

犹豫不确定离散语言 Z-numbers 及其基于离散 T 模的多准则群决策问题的应用

毛军军^{1,2†}, 张丽平¹

(1. 安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601; 2. 安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230601)

摘要: 介绍基于 Z-numbers 和语言模型的犹豫不确定离散语言 Z-numbers (HUDLZNs). HUDLZNs 能够有效地描述决策信息的复杂性和不确定性, 并能较好地反映出决策者的犹豫性. 在此基础上, 提出一种基于离散 T 模融合和正理想方案的多准则群决策方法. 首先, 借助语言尺度函数来处理语言信息, 并定义 HUDLZNs 间的距离、 λ 截集和 C^λ 截集; 其次, 提出基于 HUDLZNs 的离散 T 模融合; 再次, 结合离散 T 模融合和语言尺度函数的优点提出一种 HUDLZNs 的多准则群决策方法; 最后, 用 ERP 系统选型的实例进行阐明, 并通过灵敏度分析和已有方法的比较进一步表明所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 多准则群决策; 犹豫不确定离散语言 Z-number; 语言尺度函数; 离散 T 模融合

中图分类号: C934

文献标志码: A

Hesitant uncertain discrete linguistic Z-numbers and their application in multi-criteria group decision-making problems based on discrete T -norm

MAO Jun-jun^{1,2†}, ZHANG Li-ping¹

(1. School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China; 2. Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: This paper introduces hesitant uncertain discrete linguistic Z-numbers (HUDLZNs) based on Z-numbers and linguistic models. HUDLZNs can serve as an effective tool to depict complex and uncertain decision-making information and reflect the hesitancy of DMs. Based on above, a multi-criteria group decision-making (MCGDM) approach using discrete T -norm fusion and positive ideal of alternative is proposed. Firstly, linguistic information is handled with the help of the linguistic scale function, after which the distance and λ -cut of HUDLZNs and λ -cut of C are defined. Then, information fusion of discrete T -norm based on HUDLZNs is proposed. Subsequently, combining the very best of information fusion of discrete T -norm and linguistic scale functions, a MCGDM approach based on HUDLZNs is developed. Finally, an illustrative example of ERP system selection is provided for demonstration, and the feasibility and effectiveness of the proposed method are further proved by sensitivity analysis and comparison with an existing method.

Keywords: multi-criteria group decision-making; hesitant uncertain discrete linguistic Z-numbers; linguistic scale function; discrete T -norm fusion

0 引 言

作为传统模糊集的延伸, Zadeh^[1]于 2011 年提出的 Z-numbers 考虑了决策问题中决策信息为传统模糊集的可靠性. Z-numbers 是一对有序的模糊数, 表示为 (A, B) , A 是实值不确定变量 X 的约束, B 是对第 1 个分量 A 可靠性的测度. 当 Z-numbers 中加入 X 时, 这个有序的三元组 (X, A, B) 被称为 Z-valuation, 这时的 A 表示 X 所取值的约束, 第 2 个分量 B 被解释为第 1 个分量 A 的可靠性. 近年来, Z-numbers 作为

一个热门课题, 受到了很多研究者的关注. 当前, 对 Z-numbers 的研究大致分为两个方面: 一方面是对 Z-numbers 基本框架的研究; 另一方面是决策方法的研究.

语言变量^[2]是一种有效的工具, 近年来, 从自然语言或人工语言中提取的词汇或句子得到广泛的研究并应用于各个领域^[3-4]. 为了描述模糊信息, Xu^[5]提出了一种采用区间形式而非单一的语言值来表达的语言变量, 称为不确定语言变量. 基于 Z-numbers

收稿日期: 2018-05-27; 修回日期: 2018-09-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61806001); 安徽省自然科学基金项目(1708085MF163); 安徽大学研究生创新训练项目(2018AHU).

†通讯作者. E-mail: maojunjun@ahu.edu.cn.

和语言变量, Wang等^[6]提出了语言Z-numbers(LZNs)的概念,把Z-numbers的两个分量用语言术语来描述,使用起来更加灵活、广泛,可以有效地减少决策过程中信息的丢失. 随后, Peng等^[7]提出了犹豫不确定语言Z-numbers(HULZNs)的概念,也是Z-numbers的一个特殊子类,第1个分量使用不确定语言变量来描述对X的模糊限制,第1个分量的可靠性使用几个离散的语言值来描述决策者的犹豫. 此外,语言环境下的决策问题还需要用到语言的转换,使用语言尺度函数可以实现不同的语义循环^[8-9].

基于 Xu^[5]提出的不确定语言变量,本文定义了不确定离散语言变量,两者的表现形式都是区间,但前者是连续的而后者是离散的. 由于Z-numbers的广泛应用和语言模型的有效性,本文提出了犹豫不定离散语言Z-numbers(HUDLZNs),它可以作为Z-numbers的一种特殊形式或子类来对待. 由于Z-numbers的第1个分量扮演了模糊限制的角色,可以用一个不确定离散语言变量来描述它. 利用区间形式的离散语言值来描述模糊限制比使用单个语言值更合适. 此外,决策者提供的对第1个分量的可靠性可用语言变量来描述. 通常,决策者在给出第1个分量的可靠性时会考虑到每个语言值,因此,新定义的HUDLZNs考虑了每个语言值的可靠性,这样可增强决策信息的准确性和可靠性. 通常情况下,对第1个分量而言,决策者会考虑把最可靠的语言值排在中间位置,越往两边可靠性越低,因此,可以把每个语言值可靠性的有序集合作为第1个分量的可靠性,亦可表达决策者的犹豫性. 显然,一个HUDLZN可以由一个不确定离散语言变量和几个语言变量的集合构成. HUDLZNs可以很容易地实现生活中的大多数决策信息. 实际上,决策者提供的第1个部分的可靠性通常在几个可能的语言值之间波动,所以,使用几个连续的或离散的语言术语便可以描述这种犹豫,更有效地呈现不完整的信息,比单个语言术语更能丰富地表达. 因此,可以通过整合一个不确定的语言变量和几个语言值来构造一个HUDLZN. 在现实生活中,HUDLZNs很容易代表大多数决策信息.

接下来,结合偏序集上T模的研究^[10-11],针对HUDLZNs,本文定义了基于有限链上离散T模^[12]的HUDLZNs信息融合,这个过程应用了语言尺度函数语义转换的灵活性、Zadeh的扩张原理^[13]和 α 截集的思想.

2011年,Zadeh^[1]的Z-number的提出是对智能认知系统决策的重大贡献,他试图把自然语言的客观信

息显示与主观理解成分并列表达在一起以便增强对自然语言的理解. 这种范式主要聚焦在信息的不确定性表示的促成上,用一种自然语言表达了主观性参数,即考虑了信息的“可信赖性”或“可信赖的程度”,因而能更好地表达现实环境中的不确定性,以支持有效的管理决策. 事实上,认知过程存在着不确定性,因此,Zadeh将度量数据产生过程中的不确定性(认知过程的不确定性)以及数据自身的可靠依赖性(认知结果的不确定性)考虑到Z-numbers模型中,从而使得Z-numbers模型在描述决策问题和不确定信息度量时具有较强的能力. 但是,目前的研究并未深入讨论Z-numbers的知识表示理论与状态空间的粒度化和结构化,能否提出新的语言尺度函数将不确定信息结构化? 能否结合HUDLZNs间距离、 λ 截集的离散T模融合,将多准则决策信息粒度化?

