

基于轨迹规划的平面三连杆欠驱动机械臂位置控制

黄自鑫, 赖旭芝[†], 王亚午, 吴 敏

(1. 中国地质大学(武汉)自动化学院, 武汉 430074; 2. 复杂系统
先进控制与智能自动化湖北省重点实验室, 武汉 430074)

摘 要: 针对中间关节为欠驱动的二阶非完整平面三连杆机械臂, 提出一种基于轨迹规划的末端点位置控制策略. 首先, 建立系统的动力学模型, 并根据几何关系利用差分进化算法求取所有连杆与目标位置相对应的目标角度; 然后, 根据驱动关节与欠驱动关节的耦合关系, 采用时间缩放法和双向法分别规划两根驱动连杆的两条轨迹, 并利用遗传算法优化合适的第 1 连杆中间位置, 将两条轨迹拼接成一条完整可达轨迹; 最后, 设计滑模变结构控制器以跟踪完整可达轨迹, 实现系统从初始位置到目标位置的控制目标. 数值仿真结果表明了所提出控制策略的有效性.

关键词: 平面三连杆欠驱动机械臂; 轨迹规划; 位置控制; 差分进化算法; 遗传算法

中图分类号: TP24

文献标志码: A

Position control of planar three-link underactuated manipulator based on trajectory planning

HUANG Zi-xin, LAI Xu-zhi[†], WANG Ya-wu, WU Min

(1. School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China; 2. Hubei Key Laboratory of Advanced Control and Intelligent Automation for Complex Systems, Wuhan 430074, China)

Abstract: This paper presents a position control strategy of the end-point based on the trajectory planning for a second-order nonholonomic planar three-link underactuated manipulator with a passive middle joint. Firstly, the dynamics model is built, and according to the geometry relationship, a differential evolution algorithm is used to calculate all link target angles corresponding to the target position. Then, according to the couple relationship between the active joint and passive joint, the time scaling method and bidirectional method are used to plan two trajectories of the two active links, respectively. And we connect the two trajectories to be a whole admissible trajectory based on the genetic algorithm by optimizing the suitable middle angle of the first link. Finally, we design a sliding mode variable structure controller to track the whole admissible trajectory, which can achieve the control objective of the system from an initial position to a target position. Numerical simulation results show the effectiveness of the proposed control strategy.

Keywords: planar three-link underactuated manipulator; trajectory planning; position control; differential evolution algorithm; genetic algorithm

0 引 言

欠驱动连杆机械系统是一类驱动关节个数少于系统自由度个数的非线性系统^[1-2]. 相对于全驱动机械系统, 欠驱动机械系统具有低能耗、质量轻等优势. 此外, 当全驱动机械系统驱动器损坏时, 可以运用欠驱动系统控制方法对其控制^[3]. 研究平面欠驱动机械臂控制问题, 可以进一步推动欠驱动系统理论研究, 促进非线性系统控制理论的发展.

平面欠驱动机械臂系统是一类不含重力作用

在水平面运动的系统, 可达区域内的任意一点都是平衡点, 但该类系统在平衡点的线性近似模型不可控^[4]. 根据积分条件^[5], 平面欠驱动机械臂可分为 3 类^[6]: 完整系统^[7]、一阶非完整系统^[8]、二阶非完整系统^[9].

针对平面两连杆欠驱动机械臂, 第 1 关节为欠驱动的平面 Acrobot, 具有完全可积分特性, 为完整系统, 文献[10]提出了一种基于运动状态约束的稳定控制方法, 文献[11]提出了一种基于可变设计参数的快速

收稿日期: 2018-06-07; 修回日期: 2018-09-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773353); 湖北省自然科学基金创新群体项目(2015CFA010); 高等学校学科创新引智计划项目(B17040).

责任编辑: 吴立刚.

[†]通讯作者. E-mail: laixz@cug.edu.cn.

位置控制方法;第2关节为欠驱动的平面Pendubot,为二阶非完整系统,文献[12]基于系统的幂零近似模型,提出了一种周期性开环迭代的稳定控制方法,文献[13]基于庞加莱映射分析,提出了一种基于平均法的稳定控制方法.

根据欠驱动关节位置,平面三连杆欠驱动机械臂系统含有3类:第1关节为欠驱动的平面PAA (passive-active-active)系统,是一阶非完整系统;中间关节为欠驱动的平面APA (active-passive-active)系统,是二阶非完整系统;末关节为欠驱动的平面AAP (active-active-passive)系统,也是二阶非完整系统.文献[14]分析了这3类系统的可控性:平面APA系统和平面AAP系统满足小时域局部可控性 (small-time local controllability, STLC)^[15]判定条件,而平面PAA系统不满足STLC判定条件.平面PAA系统是一阶非完整系统,文献[16]提出一种基于模型降阶的位置控制方法,将原系统分段降阶为两个完全可积的平面Acrobot系统,并依据平面Acrobot系统的状态约束关系进行有效控制.平面AAP系统是二阶非完整系统,文献[9]将系统转换为链式规范型,设计控制器进行稳定控制.针对平面APA系统,文献[17]通过在欠驱动关节安装制动装置对系统进行控制,然而,对于欠驱动关节处于完全自由状态下的平面APA系统,其控制问题仍然是一个开放性的问题^[18].

