

## 基于退化数据与 marker 数据综合的产品可靠性建模分析

郑 龙<sup>1</sup>, 杜永浩<sup>2</sup>, 邢立宁<sup>2†</sup>, 彭宝华<sup>2</sup>, 周忠宝<sup>1</sup>, 文 龙<sup>3</sup>

(1. 湖南大学 工商管理学院, 长沙 410082; 2. 国防科技大学 系统工程学院, 长沙 410073; 3. 西安卫星测控中心 地面网管理中心, 西安 710043)

**摘 要:** 基于性能退化数据的可靠性建模分析方法, 为现代工业中长寿、高可靠产品的可靠性研究提供了重要途径, 但在破坏性测量中无法获得足够的产品性能退化数据. 对此, 综合利用产品性能退化数据和 marker 数据对产品可靠性进行建模, 不仅能够提高可靠性评估的精度, 还可以在产品运行过程中通过对 marker 的测量来预测产品剩余寿命, 从而为产品维修、更换以及备件决策提供依据. 采用二元 Wiener 过程对产品的性能参数和 marker 进行建模, 给出模型参数的估计方法和基于 marker 测量数据的剩余寿命预测方法, 并通过仿真示例验证所提出方法的有效性.

**关键词:** 可靠性建模; 性能退化; marker; 二元 Wiener 过程; 寿命预测; 参数估计

中图分类号: TB114.3

文献标志码: A

## Product reliability modeling and analysis using degradation and marker data

ZHENG Long<sup>1</sup>, DU Yong-hao<sup>2</sup>, XING Li-ning<sup>2†</sup>, PENG Bao-hua<sup>2</sup>, ZHOU Zhong-bao<sup>1</sup>, WEN Long<sup>3</sup>

(1. Business School, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. College of Systems Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 3. Ground Station Network Management Center, Xi'an Satellite Monitoring and Control Center, Xi'an 710043, China)

**Abstract:** The method of reliability modeling and analysis based on performance degradation data provides an important way for the reliability research of long life and high reliability products in modern industry, but the degradation data cannot be obtained adequately during a destructive inspection. To solve this problem, this paper proposes to use both degradation data and marker data to make reliability inference, which can improve the precision of reliability inference, and make residual lifetime distribution prediction available through inspection of marker during working, contributing to the decision making in maintenance, replacement and spare parts. The performance degradation and marker are modeled with a bivariate Wiener process and, the methods for parameter estimation and residual lifetime distribution prediction are provided. Finally, a simulated example is presented to show the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** reliability modeling; degradation; marker; bivariate Wiener process; lifetime prediction; parameter estimation

## 0 引 言

现代工业中许多产品都具有可靠性高、寿命长的使用特点, 但受试验时间、环境和成本等限制, 其寿命数据通常很难获得, 传统的可靠性分析方法也难以对其进行可靠性建模分析. 除了寿命数据以外, 产品的性能退化数据也是可靠性建模分析研究丰富的信息来源<sup>[1-2]</sup>.

基于性能退化数据的可靠性研究通常首先通过

性能退化数据的采集建立性能退化过程模型, 然后在退化模型的基础上进行可靠性统计推断. 目前, 产品性能参数的测量方法主要分为两种: 1) 非破坏性测量法, 即产品性能的测量试验不影响产品的继续工作; 2) 破坏性测量法, 即产品性能的测量试验中产品遭到破坏, 无法继续工作. 在非破坏性测量试验中, 可以对同一产品进行多次测量, 从而获取较多的性能退化数据, 能够在产品运行过程中, 基于非破坏

收稿日期: 2018-05-06; 修回日期: 2018-07-25.

基金项目: 国家 863 计划项目 (2011AA7074112); 国家自然科学基金项目 (61773120, 71331008, U1501254); 高等学校全国优秀博士学位论文作者专项资金项目 (2014-92); 湖南省教育科学“十三五”规划项目 (XJK016BGD009); 湖南省教改项目 (20150001); 广东省科技计划项目 (2015B010131015, 2015B010108006); 广东省高等学校国际暨港澳台科技合作创新平台项目 (2015KGGJHZ023).

责任编辑: 王凌.

† 通讯作者. E-mail: xinglining@gmail.com.

性数据完成产品剩余寿命的预测.而在破坏性测量试验中,产品只能被测量一次,而后便会退出试验,故无法获得充足的产品性能退化数据,很难在产品运行过程中有效预测其剩余寿命<sup>[3-4]</sup>.