基于以上想法,本文针对HUDLZNs,提出一种基于离散T模融合的多准则群决策方法,不仅计算量少,而且简单有效. 首先介绍一些基本概念,如语言术语集、语言尺度函数、T模和Z-numbers;其次,定义不确定离散语言变量、HUDLZNs、 λ 截集、两个HUDLZNs的优势关系和距离等;再次,定义基于T模和 λ 截集的HUDLZNs信息融合;最后,介绍基于最优方案的部分权重已知的多准则群决策方法,并通过实例进行阐述,同时进行了灵敏度分析和比较分析.

1 基本概念

1.1 语言术语集

设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, 2t\}$ 是一个有序的基数项离散语言术语集,其中 t 是一个非负的整数,而 s_i 代表可能的语言术语值. 要求 s_i 和 s_j 满足以下的性质^[2]: 1) $s_i > s_j$, 当且仅当 $i > j$; 2) 服从非运算,即 $\text{neg}(s_i) = s_j, i + j = 2t$.

1.2 语言尺度函数

从语言术语到数值的转换需要有效的定量工具支持. 语言尺度函数可以在不同的情况下为语言术语赋予不同的语义值,从而更加灵活地表达语义,更有效地利用原始信息.

定义1^[12] 设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, 2t\}$ 是一个有序的基数项离散语言术语集, $s_i \in S$ 是一个语言变量. 假设 $\theta_i \in [0, 1]$ 是一个数值,则语言尺度函数就是从 s_i 到 $\theta_i (i = 0, 1, \dots, 2t)$ 的映射,被定义为

$$H : s_i \rightarrow \theta_i, i = 0, 1, \dots, 2t,$$

其中 $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{2t} \leq 1$. θ_i 反映的是决策者选择 s_i 的偏好,所以事实上 H 是对 s_i 语义的一种解释说明. 语言尺度函数是随着下标 i 严格递增的

函数.

本文给出以下 4 类值域在区间 $[0, 1]$ 上的新的语言尺度函数.

1) 基于下标 i 的幂指数型语言尺度函数.

$$H_{11}(s_i) = \theta_i = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left| \frac{i}{t} - 1 \right|^k + \frac{1}{2}, & i = 0, 1, \dots, t; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{i}{t} - 1 \right)^k + \frac{1}{2}, & i = t + 1, t + 2, \dots, 2t. \end{cases}$$

其中 k 是一个正实数. 在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, 当 $0 < k < 1$ 时, H_{11} 的绝对偏差单调减; 当 $k = 1$ 时, H_{11} 的绝对偏差均匀变化; 当 $k > 1$ 时, H_{11} 的绝对偏差单调增.

2) 基于三角函数的语言尺度函数.

$$H_{21}(s_i) = \theta_i = \frac{1}{2} \tan \left(\frac{i}{4t} \pi - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2},$$

$$i = 0, 1, \dots, 2t;$$

$$H_{22}(s_i) = \theta_i = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{i}{2t} \pi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2},$$

$$i = 0, 1, \dots, 2t;$$

$$H_{23}(s_i) = \theta_i = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{i}{2t} \pi - \pi \right) + \frac{1}{2},$$

$$i = 0, 1, \dots, 2t.$$

在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, H_{21} 的绝对偏差单调增, H_{22} 和 H_{23} 的绝对偏差均单调减.

3) 基于反三角函数的语言尺度函数.

$$H_{31}(s_i) = \theta_i = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{i}{t} - 1 \right) + \frac{1}{2},$$

$$i = 0, 1, \dots, 2t;$$

$$H_{32}(s_i) = \theta_i = \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{i}{t} - 1 \right) + \frac{1}{2},$$

$$i = 0, 1, \dots, 2t;$$

$$H_{33}(s_i) = \theta_i = \frac{1}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{i}{t} \right),$$

$$i = 0, 1, \dots, 2t.$$

在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, H_{31} 的绝对偏差单调减, H_{32} 和 H_{33} 的绝对偏差均单调增.

为了便于计算, 以上所述的语言尺度函数均可扩展到正实数域上, 即 $H^* : \tilde{S} \rightarrow R^+$, 满足 $H^*(s_i) = \theta_i$, $H^*(s_i)$ 是严格单调递增的连续函数. 所以 H^* 的逆函数也存在, 记为 H^{*-1} .

4) 基于下标 i 的扩展的语言尺度函数.

$$H_4(s_i) = \theta_i = i, \quad i = 0, 1, \dots, 2t.$$

上述 4 类语言尺度函数分别以不同的函数形式

将语言术语集 S_i 映射到 θ_i 上, 函数值 θ_i 都是随着 i 的增大而增大, 实际应用时可根据具体的语境, 再结合各个语言尺度函数的特征来选取合适的语言尺度函数. 其中前 3 类语言尺度函数满足以下性质:

性质 1 $H(s_0) = 0, H(s_t) = 0.5, H(s_{2t}) = 1$.

每一个语言尺度函数都有自己独特的特征, 从语言尺度函数的特征来看, 前 3 类语言尺度函数可分为以下 3 种:

1) 在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, 绝对偏差单调减;

2) 在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, 绝对偏差均匀变化;

3) 在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, 绝对偏差单调增.

下面根据特征的分类, 给出 $t = 4$ 时 H_{11} ($k = 1.08$)、 H_{21} 、 H_{31} 的图示说明 (见图 1). k 取 1.08 是为了在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, 绝对偏差尽可能地均匀变化, 同时保证这 3 个函数图像分别在区间 $[0, 4]$ 和区间 $(4, 8]$ 上整数点处的函数值没有交叉的部分, 即 3 个函数在同一区间上各个整数点处的函数值都存在一种相同的排序关系. 借助 Matlab 工具, 计算出 $t = 4$ 时 k 的取值范围为 $[0.8404, 1.1649]$, 针对不同的 t, k 的取值范围也不同.

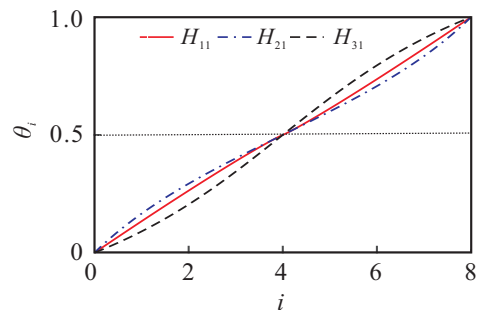


图 1 H_{11}, H_{21}, H_{31} 的图示

1.3 Z-numbers

定义 2^[1] Z-numbers 是由有序的一对模糊数组成的, 记为 $Z = (A, R)$. 第 1 个元素 A 是不确定变量 X 的实值函数, 是对 X 在数值上的约束; 第 2 个元素 R 是对第 1 个元素 A 的可靠性的测度. 特殊地, A 和 R 可以分别用语言值的集合来表示, 例如 (好, 较好) 和 (确定, 非常确定).

1.4 偏序集上的 T 模

定义 3^[10-11] 设 L 是一个偏序集, e 和 m 分别是 L 的最小值和最大值, 二元运算 $T : L \times L \rightarrow L$ 称为定义在 L 上的 T 算子, 若 $\forall x, y, z \in L$, 它满足:

- 1) (交换律) $T(x, y) = T(y, x)$;
- 2) (结合律) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$;

3) (单调性)若 $x \leq x', y \leq y'$, 则 $T(x, y) \leq T(x', y')$;

4) (边界条件) $T(x, m) = x$.

若 L 是一个完全有序的离散集, 则定义在 L 上的 T 模被称为离散的 T 模.

2 犹豫不确定离散语言 Z-numbers 及其相关的概念

2.1 不确定离散语言变量

定义 4 设 $s = [s_a, s_b] = (s_a, s_{a+1}, \dots, s_b) \subseteq S, s_a, s_b \in S, 0 \leq a \leq b \leq 2t, s_a$ 和 s_b 分别是 s 的上下限. 这样的 s 被称为不确定离散语言变量.