基于以上分析,本文针对中间关节为欠驱动的平面三连杆机械臂系统(平面APA系统),提出一种基于轨迹规划的位置控制策略.首先,基于欧拉-拉格朗日法建立系统的动力学模型,并根据几何关系利用差分进化算法获得连杆与目标位置相对应的目标角度.然后,基于驱动连杆与欠驱动连杆的耦合关系,将平面APA系统的位置控制问题转换为轨迹规划问题.采用时间缩放和双向法规划两根驱动连杆的两条轨迹,连带规划系统末端点的运动轨迹.第1条轨迹,系统从初始位置到达中间位置;第2条轨迹,系统从目标位置到达中间位置.轨迹规划过程中,驱动连杆从运动到静止时,欠驱动连杆仍会匀速运动,因此,拼接两条轨迹的关键在于两次轨迹规划后欠驱动连杆的角度相等和角速度方向相同.本文选择遗传算法优化第1连杆合适的中间位置,将两条轨迹拼接成一条完整可达轨迹,无需欠驱动连杆自由转动调整过程,缩短控制时间.最后,设计滑模变结构控制器跟踪完整可达轨迹,从而实现系统的控制目标.数值仿真结果验证了所提出控制策略的有效性.

1 系统建模与分析

平面APA系统模型结构如图1所示, m_i 为第*i*杆的质量, L_i 为*i*杆的长度, L_{ci} 为*i*杆的质心到前一关节的长度, J_i 为*i*杆的转动惯量.

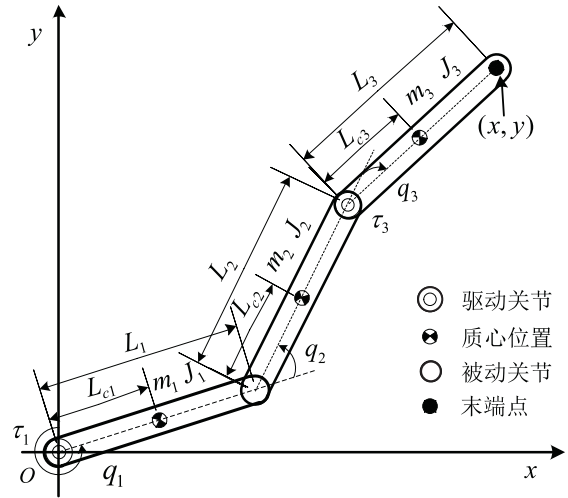


图1 平面APA系统模型

根据欧拉-拉格朗日法建立系统的动力学方程为

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \tau. \tag{1}$$

其中: $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ 是系统的角度向量; $\tau = [\tau_1, 0, \tau_3]^T$ 是控制力矩向量; $M(q) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 是惯性矩阵,具有正定性和对称性; $H(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 是哥式力和离心力的结合向量. $M(q)$ 和 $H(q, \dot{q})$ 的具体形式如下:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

$$\begin{cases} M_{11} = a_1 + a_2 + a_4 + 2a_3 \cos q_2 + \\ \quad 2a_5 \cos(q_2 + q_3) + 2a_6 \cos q_3, \\ M_{12} = a_2 + a_4 + a_3 \cos q_2 + \\ \quad a_5 \cos(q_2 + q_3) + 2a_6 \cos q_3, \\ M_{13} = a_4 + a_5 \cos(q_2 + q_3) + a_6 \cos q_3, \\ M_{21} = M_{12}, \\ M_{22} = a_2 + a_4 + 2a_6 \cos q_3, \\ M_{23} = a_4 + a_6 \cos q_3, \\ M_{31} = M_{13}, \\ M_{32} = M_{23}, \\ M_{33} = a_4. \end{cases} \tag{3}$$

其中: $a_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 是系统的结构参数,有

$$\begin{cases} a_1 = m_1 L_{c1}^2 + J_1 + (m_2 + m_3) L_1^2, \\ a_2 = J_2 + m_2 L_{c2}^2 + m_3 L_2^2, \\ a_3 = (m_2 L_{c2} + m_3 L_2) L_1, \\ a_4 = J_3 + m_3 L_{c3}^2, \\ a_5 = m_3 L_{c3} L_1, \\ a_6 = m_3 L_{c3} L_2. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} H_1 = -a_3(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 - \\ \quad a_5(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) - \\ \quad a_6(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3, \\ H_2 = a_3\dot{q}_1^2 \sin q_2 + a_5\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) - \\ \quad a_6(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3, \\ H_3 = a_5\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) + a_6(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin q_3. \end{cases} \quad (5)$$