某些性能退化产品在运行或试验过程中可以测量到与其性能参数相关的参数,这些参数称为marker.因两者相关,故marker测量数据中包含着产品重要的可靠性信息.许多学者研究了marker数据在可靠性工程以及生存分析中的应用. Jewell等<sup>[5]</sup>和Yang<sup>[6]</sup>分别对生存分析中marker数据的利用进行了探讨. Parast等<sup>[7]</sup>将患者血液中CD4细胞的数量作为人体健康状况的marker,以此分析了患者的剩余寿命情况.针对铝电解槽可靠性分析问题,Whitmore等<sup>[8]</sup>引入产品性能参数和marker服从二元Wiener过程的可靠性模型,采集了电解槽铁污染百分比和水平变形尺寸的marker数据,基于寿命信息与对应时刻的marker信息,对电解槽进行了可靠性评估.类似地, Tong等<sup>[9]</sup>将体重作为肿瘤病患者健康状况的marker,对Whitmore的模型进行了进一步的研究. Newby等<sup>[10]</sup>基于一类二元随机过程对产品的marker信息和状态变量进行建模,并将其成功应用于产品的维修决策中.此外, Economou等<sup>[11]</sup>在研究贝叶斯阈值回归问题时,同样考虑了marker数据的利用问题.

针对破坏性测量试验的情形,由于可获得的性能退化数据很少,可以结合marker数据完成可靠性建模与分析.一方面,综合利用两种数据能够提升性能退化过程参数的估计精度,有助于提高产品可靠性评估水平;另一方面,在不影响产品正常工作的情况下,可以通过对marker的测量预测产品性能参数退化量及剩余寿命分布,从而为产品维修、更换以及备件的决定提供依据<sup>[12-13]</sup>.

开展基于性能退化数据和marker数据的产品可靠性建模分析前,首先需要确定产品的性能参数与marker之间是否满足相关性.若两者存在确定的函数关系,则对marker数据进行转换后可直接用于产品可靠性建模.该建模过程与一般的基于性能退化的可靠性建模过程相同,本文不考虑这种情况,而主要考虑性能退化数据与marker之间存在统计相关关系的情形.由于一元Wiener过程广泛应用于产品性能退化建模研究中,本文研究产品的性能退化背景为一元Wiener过程.另外,考虑到二元Wiener在描述产品性能参数与marker关系中应用较多<sup>[8]</sup>,本文假设产品的性能参数和marker均服从二元Wiener过程.另外,

基于产品性能测量值和marker测量值的联合分布,本文给出一种参数估计方法和产品的寿命分布,进而给出产品运行过程中基于marker数据的剩余寿命分布预测方法.最后,通过仿真示例分析验证了所提出方法的合理性.

## 1 联合建模及参数估计

在联合建模的过程中,记产品的性能参数为 $Y$ ,记marker为 $X$ ,并假设 $(X(t) Y(t))'$ 服从二元Wiener过程,初始时刻 $X(0) = 0, Y(0) = 0$ .于是时刻 $t$ ,有

$$(X(t) Y(t))' \sim N(t\boldsymbol{\mu}, t\boldsymbol{\Sigma}).$$

其中

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_x \mu_y)', \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \sigma_{xy} = \rho\sigma_x\sigma_y,$$

$\rho$ 为两者相关系数.该模型与Whitmore等<sup>[8]</sup>提出的模型相同,但Whitmore对产品进行了寿命试验,得到了产品的(截尾)寿命数据和试验结束时刻的一个marker数据.而本文针对的是破坏性测量的性能退化产品,由于试验的破坏性,只能得到试验结束时刻的产品性能参数值.同时,假设试验过程中可以对产品marker进行多次非破坏性测量,获取多个时刻的marker数据,因此,产品在一次试验中可以获得一个性能退化数据和多个marker数据.本节将综合利用上述两种数据开展可靠性建模分析.

### 1.1 联合建模

在产品 $i$ 的性能退化试验过程中,分别于时刻 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im_i}$ 对产品marker开展第 $m_i$ 次测量.因产品性能参数测量是破坏性的,故仅在时刻 $t_{im_i}$ 对其性能参数进行一次测量,随后产品将被破坏并退出试验.图1表示了产品 $i$ 在试验过程中的数据测量时刻.其中:空心圆 $\circ$ 表示对marker进行测量,实心圆 $\bullet$ 表示对性能参数进行测量.