2.2 犹豫不确定离散语言 Z-numbers(HUDLZNs)

定义 5 设 X 是一个定义域, $S^1 = \{s_0^1, s_1^1, \dots, s_{2l}^1\}, S^2 = \{s_0^2, s_1^2, \dots, s_{2r}^2\}$ 是两个有序的基数项离散语言术语集, 且 $s_0^1 < s_1^1 < \dots < s_{2l}^1, s_0^2 < s_1^2 < \dots < s_{2r}^2, l, r \in N. s^1 = [s_a^1, s_b^1] \subseteq S^1, s^1$ 是一个不确定离散语言变量, 其中 $s_a^1, s_b^1 \in S^1, s_a^1$ 和 s_b^1 分别是 s^1 的上下限. 通常情况下, S^1 和 S^2 是不相同的, 代表了两种截然不同的语言偏好信息. 现给出离散映射 $\tau : S^1 \rightarrow S^2$, 则定义在 X 上的犹豫不确定离散语言 Z-numbers (HUDLZNs) 可以表示为

$$\tilde{Z} = \{(x, A_Z(x), B_Z(x)) | x \in X\}.$$

其中: 第 1 个分量 $A_Z(x) = [s_a^1(x), s_b^1(x)] \subseteq [s_0^1, s_{2l}^1]$, 是对 X 取值为 x 时的模糊限制, 用区间形式的不确定离散语言变量来描述; $B_Z(x) = \tau(A_Z(x)) = \{b_i(x) = \tau(s_i^1) \in S^2 : s_i^1 \in A_Z(x), a \leq i \leq b\}$, 是第 1 个分量可靠性的测度, 用 S^2 中几个离散的语言值来描述. 若存在自然数 s, t , 当 $a \leq s \leq t \leq b$ 时, $B_Z(x)$ 中的元素满足以下条件:

- 1) $\tau(s_i^1) = s_{2r}^2, s \leq i \leq t$;
- 2) $\tau(s_i^1) \leq \tau(s_j^1), a \leq i \leq j \leq s$;
- 3) $\tau(s_i^1) \geq \tau(s_j^1), t \leq i \leq j \leq b$.

事实上, $B_Z(x)$ 考虑了第 1 个分量中每个语言值的可靠性, 越接近中间位置的语言值可靠性越高, 越往两边可靠性越低, 故 $B_Z(x)$ 可以被描述为 $A_Z(x)$ 中每个语言值的可靠性的有序集合.

当 X 只含有一个值时, HUDLZNs 就退化成一个犹豫不确定离散语言 Z-number(HUDLZN), 定义为 $z = (A_z(x), B_z(x))$, HUDLZN 是 HUDLZNs 的一个元素. 如果 $s_a^1 = s_b^1$, 即 $A_Z(x)$ 和 $B_Z(x)$ 只含有一个语言变量, 则 HUDLZN 将退化成一个语言 Z-

number(LZN).

2.3 HUDLZNs 间的优势关系

这一节, 首先定义 λ 截集, 然后运用扩张原理的思想定义 HUDLZNs 的最大值和最小值, 进而确定两个 HUDLZNs 的优势关系.

2.3.1 λ 截集

设 Z 是一个 HUDLZN, 即

$$Z = (A, B) = ([a_1, a_k], \{b_1, b_2, \dots, b_k\}) = (\{a_1, a_2, \dots, a_k\}, \{b_1, b_2, \dots, b_k\}).$$

其中: $a_i \in S^1; b_i \in S^2$; 映射 $\tau : A \rightarrow B; \tau(a_i) = b_i (i = 1, \dots, k)$, b_i 为 a_i 的可靠性, 这里的 τ 显然是一个满射.

定义 6 设 $Z^\lambda = (A^\lambda, B^\lambda)$ 为 Z 的 λ 截集, $\lambda \in S^2$. 其中: $A^\lambda = \{a \in A | \tau(a) \geq \lambda\}, B^\lambda = \{\tau(a) | a \in A^\lambda\}, A^\lambda, B^\lambda$ 均是有序的. 当 $\lambda = s_0^2$, 或者 $\lambda = b_1$ 时, $A^{s_0^2} = A^{b_1}, B^{s_0^2} = B^{b_1}, Z^{s_0^2} = Z^{b_1}$, 它们分别是 A, B 和 Z 本身.

2.3.2 两个 HUDLZNs 的最大值和最小值及优势关系

设 Z_1, Z_2 是两个任意 HUDLZNs, $Z_1 = (A_1, B_1), Z_2 = (A_2, B_2)$. 其中: $A_1, A_2 \subseteq S^1; B_1, B_2 \subseteq S^2; A_1 = [a_{11}, a_{1k}] = (a_{11}, \dots, a_{1k}), A_2 = [a_{21}, a_{2p}] = (a_{21}, \dots, a_{2p}); B_1 = \{b_{11}, \dots, b_{1k}\}, B_2 = \{b_{21}, \dots, b_{2p}\}, B_1, B_2$ 均是有序的; $\tau(a_{1i}) = b_{1i} (i = 1, \dots, k), b_{1i}$ 为 a_{1i} 的可靠性; $\tau(a_{2j}) = b_{2j} (j = 1, \dots, p), b_{2j}$ 为 a_{2j} 的可靠性; τ 为满射.

考虑以下的集合:

$$\min_{\omega}(Z_1, Z_2)^\lambda = (\min_{\omega}(A_1, A_2)^\lambda, \min_{\omega}(B_1, B_2)^\lambda). \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \min_{\omega}(A_1, A_2)^\lambda &= \{a \in A_1 \wedge A_2 | \min(a_{11}^\lambda, a_{21}^\lambda) \leq a \leq (a_{1k}^\lambda, a_{2p}^\lambda)\}, \\ \min_{\omega}(B_1, B_2)^\lambda &= \{\tau(a) \in S^2 : a \in \min_{\omega}(A_1, A_2)^\lambda\}, \\ A_1 \wedge A_2 &= \{z = \min(x, y) | x \in A_1, y \in A_2\}. \end{aligned}$$

以及

$$\max_{\omega}(Z_1, Z_2)^\lambda = (\max_{\omega}(A_1, A_2)^\lambda, \max_{\omega}(B_1, B_2)^\lambda). \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \max_{\omega}(A_1, A_2)^\lambda &= \{a \in A_1 \vee A_2 | \max(a_{11}^\lambda, a_{21}^\lambda) \leq a \leq (a_{1k}^\lambda, a_{2p}^\lambda)\}, \\ \max_{\omega}(B_1, B_2)^\lambda &= \{\tau(a) \in S^2 : a \in \max_{\omega}(A_1, A_2)^\lambda\}, \end{aligned}$$

$$A_1 \vee A_2 = \{z = \max(x, y) | x \in A_1, y \in A_2\}.$$

性质 2 不难看出 $\min_{\omega}(Z_1, Z_2)$ 和 $\max_{\omega}(Z_1, Z_2)$ 是两个 HUDLZNs, 称 $\min_{\omega}(Z_1, Z_2)$ 和 $\max_{\omega}(Z_1, Z_2)$ 分别是 Z_1 和 Z_2 的最小值和最大值. 它们的 λ 截集分别是上述所定义的 $\min_{\omega}(Z_1, Z_2)^{\lambda}$ 和 $\max_{\omega}(Z_1, Z_2)^{\lambda}$.