2 目标角度求解

如图1所示, (x, y) 为系统末端点位置坐标, 根据几何关系可得系统末端点坐标与各连杆角度之间的约束关系为

$$\begin{cases} x = -\sin q_1 L_1 - \sin q_{12} L_2 - \sin q_{123} L_3, \\ y = \cos q_1 L_1 + \cos q_{12} L_2 + \cos q_{123} L_3. \end{cases} \quad (6)$$

其中: $q_{12} = q_1 + q_2$, $q_{123} = q_1 + q_2 + q_3$.

鉴于平面APA系统具有冗余度, 同一目标位置对应的各杆目标角度存在多解性, 因此, 根据平面APA系统的位置控制目标, 用差分进化算法^[19]求解系统目标角度. 目标函数定义为

$$h_1 = |x - x_d| + |y - y_d|, \quad (7)$$

其中 (x_d, y_d) 为系统末端点的目标位置.

求解目标角度的算法步骤如下:

step 1: 随机初始化生成初始种群, 假设系统各连杆的目标角度为 \tilde{q}_{1d} 、 \tilde{q}_{2d} 和 \tilde{q}_{3d} .

step 2: 根据式(6)以及 \tilde{q}_{1d} 、 \tilde{q}_{2d} 和 \tilde{q}_{3d} 分别计算 x 和 y , 并代入式(7), 计算适应度函数 h_1 .

step 3: 当 $h_1 \leq \eta_1$, η_1 为很小的整数时, 可得各连杆的目标角度分别为 $q_{1d} = \tilde{q}_{1d}$, $q_{2d} = \tilde{q}_{2d}$, $q_{3d} = \tilde{q}_{3d}$; 否则, 执行下一步.

step 4: 经过变异、交叉和选择操作更新 \tilde{q}_{1d} 、 \tilde{q}_{2d} 和 \tilde{q}_{3d} , 转到 step 2.

3 轨迹规划

本节将平面APA系统末端点的位置控制问题转化为轨迹规划问题, 即直接规划驱动连杆转动轨迹, 间接规划一条可使系统末端点从初始位置到达目标

位置的可达轨迹. 采用时间缩放法^[20]进行双向轨迹规划^[21], 引入两个时间缩放因子, 并分别从初始位置到中间位置, 目标位置到中间位置进行双向轨迹规划. 通过驱动关节的两次旋转, 使得驱动连杆和欠驱动连杆都到达期望角度, 从而使两条轨迹拼接为一条可达的完整轨迹. 拼接这两条轨迹的关键在于两次轨迹规划后欠驱动连杆的角度相等和角速度方向相同, 利用遗传算法优化第1连杆合适的中间位置拼接两条轨迹, 无需欠驱动连杆自由转动调整过程, 缩短控制时间.

3.1 时间缩放

根据系统的目标位置规划驱动连杆的轨迹, 利用欠驱动连杆跟随驱动连杆运动的动力学耦合特征, 间接得到第2连杆的运动轨迹, 实现驱动连杆对被动连杆的连带控制.

设第1、第3驱动连杆的轨迹分别为

$$q_1 = \phi_1(kt), \quad q_3 = \phi_2(kt), \quad (8)$$

其中 $\phi_1(kt)$ 、 $\phi_2(kt)$ 为可以两次微分的函数.

令 $\lambda = kt$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $0 \leq t \leq 1/k$. 于是可以得到 \dot{q}_1 、 \ddot{q}_1 、 \dot{q}_3 和 \ddot{q}_3 分别与 k 的关系

$$\dot{q}_1 = k \frac{dq_1}{d\lambda}, \quad \ddot{q}_1 = k^2 \frac{d^2q_1}{d\lambda^2}, \quad \dot{q}_3 = k \frac{dq_3}{d\lambda}, \quad \ddot{q}_3 = k^2 \frac{d^2q_3}{d\lambda^2}. \quad (9)$$

其中: t 为真实时间; λ 为无因次时间, 单位为1; k 为时间缩放因子.

由式(8)和(9)分析可得, 驱动连杆的角度不受缩放因子 k 的影响, 角速度和角加速度均受缩放因子 k 的影响. 当角度相同但 k 不同时, 角速度和角加速度将不同.