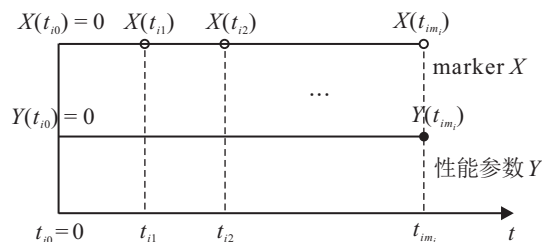


图1 产品性能参数与marker测量时刻

记相邻两次marker数据测量时刻的间隔为 $\Delta t_{ij} = t_{ij} - t_{i(j-1)}$ ,于是,marker的变化量可以表示为 $\Delta X(t_{ij}) = X(t_{ij}) - X(t_{i(j-1)})$ ,产品性能的变化量表示为 $\Delta Y(t_{ij}) = Y(t_{ij}) - Y(t_{i(j-1)})$ ,其中 $j = 1, 2, \dots, m_i$ .假设所有产品在初始时刻的marker



$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{nm} \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{(\Delta x_{ij})^2}{\Delta t_j} - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_{im} \right)^2}{nt_m} \right].$$

同样地,对  $B$  中元素的顺序进行交换,记  $W = (Y(t_{im}) \ X(t_{i1}) \ X(t_{i2}) \ \cdots \ X(t_{im}))'$ , 于是  $W$  也服从  $m + 1$  维正态分布,即  $W \sim N(\mu_W, \Sigma_W)$ . 其中

$$\mu_W = (\mu_y t_m \ \mu_x t_1 \ \mu_x t_2 \ \cdots \ \mu_x t_m)',$$

$$\Sigma_W = \begin{bmatrix} \Sigma_{W11} & \Sigma_{W12} \\ \Sigma_{W21} & \Sigma_{W22} \end{bmatrix}, \Sigma_{W11} = \sigma_y^2 t_m,$$

$$\Sigma_{W12} = \sigma_{xy} (t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_m),$$

$$\Sigma_{W22} = \sigma_x^2 \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{bmatrix}.$$

试验过程中产品  $i$  的 marker 测量值为

$$x_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \cdots \ x_{im})',$$

记  $\mu_1 = \hat{\mu}_x (t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_m)'$ , 由正态分布性质可知, 给定  $x_i$  下的产品性能退化量  $Y_{im}$  服从一元正态分布, 即

$$Y_{im} | x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im} \sim N(\mu_{Y_{im}}, \sigma_{Y_{im}}^2). \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_{Y_{im}} &= \mu_y t_m + \Sigma_{W12} \Sigma_{W22}^{-1} (x_i - \mu_1), \\ \sigma_{Y_{im}}^2 &= \sigma_y^2 t_m - \Sigma_{W12} \Sigma_{W22}^{-1} \Sigma_{W21}. \end{aligned} \quad (3)$$

记常数  $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$  和  $D$  分别为

$$C_i = (t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_m) \times \frac{1}{\hat{\sigma}_x^2} \times \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{bmatrix}^{-1} \times (x_i - \mu_1), \quad (4)$$

$$D = (t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_m) \times \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}, \quad (5)$$

则  $\mu_{Y_{im}} = \mu_y t_m + \sigma_{xy} C_i, \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D$ . 于是, 对数似然函数可用下式表示:

$$\ln L(\mu_y, \sigma_{xy}, \sigma_y^2) =$$

$$-\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D) - \frac{1}{2(\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D)} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{im} - \mu_y t_m - \sigma_{xy} C_i)^2. \quad (6)$$

基于极大似然方法,分别对式(6)参数  $\mu_y, \sigma_{xy}$  和  $\sigma_y^2$  求偏导,并令其为零,可得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu_y} \ln L(\mu_y, \sigma_{xy}, \sigma_y^2) = \frac{t_m}{\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D} \sum_{i=1}^n (y_{im} - \mu_y t_m - \sigma_{xy} C_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_{xy}} \ln L(\mu_y, \sigma_{xy}, \sigma_y^2) = \frac{nD\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D} - \frac{D\sigma_{xy}}{(\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D)^2} \times \sum_{i=1}^n (y_{im} - \mu_y t_m - \sigma_{xy} C_i)^2 \frac{1}{(\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D)} \times \sum_{i=1}^n C_i (y_{im} - \mu_y t_m - \sigma_{xy} C_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_y^2} \ln L(\mu_y, \sigma_{xy}, \sigma_y^2) = -\frac{nt_m}{2(\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D)} + \frac{t_m}{2(\sigma_y^2 t_m - \sigma_{xy}^2 D)^2} \times \sum_{i=1}^n (y_{im} - \mu_y t_m - \sigma_{xy} C_i)^2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