定义 7 设 Z_1, Z_2 是本节定义的两个 HUDLZNs, \mathcal{Z} 是 HUDLZNs 的集合, $\mathcal{Z} = \{Z_i = (A_i, B_i) \in \text{HUDLZNs} : A_i \subseteq S^1, B_i \subseteq S^2\}$, 可得到一种优势关系 (\mathcal{Z}, \preceq) . 如果对于 $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, 有 $\min_{\omega}(Z_1, Z_2) = Z_1$, 或者 $\max_{\omega}(Z_1, Z_2) = Z_2$, 则 $Z_1 \preceq Z_2$. 类似地, 根据截集也可得到 HUDLZNs 的优势关系 (\mathcal{Z}, \preceq) , 如果 $\min_{\omega}(Z_1^{\lambda}, Z_2^{\lambda}) = Z_1^{\lambda}$, 或者 $\max_{\omega}(Z_1^{\lambda}, Z_2^{\lambda}) = Z_2^{\lambda}$, 则 $Z_1 \preceq Z_2$.

2.4 HUDLZNs 的广义距离

定义 8 设 f 和 g 是两种不同的语言尺度函数, 则两个 HUDLZNs Z_1 和 Z_2 的广义距离定义为

$$d_G(Z_1, Z_2) = \left[\frac{1}{2} (|f(a_{11}) - f(a_{21})|^{\lambda} + |f(a_{1k}) - f(a_{2p})|^{\lambda}) \right]^{\frac{1}{\lambda}} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \sum_{\substack{a_{1i} \in A_1 \\ b_{1i} \in B_1}} \min_{\substack{a_{2j} \in A_2 \\ b_{2j} \in B_2}} |f(a_{1i})g(b_{1i}) - f(a_{2j})g(b_{2j})|^{\lambda} + \frac{1}{p} \sum_{\substack{a_{2j} \in A_2 \\ b_{2j} \in B_2}} \min_{\substack{a_{1i} \in A_1 \\ b_{1i} \in B_1}} |f(a_{1i})g(b_{1i}) - f(a_{2j})g(b_{2j})|^{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}.$$

性质 3 对于 $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \text{HUDLZNs}$, 定义的广义距离满足以下性质:

- 1) $d_G(Z_1, Z_2) \geq 0$;
- 2) $d_G(Z_1, Z_2) = d_G(Z_2, Z_1)$;
- 3) 如果 $Z_1 \preceq Z_2 \preceq Z_3$, 则 $d_G(Z_1, Z_2) \leq d_G(Z_1, Z_3), d_G(Z_2, Z_3) \leq d_G(Z_1, Z_3)$.

3 基于离散 T 模和 C^{λ} 截集的信息融合

首先介绍在有限链上的离散 T 模, 然后定义 C^{λ} 截集, 最后根据扩张原理对两个 HUDLZNs 进行融合. 用 T 模对两个 HUDLZNs 进行信息融合时, 本文默认对 HUDLZNs 的第 1 部分使用基于下标 i 的扩展的语言尺度函数 H_4 进行语义转换, 即 $f(s_i) = i$, 从而得到有限链上的离散 T 模.

3.1 定义在有限链上的离散 T 模

本节考虑定义在有限链 $\text{FS}^1 = \{0, 1, \dots, 2l\} \subset \mathbf{N}$ 上的离散 T 模. 以下结论中把 T 模换成 T 余模, 同样成立.

定义 9 记 $\text{FS}^1 = f(S^1) = \{f(s_i^1), i = 0, 1, \dots, 2l\}$. 显然, $\text{FS}^1 = f(S^1) = \{0, 1, \dots, 2l\}$ 是一个有限链.

定义在 FS^1 上的 T 模二进制运算如下:

$$T : \text{FS}^1 \times \text{FS}^1 \rightarrow \text{FS}^1, \\ (x, y) \mapsto T(x, y);$$

同样地, 定义二进制运算

$$T : 2^{\text{FS}^1} \times 2^{\text{FS}^1} \rightarrow 2^{\text{FS}^1}, \\ (X, Y) \mapsto T(X, Y).$$

其中: X 和 Y 是 FS^1 的一个子集. $T(X, Y) = \{T(x, y) | x \in X, y \in Y\} \subseteq \text{FS}^1$. 因 FS^1 是离散的, 故称 T 模为离散 T 模. 易证其满足交换律和结合律.

3.2 C^{λ} 截集

设 Z_1, Z_2 是 2.3.2 节定义的两个 HUDLZNs, 它们的 λ 截集分别为 Z_1^{λ} 和 Z_2^{λ} . $Z_1^{\lambda} = (A_1^{\lambda}, B_1^{\lambda}), Z_2^{\lambda} = (A_2^{\lambda}, B_2^{\lambda}), A_1^{\lambda} = (a_{11}^{\lambda}, \dots, a_{1k'}^{\lambda}), A_2^{\lambda} = (a_{21}^{\lambda}, \dots, a_{2p'}^{\lambda})$, 它们分别为 A_1 和 A_2 的 λ 截集, $\lambda \in S^2$. 记

$$\text{FA}_1^{\lambda} = f(A_1^{\lambda}) = \{f(a_{1i}) \in \text{FS}^2, i = 1, \dots, k'\}, \\ \text{FA}_2^{\lambda} = f(A_2^{\lambda}) = \{f(a_{2j}) \in \text{FS}^2, j = 1, \dots, p'\},$$

它们分别为 FA_1 和 FA_2 的 λ 截集. 对于 $\forall \lambda \in S_2$, 有

$$T(\text{FA}_1^{\lambda}, \text{FA}_2^{\lambda}) = \{T(x, y) | x \in \text{FA}_1^{\lambda}, y \in \text{FA}_2^{\lambda}\}.$$

其中: $\lambda = s_0^2$ 时, $A_1^{s_0^2}$ 和 $A_2^{s_0^2}$ 分别是 A_1 和 A_2 本身, $\text{FA}_1^{s_0^2}$ 和 $\text{FA}_2^{s_0^2}$ 分别是 FA_1 和 FA_2 本身, 这时 $T(\text{FA}_1^{s_0^2}, \text{FA}_2^{s_0^2}) = T(\text{FA}_1, \text{FA}_2)$.

定义 10 对于 $\forall \lambda \in S^2, C^{\lambda}$ 截集定义为

$$C^{\lambda} = \{z \in f^{-1}(T(\text{FA}_1, \text{FA}_2)) | \\ \min f^{-1}(T(\text{FA}_1^{\lambda}, \text{FA}_2^{\lambda})) \leq z \leq \\ \max f^{-1}(T(\text{FA}_1^{\lambda}, \text{FA}_2^{\lambda}))\}.$$

性质 4 因为 T 模是单调的, 所以

$$C^{\lambda} = \{z \in f^{-1}(T(\text{FA}_1, \text{FA}_2)) | \\ \min f^{-1}(T(\text{FA}_1^{\lambda}, \text{FA}_2^{\lambda})) \leq z \leq \\ \max f^{-1}(T(\text{FA}_1^{\lambda}, \text{FA}_2^{\lambda}))\}.$$

等价于

$$C^{\lambda} = \{z \in f^{-1}(T(\text{FA}_1, \text{FA}_2)) | \\ f^{-1}(T(a_{11}^{\lambda}, a_{21}^{\lambda})) \leq z \leq \\ f^{-1}(T(a_{1k'}^{\lambda}, a_{1p'}^{\lambda}))\}.$$

特殊地, 当 $\lambda = s_0$ 时, C^{s_0} 就是 $f^{-1}(T(\text{FA}_1, \text{FA}_2))$.

3.3 基于 T 模和 C^{λ} 截集的信息融合

定义 11 设 Z_1 和 Z_2 是第 2.3.2 节定义的两个 HUDLZNs, $\tau(z) = \sup(\lambda \in S^2 : z \in C^{\lambda}), U(B_1, B_2) = \{\tau(z) \in B_1 \cup B_2 : z \in f^{-1}(T(\text{FA}_1, \text{FA}_2))\}$, 则 $\mathcal{T}(Z_1, Z_2) = (f^{-1}(T(\text{FA}_1, \text{FA}_2)), U(B_1, B_2))$ 即

为融合后的HUDLZNs.