根据式(1)可得欠驱动连杆的加速度方程为

$$\ddot{q}_2 = -M_{22}^{-1}(M_{21}\ddot{q}_1 + M_{23}\ddot{q}_3 + H_2). \quad (10)$$

将式(9)代入(10), 可得

$$\frac{d^2q_2}{d\lambda^2} = -M_{22}^{-1} \left\{ M_{21} \frac{d^2q_1}{d\lambda^2} + M_{23} \frac{d^2q_3}{d\lambda^2} + H_2 \frac{dq_i}{d\lambda} \right\}. \quad (11)$$

式(11)表明, 欠驱动连杆状态可以由第1、第3连杆表示.

3.2 双向轨迹规划

系统的初始角度和目标角度分别为 $[q_{10}, q_{20}, q_{30}]$ 和 $[q_{1d}, q_{2d}, q_{3d}]$, 第1驱动连杆的中间位置为 q_{1m} . 根据上述分析, 采用双向法规划两条轨迹. 第1条轨迹 ϕ_F : 系统从初始位置到中间位置, 第1驱动连杆从 q_{10} 到 q_{1m} , 第3驱动连杆从 q_{30} 到 q_{3d} . 第2条轨迹 ϕ_R : 系统从目标位置到中间位置, 第1驱动连杆从 q_{1d}

到 q_{1m} , 第3驱动连杆保持 q_{3d} 不变. 这两条轨迹需要满足以下边界条件:

$$\begin{cases} q_1 = \phi_{F1}(k_F t), 0 \leq t \leq 1/k_F; \\ \phi_{F1}(0) = 0, \phi_{F1}(1) = q_{1m}; \\ \frac{d\phi_{F1}}{d\lambda}(0) = \frac{d\phi_{F1}}{d\lambda}(1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} q_3 = \phi_{F2}(k_F t); \\ \phi_{F2}(0) = 0, \phi_{F2}(1) = q_{3d}; \\ \frac{d\phi_{F2}}{d\lambda}(0) = \frac{d\phi_{F2}}{d\lambda}(1) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} q_1 = \phi_{R1}(k_R t), 0 \leq t \leq 1/k_R; \\ \phi_{R1}(0) = q_{1d}, \phi_{R1}(1) = q_{1m}; \\ \frac{d\phi_{R1}}{d\lambda}(0) = \frac{d\phi_{R1}}{d\lambda}(1) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} q_3 = \phi_{R2}(k_R t); \\ \phi_{R2}(0) = q_{3d}, \phi_{R2}(1) = q_{3d}; \\ \frac{d\phi_{R2}}{d\lambda}(0) = \frac{d\phi_{R2}}{d\lambda}(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

其中 k_F 、 k_R 分别为两条规划轨迹的缩放因子.

当 $\lambda = 1$ 时, 设欠驱动连杆状态分别表示为 $q_{2F}^{k_F=1}$ 、 $\dot{q}_{2F}^{k_F=1}$ 、 $q_{2R}^{k_R=1}$ 和 $\dot{q}_{2R}^{k_R=1}$, 则欠驱动连杆状态与 k_F 、 k_R 成如下比例关系:

$$\begin{cases} q_{2F} = q_{2F}^{k_F=1}, \dot{q}_{2F} = k_F \dot{q}_{2F}^{k_F=1}, \\ q_{2R} = q_{2R}^{k_R=1}, \dot{q}_{2R} = k_R \dot{q}_{2R}^{k_R=1}. \end{cases} \quad (16)$$

当驱动连杆保持在中间位置时, 欠驱动连杆不受关节约束, 会保持匀速运动, 即 $\dot{q}_{2F} \neq 0$, 则欠驱动连杆可以转到 q_{2R} . 如果 $\dot{q}_{2F} = \dot{q}_{2R}$, 欠驱动连杆从 q_{2R} 出发到达目标位置, 则两次规划的轨迹可以光滑地拼接. 因此, 根据式(15)和(16), 缩放因子应满足以下关系:

$$k_F/k_R = \dot{q}_{2R}^{k_R=1}/\dot{q}_{2F}^{k_F=1}. \quad (17)$$

此时, 对于两次轨迹规划阶段选择了合适的 k_F 、 k_R , 于是欠驱动连杆可以获得相同的速度.

基于以上分析, 采用双向法规划两条轨迹的具体表现形式如下: 第1条轨迹系统从初始位置到达中间位置, 第1、第3驱动连杆轨迹分别设计为

$$\begin{cases} \phi_{F1}(t) = q_{10} + (q_{1m} - q_{10}) \left(k_F t - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi k_F t) \right), \\ \dot{\phi}_{F1}(t) = k_F (q_{1m} - q_{10}) (1 - \cos(2\pi k_F t)), \\ \ddot{\phi}_{F1}(t) = 2\pi k_F^2 (q_{1m} - q_{10}) \sin(2\pi k_F t); \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \phi_{F2}(t) = q_{30} + (q_{3d} - q_{30}) \left(k_F t - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi k_F t) \right), \\ \dot{\phi}_{F2}(t) = k_F (q_{3d} - q_{30}) (1 - \cos(2\pi k_F t)), \\ \ddot{\phi}_{F2}(t) = 2\pi k_F^2 (q_{3d} - q_{30}) \sin(2\pi k_F t). \end{cases} \quad (19)$$

其中: $t \in (0, t_1)$, t_1 为系统到达中间位置的时间. 根据式(11)、(18)和(19), 可以得到欠驱动连杆的轨迹.

