/2): 129-142.
- [5] Das A, Lewis F, Subbarao K. Backstepping approach for controlling a quadrotor using Lagrange form dynamics[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2009, 56(1/2): 127-151.
- [6] Dydek Z T, Annaswamy A M, Lavretsky E. Adaptive control of quadrotor UAVs: A design trade study with flight evaluations[J]. IEEE Transaction on Control Systems Technology, 2013, 21(4): 1400-1406.
- [7] Lu M B, Huang J. A class of nonlinear internal models for global robust output regulation problem[J]. International Journal of Robust Nonlinear Control, 2015, 25(12): 1831-1843.
- [8] Qiang Gao, Mei Du, Yuehui Ji. The controller design of quadrotor UAV based on internal mode control[C]. The 36th Chinese Control Conference. Dalian, 2017: 505-510.
- [9] Chen Z Y, Huang J. Attitude tracking of rigid spacecraft subject to disturbances of unknown frequencies[J]. International Journal of Robust Nonlinear Control, 2014, 24(16): 2231-2242.
- [10] Xi Z R, Ding Z J. Global adaptive output regulation of a class of nonlinear systems with nonlinear exosystems[J]. Automatica, 2007, 43(1): 143-149.
- [11] Xi Y, Huang J. Output regulation of time-varying nonlinear systems[C]. The 29th Chinese Control Conference. Beijing: IEEE, 2010: 5833-5838.
- [12] 马克茂. 大型空间飞行器的高阶滑模姿态控制律设计[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 201-204.  
(Ma K M. Design of higher order sliding mode attitude control laws for large-scale spacecraft[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 201-204.)
- [13] 王亮, 刘向东, 盛永智. 基于高阶滑模观测器的自适应时变滑模再入姿态控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 281-286.  
(Wang L, Liu X D, Sheng Y Z. High-order sliding mode observer based adaptive time-varying sliding mode for re-entry attitude control[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 281-286.)
- [14] 何大阔, 高飞雪, 杨乐, 等. 一类未知MIMO非线性离散系统的改进自适应准滑模解耦控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 783-789.)  
(He D K, GAO F X, Yang L, et al. Improved adaptive quasi-sliding mode decoupling control for a class of unknown MIMO nonlinear discrete-time systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 783-789.)
- [15] 赵占山, 张静, 孙连坤, 等. 一类非线性不确定系统高阶滑模自适应控制设计[J]. 控制与决策, 2011, 26(8): 1277-1280.  
(Zhao Z S, Zhang J, Sun L K, et al. Higher order sliding mode control with self-tuning law for a class of uncertain nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(8): 1277-1280.)
- [16] 范金锁, 张合新, 王桂明, 等. 一种高阶滑模控制算法的改进及应用[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1436-1440.  
(Fan J S, Zhang H X, Wang G M, et al. Improvement of higher order sliding mode control and its application[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1436-1440.)
- [17] Pyare Mohan Tiwari, Janardhanan S, Mashuq un Nabi. Attitude control using higher order sliding mode[J]. Aerospace Science and Technology, 2016, 54: 108-113.
- [18] Pyare Mohan Tiwari, Janardhanan S, Mashuq un Nabi. Rigid spacecraft attitude control using adaptive integral second order sliding mode[J]. Aerospace Science and Technology, 2015, 42: 50-57.
- [19] Lu K F, Xia Y Q. Finite-time attitude stabilization for rigid spacecraft[J]. International Journal of Robust Nonlinear Control, 2015, 25(1): 32-51.
- [20] Ma K M. Comments on: Quasi-continuous higher order sliding-mode controllers for spacecraft attitude tracking maneuvers[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(7): 2771-2773.
- [21] Swaroop D, Hedrick J K, Yie, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [22] 孟桂芝, 马克茂. 一类不确定非线性系统的动态面输出调节方法[J]. 电机与控制学报, 2011, 15(5): 103-108.  
(Meng G Z, Ma K M. Dynamic surface output regulation method for a class of uncertain nonlinear systems[J]. Electric Machines and Control, 2011, 15(5): 103-108.)

### 作者简介

李俊芳(1974—), 女, 副教授, 博士, 从事非线性系统建模与控制、无人飞行器稳定跟踪控制等研究, E-mail: wendljf@sina.com;

李峰(1993—), 男, 硕士生, 从事四旋翼飞行器轨迹跟踪控制的研究, E-mail: FengL\_stu93@163.com;

吉月辉(1987x—), 女, 讲师, 博士, 从事非线性自适应控制理论、无人飞行器稳定控制等研究. E-mail: jiyuehuitju@163.com;

高强(1968—), 男, 教授, 博士, 从事非线性系统建模与控制、故障诊断等研究, E-mail: gaoqiang@tjut.edu.cn.

(责任编辑: 孙艺红)