$\mathcal{T}: \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ 是离散 T 模在 \mathcal{Z} 上的延伸. 显然 \mathcal{T} 满足交换律和结合律.

4 HUDLZNs的多准则群决策方法及应用

这一部分将基于离散 T 模和正理想方案实现 HUDLZNs 的多准则群决策问题. 用一种通俗易懂的思想将 HULZNs^[7] 转换为 HUDLZNs, 应用文献 [7] 中的实例进行决策, 并进行灵敏度分析和比较分析.

4.1 决策问题描述

HUDLZNs 的多准则群决策问题可描述为: 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为有限备选方案集, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 为准则集, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 为准则权重, $\sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0, E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ 为专家集合. 运用离散 T 模融合不同专家所给的评估信息, 但由于一个决策问题中, 不同准则对决策结果的影响不同, 应对不同的准则赋予不同的权重, 以获得合理的结果. 设专家 e_k 对方案 x_i 在准则 u_j 下的评价价值用 HUDLZNs 表示为

$$z_{ij}^k = (A_{ijk}, B_{ijk}) = ([a_{ijk}^L, a_{ijk}^U], \{b_{ijk_t} \in S^2, t = \theta_{ijk}(1), \theta_{ijk}(2), \dots, \theta_{ijk}(P_{ijk})\}).$$

其中: a_{ijk}^L 、 a_{ijk}^U 分别是 A_{ijk} 的上下限, P_{ijk} 表示 A_{ijk} 中语言值的个数, $\theta_{ijk}(y) (y = 1, 2, \dots, P_{ijk})$ 表示 A_{ijk} 的第 y 个语言值, $b_{ijk_t} (t = \theta_{ijk}(1), \theta_{ijk}(2), \dots, \theta_{ijk}(P_{ijk}))$ 为 A_{ijk} 的第 t 个语言值的可靠性. 专家 e_k 所给的评估矩阵为 $D^k = (z_{ij}^k)_{m \times n} (k = 1, 2, \dots, q)$. 经离散 T 模融合后的综合评估矩阵记为

$$D = (z_{ij})_{m \times n}, z_{ij} = (A_{ij}, B_{ij}) = ([a_{ij}^L, a_{ij}^U], \{b_{ij_t} \in S^2, t = \theta_{ij}(1), \theta_{ij}(2), \dots, \theta_{ij}(M_{ij})\}).$$

其中: a_{ij}^L 、 a_{ij}^U 分别是 A_{ij} 的上下限, M_{ij} 表示 A_{ij} 中语言值的个数, $\theta_{ij}(y) (y = 1, 2, \dots, M_{ij})$ 表示 A_{ij} 的第 y 个语言值, $b_{ij_t} (t = \theta_{ij}(1), \theta_{ij}(2), \dots, \theta_{ij}(M_{ij}))$ 为 A_{ij} 的第 t 个语言值的可靠性.

4.2 HULZNs^[7]转换成HUDLZNs

首先对 HULZNs 作一个简单的介绍. HULZNs 也是 Z-numbers 的一种特殊情况, 与 HUDLZNs 一样, 都是用语言变量来描述 Z-numbers 的两个部分. HULZNs 的第 1 个分量是一个连续的区间语言变量, 第 2 个分量是有限个离散的语言值的集合. 下面考虑

如何把一个 HULZN 转换成 HUDLZN.

Step 1: 将 HULZN 的第 1 个分量, 即连续的区间语言变量, 转换成有序的离散的语言变量.

Step 2: 对 HULZN 的第 2 个分量进行转换. 由于 HULZN 的第 2 个分量是第 1 个分量可靠性的测度, 用有限个离散的语言值的集合来描述, 这时可用一个简单的算法来描述第 2 个分量的效用 (U), 采用对下标求算术平均作为第 2 个分量的平均效用 ($PU(0 \leq PU \leq 2r)$). 设 HULZN 可靠性的平均效用为 PU' , 在数值 PU' 的两侧找一个数值 PU'' 作为 HUDLZN 第 2 个分量的平均效用来构造 HUDLZN 的第 2 个分量, 使得 $0 \leq |PU' - PU''| < \varepsilon, \varepsilon$ 为任意小的正实数.

特殊地, 当 HULZN 的第 1 个分量只含有一个语言值, 且第 2 个分量的平均效用不为 $2r$ 时, 先对第 1 个分量作一个特殊转换, 找到与这个语言评价价值相邻的一个或者多个语言值, 再与这个语言值共同构成 HUDLZNs 的第 1 部分; 第 2 个分量的转换方法则不变.

4.3 基于离散 T 模和正理想方案的 HUDLZNs 多准则群决策方法

Step 1: 评估信息的标准化.

将评估矩阵 $D^k = (z_{ij}^k)_{m \times n}$ 规范化为

$$R^k = (r_{ij}^k)_{m \times n}.$$

其中: $r_{ij}^k = (RA_{ijk}, RB_{ijk}) = ([r_{ijk}^L, r_{ijk}^U], \tau(RA_{ijk}))$, $\tau(RA_{ijk}) = RB_{ijk}, \tau$ 是满射. 常见的准则类型有效益型和成本型, 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响, 首先需要对评估矩阵规范化.

对于效益型准则, 有

$$r_{ij}^k = z_{ij}^k = (A_{ijk}, B_{ijk}).$$

对于成本型准则, 有

$$r_{ijk}^k = \text{neg}(z_{ij}^k).$$

其中

$$\text{neg}(z_{ij}^k) = ([f^{-1}(f(s_{2l}^1)) - f(a_{ijk}^U)], f^{-1}(f(s_{2l}^1) - f(a_{ijk}^L))), \{b_{ijk_t} \in S^2, t = \theta_{ijk}(P_{ijk}), \theta_{ijk}(P_{ijk} - 1), \dots, \theta_{ijk}(1)\},$$

P_{ijk} 表示 A_{ijk} 中语言值的个数, $\theta_{ijk}(y) (y = 1, 2, \dots, P_{ijk})$ 表示 A_{ijk} 的第 y 个语言值, $b_{ijk_t} (t = \theta_{ijk}(1), \theta_{ijk}(2), \dots, \theta_{ijk}(P_{ijk}))$ 为 A_{ijk} 的第 t 个语言值的可靠性.

Step 2: 利用离散 T 模进行信息融合.

利用离散 T 模融合评估矩阵 $R^k (k = 1, 2, \dots,$

q), 得到一个综合评价矩阵

$$R = (r_{ij})_{m \times n},$$

$$r_{ij} = (RA_{ij}, RB_{ij}) =$$

$$([\text{ra}_{ij}^L, \text{ra}_{ij}^U], \{\text{rb}_{ij_t}, t = \theta_{ij}(1),$$

$$\theta_{ij}(2), \dots, \theta_{ij}(N_{ij})\}).$$

其中: $\text{ra}_{ij}^L, \text{ra}_{ij}^U$ 分别是 RA_{ij} 的上下限, N_{ij} 表示 RA_{ij} 中语言值的个数, $\theta_{ij}(y)(y = 1, 2, \dots, N_{ij})$ 表示 RA_{ij} 的第 y 个语言值, $b_{ij_t}(t = \theta_{ij}(1), \theta_{ij}(2), \dots, \theta_{ij}(N_{ij}))$ 为 RA_{ij} 的第 t 个语言值的可靠度。