第2条轨迹系统从中间位置到达目标位置, 第1、第3驱动连杆轨迹分别设计为

$$\begin{cases} \phi_{R1}(t) = q_{1m} + (q_{1d} - q_{1m}) \left(k_R \bar{t} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi k_R \bar{t}) \right), \\ \dot{\phi}_{R1}(t) = k_R (q_{1d} - q_{1m}) (1 - \cos(2\pi k_R \bar{t})), \\ \ddot{\phi}_{R1}(t) = 2\pi k_R^2 (q_{1d} - q_{1m}) \sin(2\pi k_R \bar{t}); \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \phi_{R2}(t) = q_{3d}, \\ \dot{\phi}_{R2}(t) = 0, \\ \ddot{\phi}_{R2}(t) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

其中: $t \in (t_1, t_2)$, $k_R(t_2 - t_1) = 1$, $\bar{t} = t - t_1$, t_2 为系统到达目标位置的时间. 根据式(11)、(20)和(21)可以得到欠驱动连杆的轨迹.

基于以上分析, 一般情况下, 系统跟踪第1条轨迹后, 第1驱动连杆到达 q_{1m} , 第3驱动连杆保持 q_{3d} , 欠驱动连杆保持匀速转动调整至 $q_{2F} = q_{2R}$, 两条轨迹才能拼接成功. 因此, 合适的 q_{1m} 决定两条轨迹拼接过程中有无欠驱动连杆过渡阶段. 为了缩短控制时间, 本文利用遗传算法^[22]优化合适的 q_{1m} , 使得欠驱动连杆无需调整就可以将规划的两条轨迹拼接成为一条完整的可达轨迹, 该方法相对于文献[20]中的枚举法试验得到的 q_{1m} 更加高效.

3.3 轨迹拼接

根据系统末端点位置控制目标, 用遗传算法优化第1根连杆合适的中间角度 q_{1m} , 拼接规划的两条轨迹.

目标函数可以定义为

$$h_2 = \text{mod}(|q_{2F} - q_{2R}|, 2\pi), \quad (22)$$

其中, 由于欠驱动连杆旋转具有周期性, 对 q_{2F} 和 q_{2R} 进行取余数处理.

优化第1连杆中间角度算法步骤如下:

step 1: 随机初始化生成 N 个染色体作为初始种群, 每个染色体表示一组 q_{1m} , 设置进化代数计数器 $C_1 = 0$, 设置最大进化代数 G .

step 2: 根据式(11)、(18)~(21)计算适应度函数 h_2 .

step 3: 当 $h_2 \leq \eta_2$ (η_2 为很小的整数) 时, 可得两条规划轨迹对应第2连杆的角度 $q_{2F} = q_{2R}$; 否则, 执行下一步.

step 4: 经过变异、交叉和选择操作更新 q_{1m} , 转到 step 2.

4 控制器设计

本节根据平面 APA 系统驱动连杆与欠驱动连杆的角度约束关系设计轨迹跟踪控制器.

令 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$, 则系统模型的状态空间形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \\ \tau_3 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

将式(23)改写为如下向量形式:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\tau, \quad (24)$$

且有

$$\begin{aligned} f(x) &= [x_4, x_5, x_6, f_1, f_2, f_3]^T, \\ g(x) &= [g_1(x), g_2(x)]^T, \\ [f_1, f_2, f_3]^T &= -M^{-1}(q)H(q, \dot{q}), \\ g_2(x) &= (g_{ij})_{3 \times 3} = M^{-1}(q). \end{aligned} \quad (25)$$

其中: $g_1(x)$ 为3阶零矩阵, g_{ij} 为关于 x 的非线性函数.

构造滑模面如下:

$$\begin{cases} S_1 = \mu_1 e_1 + \dot{e}_1, \\ S_2 = \mu_2 e_2 + \dot{e}_2; \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_{1d}(t), \dot{e}_1 = x_4 - x_{4d}(t), \\ e_2 = x_3 - x_{3d}(t), \dot{e}_2 = x_6 - x_{6d}(t). \end{cases} \quad (27)$$

其中: $x_{1d} = q_{1d}, x_{3d} = q_{3d}, x_{4d} = \dot{q}_{1d}, x_{6d} = \dot{q}_{3d}, \mu_1, \mu_2$ 为常数.

