

# 带攻击角度约束的非奇异终端滑模固定时间收敛制导律

李晓宝<sup>1†</sup>, 张友安<sup>2</sup>, 鲍虎<sup>3</sup>, 赵国荣<sup>4</sup>

(1. 海军航空大学 航空基础学院, 烟台 264001; 2. 烟台南山学院 电气与电子工程系, 烟台 265713;  
3. 烟台南山学院 航空学院, 烟台 265713; 4. 海军航空大学 参谋部, 烟台 264001)

**摘要:** 针对拦截机动目标的末制导问题, 设计一种带攻击角度约束的末制导律. 该制导律构造一种新型的固定时间收敛非奇异终端滑模面, 能够在解决终端滑模面奇异性的同时使得滑模面、弹目视线角和弹目视线角速率在固定时间内收敛, 保证收敛时间的上界是独立于弹目初始条件, 可以被预先设定的. 与传统的固定时间收敛控制相比, 该制导律通过调节滑模面和弹目视线角误差的趋近律指数使得制导系统收敛速率更快. 同时, 针对目标机动引起的未知扰动, 引入一种扩张状态观测器进行估计, 能够增强制导系统的鲁棒性, 避免颤振现象的发生. 最后, 通过仿真实验验证所提出制导律能够以不同的攻击角度对机动目标进行有效拦截, 且与其他制导律相比, 所提出的制导律使得制导系统收敛更快, 导弹拦截时间更短, 拦截精度更高.

**关键词:** 制导律; 攻击角度约束; 非奇异终端滑模; 固定时间收敛; 扩张状态观测器; 机动目标

中图分类号: V448.133

文献标志码: A

## Nonsingular terminal sliding mode based impact angle constraint guidance law with fixed-time convergence

LI Xiao-bao<sup>1†</sup>, ZHANG You-an<sup>2</sup>, BAO Hu<sup>3</sup>, ZHAO Guo-rong<sup>4</sup>

(1. School of Coast Defence, Naval Aviation University, Yantai 264001, China; 2. Department of Electrical and Electronic Engineering, Yantai Nanshan University, Yantai 265713, China; 3. Aviation Academy, Yantai Nanshan University, Yantai 265713, China; 4. University Staff, Naval Aviation University, Yantai 264001, China)

**Abstract:** A terminal guidance law is developed for missiles intercepting maneuvering targets with impact angle constraints. A novel nonsingular terminal sliding mode with fixed-time convergence is constructed to avoid the singularity problem while ensuring the sliding surface, LOS angle and the LOS angular rate are fixed-time convergent. The upper-bound of convergence time is independent of the initial states of missiles and targets and can be set in advance. Compared with conventional fixed-time convergence control, the proposed guidance law has a faster convergence rate by regulating the index of the approaching laws of the sliding surface and the LOS angle error. Besides, an extended state observer is introduced to estimate the unknown disturbance caused by the target acceleration, which ensures that the guidance system has a good robustness and avoids the chattering problem. Finally, simulation results indicate that with the proposed guidance law, the missile can intercept the maneuvering targets effectively under different impact angles. Besides, comparisons with other guidance laws show that the proposed guidance law can improve the convergence rate of the guidance system and allow the missile to intercept the targets more accurately in less time.

**Keywords:** guidance law; impact angle constraint; nonsingular terminal sliding mode; fixed-time convergence; extended state observer; maneuvering target

## 0 引言

使用精确制导武器对目标实施精确快速拦截是现在和未来战争中的主要作战方式. 导弹末制导律的设计不仅要求导弹以较小的脱靶量击中目标, 还需要导弹以特定的攻击角度命中目标以求对作战目标最大的毁伤效果. 比例导引律由于其简单高

效的特点被广泛地应用于拦截静止或缓慢移动的目标<sup>[1-2]</sup>. 然而, 随着目标机动能力的提升, 比例导引律的制导效果变得不尽人意<sup>[3]</sup>, 为了有效地处理机动目标, 实现对机动目标的精确拦截, 近些年现代控制理论已经被广泛应用到导弹制导律的设计中, 如最优控制制导律<sup>[4]</sup>、微分对策制导律<sup>[5]</sup>、控制制导律<sup>[6]</sup>以及

收稿日期: 2018-04-11; 修回日期: 2018-09-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273058).

责任编辑: 刘允刚.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: lixiaobaohjhy@163.com.

滑模控制制导律<sup>[7]</sup>.