对方程组进行求解,得到

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{xy} = \frac{n \sum_{i=1}^n C_i y_{im} - \sum_{i=1}^n y_{im} \sum_{i=1}^n C_i}{n \sum_{i=1}^n C_i^2 - \sum_{i=1}^n C_i}, \\ \hat{\mu}_y = \frac{1}{nt_m} \left( \sum_{i=1}^n y_{im} - \hat{\sigma}_{xy} \sum_{i=1}^n C_i \right), \\ \hat{\sigma}_y^2 = \frac{D}{t_m} \hat{\sigma}_{xy}^2 + \frac{1}{nt_m} \sum_{i=1}^n (y_{im} - \hat{\mu}_y t_m - \hat{\sigma}_{xy} C_i)^2. \end{cases} \quad (8)$$

## 2 产品寿命分布

产品的寿命通常用产品性能退化量首次达到失效阈值的时间来表示. 假设产品的失效阈值为  $l$ , 当仅考虑产品性能参数  $Y$  时,  $Y(t)$  服从一元 Wiener 过程, 于是, 产品寿命  $T$  可用下式表示:

$$T = \inf\{t | X(t) \geq l, t \geq 0\}. \quad (9)$$

基于 Fokker-Planck 方程 (Kolmogorov 向前方程)<sup>[14]</sup>, Chikkara 等<sup>[15]</sup> 和 Seshadri<sup>[16]</sup> 推导出产品寿命  $T$  服从逆高斯分布, 即

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\mu_y t - l}{\sigma_y \sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{2\mu_y l}{\sigma_y^2}\right) \Phi\left(\frac{-l - \mu_y t}{\sigma_y \sqrt{t}}\right), \quad (10)$$

其中  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  表示标准正态分布函数. 因此, 产品寿命  $T$  的概率密度函数可以表示为

$$f(t) = \sqrt{\frac{l^2}{2\pi\sigma_y^2 t^3}} \exp\left[-\frac{(l - \mu_y t)^2}{2\sigma_y^2 t}\right]. \quad (11)$$

可见, 产品寿命  $T$  的概率分布仅与  $\mu_y$ 、 $\sigma_y$  和  $l$  有关, 故由式(8)和产品失效阈值  $l$  即可对产品寿命  $T$  的分布进行估计.

### 3 剩余寿命预测

假设某产品在运行过程中在时刻  $t_1, t_2, \dots, t_k$  测得其 marker 的数据为  $X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_k) = x_k$ . 由式(2)可知, 产品在  $t_k$  时刻的性能参数退化量  $Y_k$  服从一元正态分布

$$Y_k | x_1, x_2, \dots, x_k \sim N(\mu_{Y_k}, \sigma_{Y_k}^2),$$

其中  $\mu_{Y_k}$  和  $\sigma_{Y_k}^2$  可由式(3)得到.

由一元 Wiener 过程的齐次马尔科夫性和独立增量的性质可知, 产品的剩余寿命也服从逆高斯分布. 设  $t_k$  时刻产品性能退化量为  $y_k (y_k < l)$ , 若到达  $t_k$  时刻时产品还未失效, 则利用当前产品性能值  $l - y_k$  替换式(11)中的失效阈值  $l$ , 可得其剩余寿命的分布为

$$f(t) = \sqrt{\frac{(l - y_k)^2}{2\pi\sigma_y^2 t^3}} \exp\left[-\frac{(l - y_k - \mu_y t)^2}{2\sigma_y^2 t}\right], \quad (12)$$

其中  $y_k$  服从正态分布  $y_k \sim N(\mu_{Y_k}, \sigma_{Y_k}^2)$ . 于是有

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^l \sqrt{\frac{(l - y_k)^2}{2\pi\sigma_y^2 t^3}} \exp\left[-\frac{(l - y_k - \mu_y t)^2}{2\sigma_y^2 t}\right] \times \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_k}^2}} \exp\left[-\frac{(y_k - \mu_{Y_k})^2}{2\sigma_{Y_k}^2}\right] dy_k = \\ &\quad \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{Y_k}^2 \sigma_y^2 t^3}} \cdot \int_{-\infty}^l (l - y_k) \times \\ &\quad \exp\left[-\frac{(l - y_k - \mu_y t)^2}{2\sigma_y^2 t} - \frac{(y_k - \mu_{Y_k})^2}{2\sigma_{Y_k}^2}\right] dy_k. \end{aligned} \quad (13)$$

本节给出的基于性能退化数据的剩余寿命分布预测方法与下式所示的传统可靠性理论中的方法存在一定区别:

$$F(t) = P\{T \leq t + t_k | T > t_k\} = \frac{F(t + t_k) - F(t_k)}{1 - F(t_k)}. \quad (14)$$

基于性能退化数据的剩余寿命分布主要受到产品在时刻  $t_k$  的性能退化量  $y_k$  的影响; 而传统方法主要与

产品的运行时间  $t_k$  相关, 缺乏性能退化数据对寿命预测的支持.