对 S_1, S_2 求导, 可得

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = \mu_1 \dot{e}_1 + \ddot{e}_1 = \\ \mu_1 \dot{e}_1 + f_1 + g_{11}\tau_1 + g_{13}\tau_3 - \dot{x}_{4d}(t), \\ \dot{S}_2 = \mu_2 \dot{e}_2 + \ddot{e}_2 = \\ \mu_2 \dot{e}_2 + f_3 + g_{31}\tau_1 + g_{33}\tau_3 - \dot{x}_{6d}(t). \end{cases} \quad (28)$$

选择滑模趋近律为

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -\varphi_1 S_1 - \varepsilon_1 \text{sgn}(S_1), \\ \dot{S}_2 = -\varphi_2 S_2 - \varepsilon_2 \text{sgn}(S_2). \end{cases} \quad (29)$$

其中: $\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon_1$ 和 ε_2 为正常数, $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数.

轨迹跟踪控制器为

$$\begin{cases} \tau_1 = -(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1)/\theta, \\ \tau_3 = (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2)/\theta. \end{cases} \quad (30)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = g_{31}\dot{x}_{6d}(t) - g_{31}\mu_2\dot{x}_3 + g_{31}\mu_2x_{6d}(t), \\ \beta_1 = -g_{33}\dot{x}_{4d}(t) + g_{33}\mu_1\dot{x}_1 - g_{33}\mu_1x_{4d}(t), \\ \gamma_1 = f_1g_{33} - f_3g_{31}, \\ \delta_1 = S_1g_{33}\varepsilon_1 - S_2g_{31}\varepsilon_2 + S_1g_{33}\varphi_1 - S_2g_{31}\varphi_2; \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = g_{11}\dot{x}_{6d}(t) - g_{11}\mu_2\dot{x}_3 + g_{11}\mu_2x_{6d}(t), \\ \beta_2 = -g_{13}\dot{x}_{4d}(t) + g_{13}\mu_1\dot{x}_1 - g_{13}\mu_1x_{4d}(t), \\ \gamma_2 = f_1g_{13} - f_3g_{11}, \\ \delta_2 = S_1g_{13}\varepsilon_1 - S_2g_{11}\varepsilon_2 + S_1g_{13}\varphi_1 - S_2g_{11}\varphi_2; \end{cases} \quad (32)$$

$$\theta = g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31}; \quad (33)$$

$$\begin{cases} g_{11} = \frac{M_{22}M_{33} - M_{23}^2}{\det(M)}, \\ g_{33} = \frac{M_{11}M_{22} - M_{12}^2}{\det(M)}. \end{cases} \quad (34)$$

因 $M(q)$ 为正定对称矩阵, 故 $g_{11} \geq 0, g_{33} \geq 0$. 所以, 在控制器(30)作用下, 系统不会出现奇异现象.

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}S_1^2 + \frac{1}{2}S_2^2, \quad (35)$$

V 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S_1\dot{S}_1 + S_2\dot{S}_2 = \\ & -\varphi_1 S_1^2 - \varepsilon_1 \text{sgn}(S_1)S_1 - \\ & \varphi_2 S_2^2 - \varepsilon_2 \text{sgn}(S_2)S_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

当 $\dot{V} \equiv 0$ 时, 根据 LaSalle's 不变原理^[23], 系统渐近稳定. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $S_1 = 0, S_2 = 0$. 因此, 在控制器(30)作用下, 第1、第3驱动连杆可以跟踪规划的完整轨迹到达目标位置. 由式(11)可知, 欠驱动连杆可以连带控制到目标位置, 从而实现平面 APA 系统末端点到达给定的目标位置 (x_d, y_d) .

5 仿真结果

在仿真实验中, 系统结构参数如表1所示.

令系统仿真步长为 0.001 s, 式(26)中参数取为 $\mu_1 = \mu_2 = 1.2$, 式(29)中参数取为 $\varphi_1 = \varphi_2 = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.3$. 各杆的初始角度和角速度以及末端点目标位置坐标分别为

$$\begin{cases} [q_{10}, q_{20}, q_{30}] = [0.5, -1.2, 1.7] \text{ rad}, \\ [\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dot{q}_{30}] = [0, 0, 0] \text{ rad/s}, \\ (x_d, y_d) = (1.5, 1.5) \text{ m}. \end{cases} \quad (37)$$

表1 平面APA欠驱动机械臂结构参数

i	m_i/kg	L_i/m	L_{ci}/m	$J_i/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
1	0.6	0.6	0.3	0.0180
2	0.8	0.8	0.4	0.0427
3	1.0	1.0	0.5	0.0833