Step 3: 计算准则的权重向量。

通常情况下, 准则的权重信息不能精确地给出, 但部分权重信息会粗略知道。参考文献 [7] 中 5.1 节对准则权重的分析, 本文考虑求解如下最优线性规划问题:

$$\max F(w_j) = \sum_{j=1}^m w_j \sum_{i=3}^n \sum_{c=1}^{i-1} d(r_{ij}, r_{cj});$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} w \in W, \\ \sum_{j=1}^m w_j = 1, \\ w_j \geq 0. \end{cases}$$

其中: $d(r_{ij}, r_{cj})$ 是 z_{ij} 与 z_{lj} 间的距离; 当准则的部分权重信息已知时, 用 $w \in W$ 来表示。

Step 4: 正理想方案 x^+ 。

设 $x^+ = (r_1^+, r_2^+, \dots, r_n^+)$ 为 R 正理想方案, 则有

$$r_j^+ = (A_j^+, B_j^+);$$

$$A_j^+ = [a_j^{+L}, a_j^{+U}],$$

$$a_j^{+L} = \max(a_{ij}^L), a_j^{+U} = \max(a_{ij}^U);$$

$$B_j^+ = \{b_{jt}^+ \in S^2, t = \theta_j(1), \theta_j(2), \dots, \theta_j(P_j^+)\}.$$

其中: $\theta_j(y)(y = 1, 2, \dots, P_j^+)$ 表示 A_j^+ 的第 y 个语言值, $b_{jt}^+(t = \theta_j(1), \theta_j(2), \dots, \theta_j(P_j^+))$ 为 A_j^+ 的第 t 个语言值的可靠性, P_j^+ 表示 A_j^+ 中语言值的个数。具体做法如下:

1) 确定 A_j^+ 的两个端点值 a_j^{+L} 和 a_j^{+U} , 继而 A_j^+ 也确定下来。

2) 具体确定 B_j^+ 中元素的值。由于知道 B_j^+ 中元素 b_i^+ 表示 A_j^+ 对应的第 i 个元素的可靠度, 首先找到 $r_{ij}(i = 1, 2, \dots, m)$ 中可靠度为 s_{2r}^2 的语言评价, 并把这些语言值所构成的集合记为 $\{(s_k^1)_{ij}, i = 1, 2, \dots, m\}$, $(s_k^1)_{ij}$ 表示 r_{ij} 中可靠度为 s_{2r}^2 的评价值; 然后从这个集合里取最大的评价, 记为 s_i^1 , 则 $s_i^1 = \max\{(s_k^1)_{ij}, i = 1, 2, \dots, m\}$, s_i^1 在正理想方案 x_j^+ 中的可靠度为 s_{2r}^2 。

3) 假设 s_i^1 是 A_j^+ 中第 h 个元素, 则 A_j^+ 中第 $h - k$ 个元素为 $s_{l-k}^1(k = 1, 2, \dots, h - 1, h)$, $r_{ij}(i = 1, 2, \dots, m)$ 中评价值 s_{l-k}^1 的可靠度记为 $\tau((s_{l-k}^1)_{ij})(i = 1, 2, \dots, m)$, 当评价值不存在时, 可靠度记为 $(s_0^1)_{ij}$ 。这些可靠度所构成的集合记为 $\{\tau((s_{l-k}^1)_{ij}), i = 1, 2, \dots, m\}$, 在这个集合里从可靠度小于 s_{2r}^2 的语言值中取最大的作为 s_{l-k}^1 在正理想方案中的可靠度 $b_{h-k}, b_{h-k} = \max\{\tau((s_{l-k}^1)_{ij}) \leq b_{h-k+1}, i = 1, 2, \dots, m\}$ 。

4) A_j^+ 中第 $h + K$ 个元素为 $s_{l+K}^1(K = 1, 2, \dots, P_j^+ - h)$, $r_{ij}(i = 1, 2, \dots, m)$ 中评价值 s_{l+K}^1 的可靠度记为 $\tau((s_{l+K}^1)_{ij})(i = 1, 2, \dots, m)$, 当评价值不存在时, 可靠度记为 $(s_0^1)_{ij}$ 。这些可靠度所构成的集合记为 $\{\tau((s_{l+K}^1)_{ij}), i = 1, 2, \dots, m\}$, 在这个集合里从可靠度小于 s_{2r}^2 的语言值中取最大的作为 s_{l+K}^1 在正理想方案中的可靠度 $b_{h+K}, b_{h+K} = \max\{\tau((s_{l+K}^1)_{ij}) \leq b_{h+K-1}, i = 1, 2, \dots, m\}$ 。

Step 5: 计算方案 x_i 与正理想方案 x^+ 之间的距离 $d(x_i, x^+)$ 。

根据距离的计算公式, 得到方案 x_i 与正理想方案 x^+ 之间的距离

$$d(x_i, x^+) = \sum_{j=1}^n w_j d(r_j^+, r_{ij}), i = 1, 2, \dots, m.$$

Step 6: 对方案排序。

$d(x_i, x^+)$ 值越小, 相应的方案 x_i 越靠前。

4.4 实例应用

4.4.1 实例说明

ABC 机械制造有限公司^[7]是一家专业从事汽车零部件及机械产品开发、制造、销售的中型汽车零部件制造商。公司的管理团队打算引入一个综合的 ERP 系统来提高竞争力, 成立了一个专业团队进行协助, 包括一个运营专家、一个总经理和一个生产经理组成 (e_1, e_2, e_3) 。最初, 收集了一些 ERP 系统和供应商的信息。在初步筛选后, 剔除了许多不合格的代替方案, 仅保留 4 个潜在的 ERP 系统 (x_1, x_2, x_3, x_4) 。专业团队选择以下 4 个标准来评价这些备选方案: 1) u_1 代表技术和功能; 2) u_2 代表供应商的能力和声誉; 3) u_3 代表战略适应度; 4) u_4 代表灵活性。经讨论, 给出了准则的部分权重信息 $W = \{0.2 \leq w_1 \leq 0.3, 0.16 \leq w_2 \leq 0.35, 0.12 \leq w_3 \leq 0.25, 0.1 \leq w_4 \leq 0.25, 1.5w_3 \leq w_1, 1.5w_4 \leq w_2\}$ 。3 个专家的评价结果以 HULZNS 的形式列于表格中。

本文对表格中的数据进行了转换, 使得每一个评估值 HULZNS 均以 HUDLZNS 的形式列于表 1 中。

表1 e_v 的决策矩阵 D^v

v	方案	u_1	u_2	u_3	u_4
1	x_1	$([s_5^1, s_6^1], \{s_2^2, s_8^2\})$	$([s_4^1, s_6^1], \{s_5^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_4^1, s_6^1], \{s_6^2, s_8^2, s_7^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_3^2, s_8^2\})$
	x_2	$([s_6^1, s_7^1], \{s_4^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_6^2, s_8^2, s_6^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_3^2, s_8^2\})$	$([s_4^1, s_6^1], \{s_3^2, s_8^2, s_5^2\})$
	x_3	$([s_3^1, s_5^1], \{s_2^2, s_8^2, s_6^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_4^2, s_8^2\})$	$([s_4^1, s_6^1], \{s_3^2, s_8^2, s_4^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2, s_4^2\})$
	x_4	$([s_5^1, s_7^1], \{s_1^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_4^1, s_5^1], \{s_3^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_5^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_4^2, s_8^2, s_6^2\})$
2	x_1	$([s_4^1, s_6^1], \{s_2^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_4^1, s_6^1], \{s_5^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_5^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_1^2, s_8^2\})$
	x_2	$([s_5^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2, s_6^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_4^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_6^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_4^1, s_5^1], \{s_3^2, s_8^2\})$
	x_3	$([s_4^1, s_5^1], \{s_2^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_5^2, s_8^2, s_7^2\})$	$([s_6^1, s_8^1], \{s_5^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_6^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2\})$
	x_4	$([s_6^1, s_7^1], \{s_6^2, s_8^2\})$	$([s_4^1, s_5^1], \{s_3^2, s_8^2\})$	$([s_6^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_5^2, s_8^2\})$
3	x_1	$([s_5^1, s_7^1], \{s_2^2, s_8^2, s_6^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_5^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_4^1, s_5^1], \{s_3^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2, s_4^2\})$
	x_2	$([s_5^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2, s_7^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_6^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_4^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_3^2, s_8^2\})$
	x_3	$([s_5^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2, s_6^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_4^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_4^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_4^1, s_6^1], \{s_1^2, s_8^2, s_5^2\})$
	x_4	$([s_4^1, s_6^1], \{s_2^2, s_8^2, s_4^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_5^2, s_8^2, s_7^2\})$	$([s_5^1, s_6^1], \{s_4^2, s_8^2\})$	$([s_5^1, s_7^1], \{s_3^2, s_8^2, s_4^2\})$