此外, 本文针对的是产品初始性能退化量均为零的场景, 若某些产品的初始性能退化量  $X(0) \neq 0$ , 则需将产品的失效阈值更改为  $l - X(0)$ , 即可将该产品等效为初始性能退化量为零的个体, 并利用式(13)对其剩余寿命进行预测.

### 4 仿真示例

在产品性能参数和 marker 服从二元 Wiener 过程的仿真环境下, 参数  $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho) = (1.0, 0.1, 0.1, 0.4, 0.75)$ . 令产品的失效阈值  $l = 3$ , 则产品平均寿命为  $l/\mu_y = 30$ . 根据式(10)和(11)可得产品寿命分布和概率密度函数, 其平均寿命则是失效阈值在概率上的体现. 取时间步长 0.01 建立  $n = 30$  条仿真样本路径, 取每条样本路径在时刻  $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 5$  的 marker 值和时刻  $t_5 = 5$  的性能参数值作为产品的仿真实验数据, 如表 1 所示.

表 1 仿真实验数据

$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$	$x_{i4}$	$x_{i5}$	$y_{i5}$
1.0266	1.919	2.9858	4.1635	5.1731	1.3646
0.97128	1.9564	2.8811	3.7638	4.6814	-1.7309
1.0924	2.0504	3.048	4.1284	5.0111	0.32368
1.0621	2.0521	2.9758	4.0212	5.1307	0.99951
0.94891	2.0003	3.0845	3.9611	4.9151	-0.08588
0.90495	2.0044	3.0508	4.1757	5.0275	0.8561
0.97736	1.7897	2.8932	3.8981	4.8679	0.95564
1.0333	1.8993	2.8837	3.9547	4.9962	0.59729
0.96957	1.8876	2.8843	3.7726	4.9173	0.62484
1.1189	2.1407	3.0808	4.2271	5.3749	2.257
1.0591	2.0183	2.9756	3.937	4.9862	0.18516
0.99686	1.8524	2.797	3.7303	4.6605	-0.88799
0.97685	2.0573	3.0099	3.9713	4.968	0.89732
1.1295	2.0278	3.08	4.0823	4.9022	-0.07659
1.0944	2.008	3.0794	4.0738	5.144	0.98363
1.0353	2.0351	2.9995	3.9626	4.8958	0.36931
0.83553	1.8423	2.8621	3.802	4.7036	-0.83054
1.0165	2.1573	3.2652	4.4118	5.3987	1.635
0.99148	1.9381	3.0513	4.0188	4.9399	-0.21816
0.94298	1.9703	3.1209	4.152	5.1772	1.1721
0.8497	1.7903	2.8471	3.8634	4.9511	0.17706
0.97488	1.9517	2.8658	4.0077	5.0052	0.35624
0.9537	1.9726	2.9813	3.9637	4.9254	0.31714
1.0379	2.0618	3.1325	4.2643	5.1675	0.98304
1.0219	1.9635	2.9713	3.8793	4.8474	1.2875
1.1763	2.245	3.234	4.1898	5.1553	1.0042
1.179	2.173	3.2274	4.2042	5.067	1.1943
0.91689	1.8342	2.8697	3.78	4.8489	0.12089
1.0778	2.0781	3.0457	3.9963	4.9978	0.20682
0.96141	1.8929	2.752	3.8722	4.8949	0.86466

值得注意的是,因本文基于一元 Wiener 过程并非单调,故表1中 $t_5 = 5$ 时刻产品性能参数值出现少数负值的情况,不过当一元 Wiener 过程参数 $\mu_y$ 相对于 $\sigma_y$ 较大( $\mu_y \geq 3\sigma_y$ )时,这种非单调的情况是可以忽略的.