差分进化算法的参数分别为 $p_m = 0.3, p_c = 0.7$ 和 $\eta_1 = 0.0001$. 根据式(6),用差分进化算法计算系统各连杆目标角度为

$$[q_{1d}, q_{2d}, q_{3d}] = [-0.5468, 0.2798, -1.087] \text{ rad}. \quad (38)$$

遗传算法优化参数分别为 $p_c = 0.7, p_g = 0.8, G = 100, N = 20$. 综合考虑计算时间和系统的稳定性,本文选择 $\eta_2 = 0.0001$. 第1连杆中间角度和对应的缩放因子分别为

$$\begin{cases} q_{1m} = -2.7284 \text{ rad}, \\ k_F = 1.8728, \\ k_R = -0.9371. \end{cases} \quad (39)$$

仿真结果如图2~图5所示,角速度的绝对值都在3rad/s以内,保证了系统都光滑地收敛到目标值. 系统驱动杆的驱动力矩始终保持在3N·m以内,力矩较小. 在3.75s时,第1阶段切换到第2阶段. 此外,在5.62s时,第2连杆到达稳定控制区域. 最后,系统末端点稳定到(1.4997, 1.4995)m,相对目标位置为(1.5, 1.5)m,横、纵坐标相对误差分别为0.02%和0.03%. 仿真结果显示了所设计的控制方法的有效性和快速性.

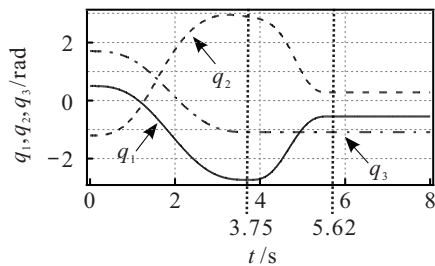


图2 角度变化

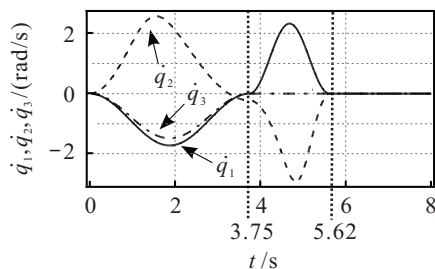


图3 角速度变化

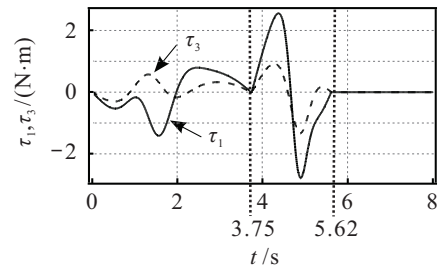


图4 控制力矩变化

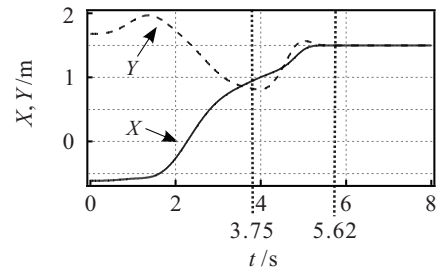


图5 系统末端点坐标变化

对于不同的系统末端点目标坐标,利用上述控制策略同样能够实现控制目标. 从文中的分析和仿真结果可知,在欠驱动关节未安装制动器条件下,系统在有限时间内从初始位置稳定到了目标位置,表明本文方法能够有效地实现平面欠驱动机械臂的稳定控制.

6 结论

本文针对中间关节为欠驱动的平面三连杆机械臂系统从任意初始位置运动到任意给定目标位置的控制问题进行研究,提出了一种基于轨迹规划的末端点位置控制策略,采用遗传算法、时间缩放以及滑模控制等技术实现了中间关节为欠驱动的平面三连杆机械臂系统的稳定控制. 首先,建立系统的动力学模型,利用差分进化算法求取连杆与目标位置相对应的目标角度. 然后,根据驱动关节与欠驱动关节的耦合关系,采用时间缩放法进行双向轨迹规划,并利用遗传算法优化了合适的第1驱动连杆中间状态和时间缩放因子,确保了正向轨迹和反向轨迹光滑拼接为一条从初始位置到目标位置的完整轨迹. 最后,设计了滑模变结构控制器跟踪规划的轨迹,实现了整个系统从初始位置到达目标位置的控制目标. 仿真结果验证了该控制方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Wu L G, Luo W S, Zeng Y, et al. Fault detection for underactuated manipulators modeled by Markovian jump systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(7): 4387-4399.