传统的滑模控制通常采用线性滑模面使系统状态渐近收敛到平衡点上,但其收敛时间是趋于无穷的<sup>[8]</sup>.现代战争中高速飞行的导弹在打击目标时,留给末制导的时间往往只有短短几十秒钟,这就迫切要求弹目视线(line of sight, LOS)角速率能够快速收敛,以保证导弹在与目标撞击之前稳定到期望的LOS角方向,提高制导性能.终端滑模控制(terminal sliding mode control, TSMC)通过引入非线性滑模面确保了系统状态能够在有限时间内收敛<sup>[9]</sup>.近年来,采用TSMC方法针对机动目标进行制导律的设计得到了广泛的研究<sup>[10-15]</sup>,然而TSMC方法存在奇异性问题.为此,文献[11]提出了转换滑模面的方法,文献[12]在研究一类非线性系统过程中给出了非奇异终端滑模控制方法,文献[13]在研究带攻击角度约束的制导律中设计了一种积分滑模面来避免奇异问题.此外,当系统状态远离平衡点时,TSMC收敛速率较慢,为了加快收敛速率,文献[14-15]提出了非奇异快速终端滑模控制方法.采用有限时间收敛TSMC得到的系统状态收敛时间依赖于系统的初始条件.在设计导弹的制导律过程中,导弹和目标的具体初始状态通常是事先未知的,不同的初始条件得到的收敛时间也不同.作为有限时间稳定性理论的扩展,文献[16]在研究一类非线性系统过程中提出了固定时间收敛(fixed-time convergence, FTC)的概念,FTC理论可以使系统得到一个独立于初始条件的收敛时间上界.

采用FTC进行制导律设计时,可以将系统状态的收敛时间上界通过参数控制预先设定为不依赖于初始条件的固定值,从而使得设计的制导律适用范围更广,制导性能更高.为此,本文将固定时间收敛应用于制导律设计中,提出一种带有攻击角度约束的非奇异终端滑模固定时间收敛制导律设计方法.该方法在解决终端滑模面奇异性问题的同时,使得滑模面、LOS角以及LOS角速率能够在固定时间内快速收敛.与传统的固定时间收敛控制方法相比,该制导律具有更快的收敛速率.此外,针对目标机动引起的扰动,本文设计一种扩张状态观测器来对其进行估计.最后,通过仿真验证该制导律的可行性并与其他制导律对比,对该制导律的制导性能进行分析.

## 1 问题描述和相关引理

### 1.1 问题描述

考虑二维平面内的导弹末制导问题,如图1所示.假定导弹 $M$ 和目标 $Y$ 的速度是恒定的,记为 $V_M$

和 $V_T$ ;  $r$ 和 $q$ 分别表示弹目距离和LOS角; $\gamma_M$ 和 $\gamma_T$ 分别表示导弹和目标的航迹角; $a_M$ 和 $a_T$ 分别表示导弹和目标的法向加速度.

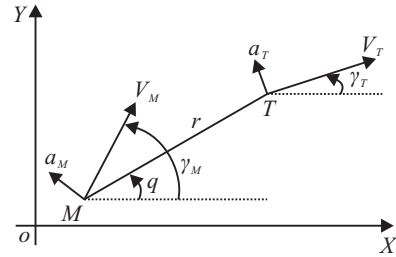


图1 二维平面内的弹目运动关系

制导系统的运动学方程可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_T \cos(r_T - q) - V_M \cos(\gamma_M - q), \\ \dot{q} &= \frac{1}{r} [V_T \sin(\gamma_T - q) - V_M \sin(\gamma_M - q)], \\ \dot{\gamma}_M &= \frac{a_M}{V_M}, \quad \dot{\gamma}_T = \frac{a_T}{V_T}. \end{aligned} \quad (1)$$

对方程组(1)中LOS角速率 $\dot{q}$ 求解关于时间 $t$ 的一阶导数可以得到

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \\ & - \frac{\dot{r}}{r^2} [V_T \sin(\gamma_T - q) - V_M \sin(\gamma_M - q)] + \frac{1}{r} [V_T (\dot{\gamma}_T - \dot{q}) \cos(\gamma_T - q) - \\ & V_M (\dot{\gamma}_M - \dot{q}) \cos(\gamma_M - q)] = \\ & - \frac{\dot{r}}{r^2} (r\dot{q}) + \frac{1}{r} [-\dot{q} V_T \cos(\gamma_T - q) + \\ & \dot{q} V_M \cos(\gamma_M - q) + V_T \dot{\gamma}_T \cos(\gamma_T - q) - \\ & V_M \dot{\gamma}_M \cos(\gamma_M - q)] = \\ & - \frac{\dot{r}\dot{q}}{r} + \frac{a_T \cos(\gamma_T - q)}{r} - \\ & \frac{a_M \cos(\gamma_M - q)}{r} + \frac{-\dot{q}\dot{\gamma}}{r} = \\ & - \frac{2\dot{r}\dot{q}}{r} + \frac{a_T \cos(\gamma_T - q)}{r} - \frac{a_M \cos(\gamma_M - q)}{r}. \end{aligned} \quad (2)$$

导弹末制导终端攻击角度 $\theta$ 表示为导弹击中目标时二者速度之间的夹角,该角度与终端LOS角 $q_f$ 存在着一一对应关系,即

$$q_f = \gamma_{Tf} - \tan^{-1} \left( \frac{\sin \theta}{\cos - V_T/V_M} \right). \quad (3)$$

因此,导弹末制导终端攻击角度 $\theta$ 约束可以转化为终端LOS角 $q_f$ 约束的问题<sup>[17]</sup>.