4.4.2 方法应用

为方便起见,计算距离时,令

$$f(s_i) = H_{11}(s_i) =$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \left\| \frac{i}{t} - 1 \right\|^{1.08} + \frac{1}{2}, & i = 0, 1, \dots, t; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{i}{t} - 1 \right)^{1.08} + \frac{1}{2}, & i = t + 1, t + 2, \dots, 2t; \end{cases}$$

$$g(s_i) = H_{21}(s_i) = \theta_i =$$

$$\frac{1}{2} \tan \left(\frac{i}{4t} \pi - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, 2t;$$

且 $\lambda = 1$. 用 T 模融合 HUDLZNs 时, 取 $f(s_i^1) = H_4(s_i^1) = i (i = 1, 2, \dots, 2t)$.

Step 1: 评估信息的标准化. 在本例中没有必要对评价信息标准化, 因所有的标准都是效益型, 故

$$R^k = (r_{ij}^k)_{m \times n} = (z_{ij}^k)_{m \times n}.$$

Step 2: 利用 Lukasiewica T 模, 即 $T = \max\{0, x + y - 8\}$ 融合 3 个专家的评价, 得到表 2.

表2 集成后的决策矩阵 R

方案	u_1	u_2
x_1	$([s_0^1, s_2^1], \{s_5^2, s_8^2, s_6^2\})$	$([s_0^1, s_3^1], \{s_8^2, s_5^2, s_5^2, s_5^2\})$
x_2	$([s_0^1, s_5^1], \{s_3^2, s_3^2, s_4^2, s_8^2, s_7^2, s_6^2\})$	$([s_0^1, s_3^1], \{s_6^2, s_6^2, s_8^2, s_6^2\})$
x_3	$([s_0^1, s_1^1], \{s_8^2, s_6^2\})$	$([s_0^1, s_4^1], \{s_4^2, s_5^2, s_8^2, s_7^2, s_5^2\})$
x_4	$([s_0^1, s_4^1], \{s_3^2, s_6^2, s_8^2, s_6^2, s_4^2\})$	$([s_0^1, s_1^1], \{s_8^2, s_7^2\})$
方案	u_3	u_4
x_1	$([s_0^1, s_1^1], \{s_8^2, s_7^2\})$	$([s_0^1, s_3^1], \{s_3^2, s_3^2, s_8^2, s_4^2\})$
x_2	$([s_0^1, s_3^1], \{s_4^2, s_5^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_0^1, s_1^1], \{s_8^2, s_5^2\})$
x_3	$([s_0^1, s_5^1], \{s_4^2, s_5^2, s_8^2, s_5^2, s_5^2, s_4^2\})$	$([s_0^1, s_4^1], \{s_3^2, s_3^2, s_8^2, s_5^2, s_4^2\})$
x_4	$([s_0^1, s_4^1], \{s_3^2, s_4^2, s_5^2, s_8^2, s_5^2\})$	$([s_0^1, s_4^1], \{s_4^2, s_5^2, s_8^2, s_6^2, s_4^2\})$

Step 3: 计算准则的权重向量. 根据 4.3 节准则权重的确定方法, 利用 Matlab 得到最优化模型中 4 个准则权重的系数向量 (0.367 2, 0.891 1, 0.570 4, 0.532 2), 加上实例中所给部分权重信息, 解得准则的权重向量为

$$w = (0.250 0, 0.350 0, 0.166 7, 0.233 3).$$

Step 4: 正理想方案 $x^+ = (r_1^+, r_2^+, \dots, r_n^+)$. 根据

第 4.3 节 Step 4, 得到正理想方案

$$x^+ = (r_1^+, r_2^+, r_3^+, r_4^+),$$

$$r_1^+ = ([s_0^1, s_5^1], \{s_8^2, s_8^2, s_8^2, s_8^2, s_7^2, s_6^2\}),$$

$$r_2^+ = ([s_0^1, s_4^1], \{s_6^2, s_7^2, s_8^2, s_7^2, s_5^2\}),$$

$$r_3^+ = ([s_0^1, s_5^1], \{s_4^2, s_7^2, s_8^2, s_8^2, s_5^2, s_4^2\}),$$

$$r_4^+ = ([s_0^1, s_4^1], \{s_4^2, s_5^2, s_8^2, s_6^2, s_4^2\}).$$

Step 5: 计算方案 x_i 与正理想方案 x^+ 之间的距离 $d(x_i, x^+)$. 根据距离计算公式, 当 $\lambda = 1$ 时, 得到距离矩阵

$$D(x_i, x^+) = (d(r_j, r_j^+))_{4 \times 4} = (r_j^+, d(r_j))_{4 \times 4},$$

进一步, 得到方案 x_i 与正理想方案 x^+ 之间的距离

$$d(x_i, x^+) = \sum_{j=1}^4 w_j d(r_j^+, r_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, 4.$$

计算结果如下:

$$D(x^+, x_i) = D(x_i, x^+) = \begin{bmatrix} 0.1950 & 0.1632 & 0.2560 & 0.1759 \\ 0.1246 & 0.0318 & 0.0541 & 0.1855 \\ 0.1847 & 0.0165 & 0.0146 & 0.0595 \\ 0.0029 & 0.1257 & 0.0603 & 0 \end{bmatrix},$$

$$d(x_1, x^+) = 0.1238, \quad d(x_2, x^+) = 0.0840,$$

$$d(x_3, x^+) = 0.0994, \quad d(x_4, x^+) = 0.1188.$$

Step 6: 依据 $d(x_i, x^+)$ 对方案排序. $d(x_i, x^+)$ 值越小, 相应的方案 x_i 越靠前, 可得 $x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_1$, 故最优方案为 x_2 .

5 灵敏度分析

为了探讨距离参数和语言尺度函数对最终排序的影响, 本文考虑不同的 λ 值及 f 和 g 不同组合, 借助于 Matlab 计算工具, 最终结果如表 3 所示. 这里只考虑了 $H_{11}(k = 1.08)$ 、 H_{21} 、 H_{31} 这三类不同特征的语言尺度函数.