[2] 熊培银, 赖旭芝, 吴敏. 基于模型退化的平面四连杆欠驱动机械系统位置控制[J]. 控制与决策, 2015, 30(7):

- 1277-1283.
(Xiong P Y, Lai X Z, Wu M. Position control for planar four-link underactuated mechanical system based on model degeneration[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(7): 1277-1283.)
- [3] Lai X Z, Zhang P, Wang Y W, et al. Position-posture control of a planar four-link under-actuated manipulator based on genetic algorithm[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, 64(6): 4781-4791.
- [4] Fantoni I, Lozano R, Sinha S. Non-linear control for underactuated mechanical systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002, 55: B67-B68.
- [5] Oriolo G, Nakamura Y. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: Underactuated manipulators[C]. Proc of the 30th IEEE Conf on Decision and Control. Brighton, 1991: 2398-2403.
- [6] Wang Y W, Lai X Z, Chen L F, et al. A quick control strategy based on hybrid intelligent optimization algorithm for planar n -link underactuated manipulators[J]. *Information Sciences*, 2017, 420: 148-158.
- [7] Cao S Q, Lai X Z, Wu M. Motion control method of planar acrobot based on trajectory characteristics[C]. Proc of the 31th Chinese Control Conf. Hefei, 2012: 4910-4915.
- [8] 盛洋, 赖旭芝, 吴敏. 基于模型降阶的平面三连杆欠驱动机械系统位置控制[J]. *自动化学报*, 2014, 40(7): 1303-1310.
(Sheng Y, Lai X Z, Wu M. Position control for planar three-link underactuated mechanical system based on model reduction[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1303-1310.)
- [9] Arai H, Tanie K, Shiroma N. Nonholonomic control of a three-DOF planar underactuated manipulator[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, 14(5): 681-695.
- [10] Lai X Z, She J H, Cao W H, et al. Stabilization of underactuated planar acrobot based on motion-state constraints[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 2015, 77: 342-347.
- [11] 王亚午, 赖旭芝, 吴敏. 基于可变设计参数的平面 Acrobot 位置快速控制方法[J]. *电机与控制学报*, 2017, 21(9): 110-118.
(Wang Y W, Lai X Z, Wu M. Rapid position control approach based on variable design parameter for planar Acrobot[J]. *Electric Machines and Control*, 2017, 21(9): 110-118.)
- [12] Luca A D, Mattone R, Oriolo G. Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10(4): 181-198.
- [13] Suzuki T, Nakamura Y. Control of manipulators with free-joints via the averaging method[C]. Proc of the IEEE Conf on Robotics and Automation. Brighton: IEEE, 1997: 2998-3005.
- [14] Mahindrakar A D, Banavar R N, Reyhanoglu M. Controllability and point-to-point control of 3-dof planar horizontal underactuated manipulators[J]. *International Journal of Control*, 2005, 78(1): 1-13.
- [15] Luca A D, Iannitti S. A simple STLC test for mechanical systems underactuated by one control[C]. Proc of the IEEE International Conf on Robotics and Automation. Washington, 2002: 1735-1740.
- [16] Lai X Z, Wang Y W, Wu M, et al. Stable control strategy for planar three-link underactuated mechanical system[J]. *IEEE/AEME Transactions on Mechatronics*, 2016, 21(3): 1345-1356.
- [17] Bhave M, Janardhanan S, Dewan L. Configuration control of planar underactuated robotic manipulator using terminal sliding mode[J]. *IFAC-Papers Online*, 2016, 49(1): 148-153.
- [18] Luca A D, Iannitti S, Mattone R, et al. Underactuated manipulators: Control properties and techniques[J]. *Machine Intelligence and Robotic Control*, 2002, 4(3): 113-125.
- [19] Storn R, Price K. Differential evolution — A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces[J]. *Journal of Global Optimization*, 1997, 11(4): 341-359.
- [20] Arai H, Tanie K, Shiroma N. Time-scaling control of an underactuated manipulator[C]. Proc of the IEEE Conf on Robotics and Automation. Leuven, 1998: 2619-2626.
- [21] Nakamura Y, Mukherjee R J. Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach[J]. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 1991, 4(7): 500-514.
- [22] Koker R. A genetic algorithm approach to a neural-network-based inverse kinematics solution of robotic manipulators based on error minimization[J]. *Information Sciences*, 2013, 222: 528-543.
- [23] LaSalle J P. Stability theory for ordinary differential equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 1968, 4(1): 57-65.

作者简介

黄自鑫(1988—), 男, 博士生, 从事欠驱动机器人控制、非线性系统控制的研究, E-mail: huangzixin@cug.edu.cn;

赖旭芝(1966—), 女, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、机器人控制和非线性系统控制等研究, E-mail: laixz@cug.edu.cn;

王亚午(1990—), 男, 副教授, 博士, 从事欠驱动机器人控制、非线性系统控制的研究, E-mail: wangyawu@cug.edu.cn;

吴敏(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、智能控制和过程控制等研究, E-mail: wumin@cug.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)