通过本文方法估计得到 $(\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\rho}) = (0.996\ 65, 0.110\ 43, 0.085\ 523, 0.384\ 98, 0.868\ 3)$ ,于是,产品的寿命分布的密度函数为

$$f(t) = \frac{3}{\sqrt{0.931\ 2t^3}} \exp \left[ -\frac{(3 - 0.855\ 23t)^2}{0.296\ 4t} \right].$$

如果仅考虑产品 $i$ 的性能退化数据时, $Y_{im} \sim$

$N(\mu_y t_m, t_m \sigma_y^2)$ ,则基于产品性能退化数据可得参数 $\mu_y$ 和 $\sigma_y$ 的估计分别为

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{nt_m} \sum_{i=1}^n y_{im},$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{(n-1)t_m} \sum_{i=1}^n (y_{im} - t_m \hat{\mu}_y)^2.$$

为了比较这两种估计方法的效果,分别基于两种方法开展仿真实验1000次,对参数 $\mu_y$ 和 $\sigma_y$ 进行估计,得到参数的 Bootstrap 区间估计<sup>[17]</sup>,两种方法的估计结果如表2所示.

表2 两种方法参数估计对比

方法	$\mu_y$		$\sigma_y$	
	置信度 $1 - \alpha = 0.9$	置信度 $1 - \alpha = 0.8$	置信度 $1 - \alpha = 0.9$	置信度 $1 - \alpha = 0.8$
仅采用性能退化数据	(0.047 0, 0.151 7)	(0.057 6, 0.139 9)	(0.318 3, 0.481 2)	(0.333 9, 0.460 3)
本文方法	(0.046 2, 0.155 1)	(0.056 4, 0.142 2)	(0.335 7, 0.463 6)	(0.346 1, 0.444 5)

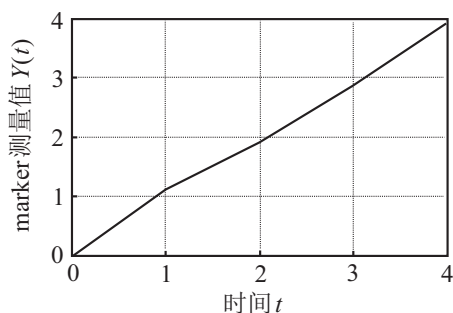
由表2可以看出,两种方法计算参数 $\mu_y$ 的估计区间长度相差较小,但基于本文方法所得的参数 $\sigma_y$ 估计区间长度更短,表明本文方法具有更高的评估精度.

另一方面,参数 $\rho$ 表明了产品性能参数与 marker 的相关性. 为分析性能参数与 marker 相关程度对参

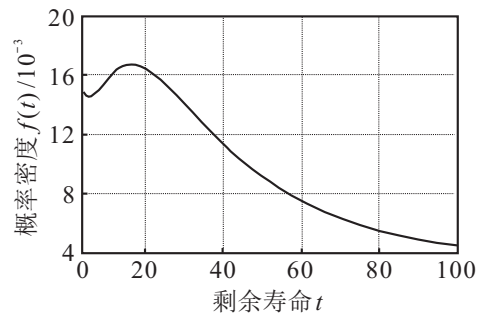
数估计结果的影响,分别取 $\rho$ 值为0.55、0.75和0.95,采用本文方法计算的 $\mu_y$ 和 $\sigma_y$ 的估计区间如表3所示. 由表3可以看出:相关系数 $\rho$ 对 $\mu_y$ 估计的区间长度影响较小;但随着相关程度的上升, $\sigma_y$ 的区间估计长度随之缩短,表现出更高的估计精度.

表3 相关系数对参数估计的影响

$\rho$	$\mu_y$		$\sigma_y$	
	置信度 $1 - \alpha = 0.9$	置信度 $1 - \alpha = 0.8$	置信度 $1 - \alpha = 0.9$	置信度 $1 - \alpha = 0.8$
0.55	(0.045 6, 0.154 3)	(0.057 45, 0.143 4)	(0.311 2, 0.477 9)	(0.328 4, 0.459 9)
0.75	(0.046 2, 0.155 1)	(0.056 40, 0.142 2)	(0.335 7, 0.463 6)	(0.346 1, 0.444 5)
0.95	(0.041 4, 0.151 2)	(0.054 14, 0.140 6)	(0.357 7, 0.442 9)	(0.369 5, 0.431 3)



(a) 产品仿真 marker 测量值



(b) 产品仿真剩余寿命分布

图2 产品剩余寿命仿真分析

图2(a)给出了仿真实验中 $(X(t), Y(t))$ 的另外一条样本路径,作为该产品在运行过程中的 marker 测量值,因此,产品在 $t = 4$ 时性能退化值 $y_4$ 服从正态分布,即 $y_4 \sim N(\mu_{y_4}, \sigma_{y_4}^2)$ . 由式(3)求得 $\mu_{y_4} =$

$0.125\ 5, \sigma_{y_4}^2 = 0.145\ 9$ ,由式(13)绘制出产品的剩余寿命分布如图2(b)所示. 其中,该产品剩余寿命的均值为34.92,当置信度为 $1 - \alpha = 0.9$ 时其区间估计为(7.22, 89.89).