表 3 不同语言尺度函数和不同 λ 的排序结果(本文方法)

f 和 g 不同组合	$\lambda \geq 1$
$f(s_i) = H_{11}(s_i); g(s_i) = H_{21}(s_i)$	x_2, x_3, x_4, x_1
$f(s_i) = H_{21}(s_i); g(s_i) = H_{11}(s_i)$	x_2, x_3, x_1, x_4
$f(s_i) = H_{11}(s_i); g(s_i) = H_{31}(s_i)$	x_2, x_3, x_1, x_4
$f(s_i) = H_{31}(s_i); g(s_i) = H_{11}(s_i)$	x_2, x_3, x_4, x_1
$f(s_i) = H_{21}(s_i); g(s_i) = H_{31}(s_i)$	x_2, x_3, x_1, x_4
$f(s_i) = H_{31}(s_i); g(s_i) = H_{21}(s_i)$	x_2, x_3, x_4, x_1

仔细观察表 3, 可得到以下 3 条信息:

1) 3 个语言尺度函数的两两不同组合, 伴随 λ 取值的改变, 对方案排序的影响不大, 所得排序结果有两种: ① x_2, x_3, x_4, x_1 ; ② x_2, x_3, x_1, x_4 . 最优方案始终是方案 x_2 .

2) 不同语言尺度函数的组合所得到的排序结果

并不随着 λ 值的改变而改变, 从而可以得出结论, 距离测度并不受 λ 值的影响.

3) 当 f 和 g 所选语言尺度函数互换时, 排序结果发生改变, 其中只有方案 x_1 和方案 x_4 的排序发生变化, 方案 x_2 和方案 x_3 的排序不变, 这是因为所选择的 3 类语言尺度函数分别具有不同的特征: 当 f 和 g 所选的语言尺度函数在所给语言术语从中间往两边延伸的过程中, f 的绝对偏差的单调性大于 g 的绝对偏差的单调性时, 方案 x_4 优于方案 x_1 ; f 的绝对偏差的单调性小于 g 的绝对偏差的单调性时, 方案 x_1 优于方案 x_4 .

以上信息说明: 当 λ 保持不变, 不同语言尺度函数组合时对排序结果产生影响; 进而得出不同的语义环境下, 对方案的排序结果也造成影响. 为了简便, 用 “ x_i, x_j, x_k, x_l ” 来表示 “ $x_i \succ x_j \succ x_k \succ x_l$ ”.

6 比较分析和讨论

为了验证本文所提出方法的灵活性和有效性, 与已有方法进行对比分析. 本文的实例分析是基于文献 [7] 中的实例, 将其中的 HULZNs 转换成 HUDLZNs, 利用本文所提出的方法对方案进行排序, 所得排序结果有两种: 1) x_2, x_3, x_4, x_1 ; 2) x_2, x_3, x_1, x_4 . 而文献 [7] 由两种算子所得排序结果中, 由于受算子、距离测度和语言尺度函数的影响, 当 $1 \leq \lambda \leq 5$ 时, 方案 x_1 、方案 x_3 和方案 x_4 排名有所改变, 方案 x_2 始终处于领先的位置; 当 $\lambda \geq 5$ 时, 排序结果最终趋于一致, 即 x_2, x_3, x_4, x_1 , 与本文所得两种排序结果中的第 1 种相一致. 无论哪两种语言尺度函数组合, λ 取何值, 方案 x_2 始终是最优方案, 这与本文所得到的最优方案是方案 x_2 相一致, 从而表明了本文所提出方法的有效性.

另外, 本文方法是基于最优方案和距离的排序, 方法简单、计算量少, 充分体现了该方法的灵活性. 文献 [7] 得到的排序结果与本文方法所得排序结果存在上述微小的差异, 其原因可能是 HULZNs 与 HUDLZNs 转化过程中存在信息的丢失、没有考虑专家的主观偏好以及语言尺度函数的选取不一样. 为了探究尺度函数的选取对排序差异的影响, 本文使用文献 [7] 实例分析中的 3 类尺度函数 (H_1^*, H_2^*, H_3^*) 代替本文所选取的 3 类语言尺度函数, 二者的特征形态类似, 但略有差异, 所得排序结果见表 4. 观察发现排序结果与表 3 并无差异, 从而排除了语言尺度函数对排序差异的影响. 需要说明的是, 本文大部分计算都依赖于 Matlab, 大大提高了计算效率.

表4 不同语言尺度函数和不同 λ 的排序结果(文献[7]方法)

f 和 g 不同组合	$\lambda \geq 1$
$f(s_i) = H_1^*(s_i); g(s_i) = H_2^*(s_i)$	x_2, x_3, x_4, x_1
$f(s_i) = H_2^*(s_i); g(s_i) = H_1^*(s_i)$	x_2, x_3, x_1, x_4
$f(s_i) = H_1^*(s_i); g(s_i) = H_3^*(s_i)$	x_2, x_3, x_1, x_4
$f(s_i) = H_3^*(s_i); g(s_i) = H_1^*(s_i)$	x_2, x_3, x_4, x_1
$f(s_i) = H_2^*(s_i); g(s_i) = H_3^*(s_i)$	x_2, x_3, x_1, x_4
$f(s_i) = H_3^*(s_i); g(s_i) = H_2^*(s_i)$	x_2, x_3, x_4, x_1

7 结论

在多数决策问题中,决策者会使用Z-numbers和语言术语来提高决策信息的可靠性和反应决策信息的模糊性,为了处理这种情况,本文提出了一种特殊的Z-numbers,即犹豫不确定离散语言Z-numbers(HUDLZNs),它结合了Z-numbers和语言尺度函数的优点.首先使用语言尺度函数定义了HUDLZNs的距离;然后,定义了基于离散 T 模和 C^λ 截集的HUDLZNs信息融合;最后,提出了一种HUDLZNs的多准则群决策方法.借助于文献[7]的实例,利用HULZNs向HUDLZNs的转化,通过灵敏度分析的比较,验证了本文方法的有效性和简洁性.

下一步的研究将集中于把本文提出的方法应用到更多实际决策问题中.需要说明的是,信息转换过程中可能会出现信息的缺失,这个问题将会在后期的研究中加以改进,并把专家权重考虑进去.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. A note on Z-numbers[J]. Information Sciences, 2011, 181(14): 2923-2932.
- [2] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning — I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.
- [3] Chen Y H, Wang T C, Wu C Y. Multi-criteria decision making with fuzzy linguistic preference relations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(3): 1322-1330.
- [4] Rodríguez R M, Labella Á, Martínez L. An overview on fuzzy modelling of complex linguistic preferences in decision making[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2016, 9(S): 81-94.
- [5] Xu Z S. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment[J]. Information Sciences, 2004, 168(1): 171-184.
- [6] Wang J Q, Cao Y X, Zhang H Y. Multi-criteria decision-making method based on distance measure and choquet integral for linguistic Z-numbers[J]. Cognitive Computation, 2017, 9(6): 827-842.
- [7] Peng H G, Wang J Q. Hesitant uncertain linguistic Z-numbers and their application in multi-criteria group decision-making problems[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1300-1316.
- [8] Wang J, Wang J Q, Zhang H Y. A likelihood-based TODIM approach based on multi-hesitant fuzzy linguistic information forevaluation in logistics outsourcing[J]. Computers and Industrial Engineering, 2016, 99: 287-299.
- [9] Wang J Q, Wu J T, Wang J, et al. Multi-criteria decision-making methods based on the Hausdorff distance of hesitant fuzzy linguistic numbers[J]. Soft Computing, 2016, 20(4): 1621-1633.
- [10] De Baets B, Mesiar B. Triangular norms on product lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 104(1): 61-75.
- [11] Zhang D. Triangular norms on partially ordered sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(2): 195-209.
- [12] Casanovas J, Riera J V. Extension of discrete t -norms and t -conorms to discrete fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 167(1): 65-81.
- [13] George J Klir, Bo Yuan. Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995.

作者简介

毛军军(1973—),女,教授,博士,从事人工智能、数据挖掘与多属性决策等研究, E-mail: maojunjun@ahu.edu.cn;

张丽平(1992—),女,硕士生,从事智能计算与统计决策的研究, E-mail: 1213770319@qq.com.

(责任编辑:李君玲)