## 5 讨论

### 5.1 模型的辨识问题

本文进行建模之前,首先假设性能参数 $Y$ 和marker数据 $X$ 的变化可以用二元Wiener过程进行描述.因而要将本文的方法应用到实际产品中,首先应该保证这一假设是合理的,即要解决二元Wiener过程模型的辨识问题,这里简要说明模型辨识的思路.

由于二元Wiener过程的协方差矩阵 $\Sigma$ 为正定对称矩阵,可以找到一个正交矩阵 $H$ 使得 $H'\Sigma H$ 为对角矩阵,即

$$\Sigma_Z = H'\Sigma H = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中 $\sigma_{z_1}^2$ 和 $\sigma_{z_2}^2$ 是协方差矩阵 $\Sigma$ 的特征值.

令 $Z(t) = (Z_1(t) \ Z_2(t))' = H(X(t) \ Y(t))'$ ,则由多元Wiener过程的正交不变性, $H$ 是正交矩阵,故 $Z(t)$ 也服从二元Wiener过程,且 $Z(t)$ 的协方差矩阵 $\Sigma_Z$ 为对角矩阵,因而 $Z(t)$ 的两个分量 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 相互独立.由此,二元Wiener过程的辨识问题可以转换为两个独立的一元Wiener过程进行辨识,而一元Wiener过程可以采用序贯方法、自相关函数法和似然比检验等方法进行辨识.

### 5.2 存在多个marker的情况

本文给出的模型中,能够测量到的与产品性能参数 $Y(t)$ 相关的marker只有 $X(t)$ 一个,而实际应用中可能有多个,即 $X_1(t), X_2(t), \dots, X_p(t)$ ,其中 $p$ 为marker的个数.由仿真示例的分析可知,marker与产品性能参数 $Y(t)$ 相关性越高,模型参数的估计精度也越高.因此,针对存在多个marker的情况,一种思路是从 $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_p(t)$ 中选择与产品性能参数相关性最高的marker进行建模;另一种思路是构造新的marker,即

$$X^*(t) = K \cdot [X_1(t) \ X_2(t) \ \dots \ X_p(t)]', \quad (16)$$

其中 $K$ 是 $1 \times p$ 的未知常数向量.然后采用本文方法进行建模分析.在大数据的背景下,未来可结合机器学习和学习型智能优化方法等数据驱动型策略针对数据开展训练与分析<sup>[18-19]</sup>,选择更合适的marker,从而进一步提升产品可靠性评估的精度.

### 5.3 性能参数无法获得的情况

本文假设在产品运行过程中能够对其性能参数进行测量,但在实际情况中,有许多产品在试验或运行过程中其性能参数是难以获得的,因而本文给出的综合利用性能参数和marker数据的可靠性建模与

分析方法将不再适用.针对这一现实问题,可以在传统的基于寿命数据的预测方法基础上,结合本文基于marker数据的建模与预测方法,同样对产品开展综合的可靠性建模与分析,从而提升产品的可靠性评估精度.这一研究工作将于未来开展.

## 6 结论

基于性能退化数据的可靠性建模分析方法为现代工业中的长寿命、高可靠产品的可靠性研究提供了途径.然而,对于破坏性测量的性能退化产品,性能退化数据较少,无法为产品可靠性预测提供充足的数据支持.为解决这一难题,本文提出综合利用性能退化数据和marker数据对其进行可靠性建模分析,一方面能够提升产品可靠性模型精度,同时可以在产品运行过程中基于marker数据预测产品性能参数退化量及剩余寿命分布,从而为产品维修、更换以及备件决策提供依据.本文给出了仿真示例并进行了讨论.需要说明的是,本文仅通过仿真示例验证了所提出方法的有效性,在后续的研究中还需要将该方法应用于更多实际产品,进一步利用实际试验数据进行验证.

### 参考文献(References)

- [1] Kalbfleisch J D, Lawless J F, Nair V N, et al. Estimation of reliability in field performance studies[J]. *Technometrics*, 1988, 30(4): 379-383.
- [2] 刘智洋, 刘鲁, 黄敏. 大型复杂产品可靠性评估的单调约束模型[J]. *控制与决策*, 2010, 25(5): 777-779. (Liu Z Y, Liu L, Huang M. Monotone restriction model of large-scale complex product reliability evaluation[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(5): 777-779.)
- [3] 王浩伟, 滕克难. 基于加速退化数据的可靠性评估技术综述[J]. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(12): 2877-2885. (Wang H W, Teng K N. Review of reliability evaluation technology based on accelerated degradation data[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2017, 39(12): 2877-2885.)
- [4] 彭宝华. 基于Wiener过程的可靠性建模方法研究[D]. 长沙: 国防科技大学信息系统与管理学院, 2010. (Peng B H. Research on reliability modeling methods based on Wiener process[D]. Changsha: College of Information System and Management, National University of Defense Technology, 2010.)
- [5] Jewell N P, Kalbfleisch J D. Marker processes in survival analysis[J]. *Lifetime Data Analysis*, 1996, 2(1): 15-29.
- [6] Yang G. Markov processes and survival analysis[J]. *Lifetime Data Analysis*, 2013, 19(3): 393-411.

- [7] Parast I, Griffin B A. Landmark estimation of survival and treatment effects in observational studies[J]. *Lifetime Data Analysis*, 2017, 23(2): 1-22.
- [8] Whitmore G A, Crowder M J, Lawless J F. Failure inference from a marker process based on a bivariate Wiener model[J]. *Lifetime Data Analysis*, 1998, 4(3): 229-251.
- [9] Tong X, He X, Sun J, et al. Joint analysis of current status and marker data: An extension of a bivariate threshold model[J]. *The International Journal of Biostatistics*, 2008, 4(1): 1-12.
- [10] Newby M J, Barker C T. A bivariate process model for maintenance and inspection planning[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2006, 83(4): 270-275.
- [11] Economou P, Malefaki S, Caroni C. Bayesian threshold regression model with random effects for recurrent events[J]. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2015, 17(4): 871-898.
- [12] 王凌, 郑环宇. 一种多目标资源受限项目调度问题的教学算法[J]. *控制与决策*, 2015, 30(10): 1868-1872.  
(Wang L, Zheng H Y. A teaching-learning-based optimization algorithm for multi-objective resource constrained project scheduling problem[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(10): 1868-1872.)
- [13] Zheng X L, Wang L. A collaborative multi-objective fruit fly optimization algorithm for the resource constrained unrelated parallel machine green scheduling problem[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(5): 790-800.
- [14] Cox D R. *The theory of stochastic processes*[M]. London: Chapman and Hall, 1965: 215-218.
- [15] Chikkara R S, Folks J L. *The inverse gaussian distribution: Theory, methodology and applications*[M]. New York: Marcell Dekker, 1989: 151-168.
- [16] Seshadri V. *The inverse gaussian distribution*[M]. New York: Springer-Verlag, 1993: 92-113.
- [17] Efron B, Tibshirani R J. *An introduction to the bootstrap*[M]. New York: Chapman and Hall, 1993: 45-59.
- [18] 陈亮, 胡昌华. 基于退化建模的可靠性分析研究现状[J]. *控制与决策*, 2009, 24(9): 1281-1287.  
(Chen L, Hu C H. Review of reliability analysis methods based on degradation modeling[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(9): 1281-1287.)
- [19] Wang J J, Wang L. A knowledge-based cooperative algorithm for energy-efficient scheduling of distributed flow-shop[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, DOI:10.1109/TSMC.2017.2788879, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8263201/>.

### 作者简介

郑龙(1980—), 男, 博士后, 从事系统工程、可靠性工程和信息技术的研究, E-mail: zhenglong@hnu.edu.cn;

杜永浩(1993—), 男, 博士生, 从事智能优化理论与应用的研究, E-mail: duyonghao15@163.com;

邢立宁(1980—), 男, 研究员, 博士生导师, 从事智能优化理论与应用等研究, E-mail: xinglining@gmail.com;

彭宝华(1981—), 男, 讲师, 博士, 从事系统工程、可靠性工程和信息技术的研究, E-mail: darkbluesss@163.com;

周忠宝(1977—), 男, 教授, 博士生导师, 从事金融工程与风险管理、系统优化与决策、可靠性工程与质量管理等研究, E-mail: Z.B.Zhou@hnu.edu.cn;

文龙(1978—), 男, 工程师, 硕士, 从事智能优化理论与应用的研究, E-mail: 365566461@qq.com.

(责任编辑: 李君玲)