假设 $q_d$ 是期望的末制导终端LOS角,定义 $x_1 = q - q_d$ 为LOS角跟踪误差, $x_2 = \dot{q}$ 为LOS角速率.由式(1)和(2)可得

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{2\dot{r}x_2}{r} - \frac{\cos(\gamma_M - q)}{r}a_M + \frac{d}{r}, \quad (4)$$

其中  $d = \cos(\gamma_T - q)a_T$ .

**假设1** 理想状态下仅考虑目标机动  $a_T$  对制导系统的影响,式(4)中的  $d$  可以看作是目标机动引起的外部干扰,假设  $\Delta$  是一个正常数,表示为目标机动  $a_T$  的最大值,则  $|d| \leq \Delta$ .

本文的目的是通过合理地设计导弹加速度指令  $a_M$ ,使得LOS角跟踪误差  $x_1$  和LOS角速率  $x_2$  在固定时间内收敛到原点的一个充分小的邻域内,以确保导弹能够以期望的攻击角度击中目标.

1.2 基本定理

**定义1**<sup>[16]</sup> 考虑如下非线性系统:

$$\dot{x}(t) = F(x, t), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

其中:  $x \in R^n, F(x, t) : U \times R_+ \rightarrow R^n$  是连续的,  $U$  是包含  $x = 0$  的一个开区间,且满足  $F(0, t) = 0$ . 如果对于任意给定的初始时间  $t_0$  和初始状态  $x_t \in U$ , 都存在一个时刻  $T(x_0)$ ,使得系统(5)的每一个解  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$  满足

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t; t_0, x_0) = 0, \quad t \in [t_0, T(x_0)]; \\ x(t; t_0, x_0) = 0, \quad t \geq T(x_0), \end{cases} \quad (6)$$

则系统(5)的平衡点  $x = 0$  是有限时间稳定的. 此外,如果收敛时间  $T(x_0)$  是有界的,即对于任意的  $x_0 \in R^n$ , 存在  $T_{\min} > 0$ ,使得  $T(x_0) < T_{\min}$ ,则系统(5)的平衡点  $x = 0$  被称作是固定时间稳定的.

**引理1**<sup>[18]</sup> 考虑如下—类系统:

$$\dot{y} = -l_1 \text{sign}^{m_1} y - l_2 \text{sign}^{m_2} y, \quad y(0) = y_0. \quad (7)$$

其中:  $\text{sign}^m y = |y|^m \text{sign}(y), l_1 > 0, l_2 > 0, m_1 > 1, 0 < m_2 < 1$ . 则系统(7)的平衡点是固定时间稳定的,且收敛时间  $T$  是有界的,并满足

$$T < T_{\max} = \frac{1}{l_1(m_1 - 1)} + \frac{1}{l_2(1 - m_2)}. \quad (8)$$

**引理2** 考虑如下—类系统:

$$\dot{y} = -l_1 \text{sign}^{\kappa_1} y - l_2 \text{sign}^{\kappa_2} y, \quad y(0) = y_0. \quad (9)$$

其中

$$\kappa_1 = \frac{1 + m_1}{2} + \frac{m_1 - 1}{2} \text{sign}(|y| - 1),$$

$$\kappa_2 = \frac{1 + m_2}{2} + \frac{1 - m_2}{2} \text{sign}(|y| - 1),$$

$$l_1 > 0, l_2 > 0, m_1 > 1, 0 < m_2 < 1.$$

则系统(9)的平衡点是固定时间稳定的,且收敛时间  $T$  是有界的,并满足

$$T \leq T_{\max} =$$

$$\frac{1}{l_2(m_1 - 1)} \ln \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + \frac{1}{l_1(1 - m_2)} \ln \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right). \quad (10)$$

**证明** 系统(9)可以写成

$$\begin{cases} \dot{y} = -l_1 \text{sign}^{m_1} y - l_2 y, \quad |y| > 1; \\ \dot{y} = -l_1 y - l_2 \text{sign}^{m_2} y, \quad |y| \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

当  $|y| > 1$  时,令  $z = 1 + \ln|y|$ ; 当  $|y| \leq 1$  时,令  $z = |y|^{1-m_2}$ ,且  $z_0$  为  $y$  取  $y(0)$  时对应的初值,则上式可以转化为

$$\begin{cases} \dot{z} = -l_1 e^{(m_1-1)(z-1)} - l_2, \quad z > 1; \\ \dot{z} = -(1 - m_2)l_1 z - (1 - m_2)l_2, \quad 0 < z \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

由式(12)可得系统(9)收敛时间上界  $T_{\max}$  为

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \lim_{y(0) \rightarrow +\infty} T(y(0)) = \\ &= \lim_{z_0 \rightarrow +\infty} \left( \int_1^{z_0} \frac{1}{l_1 e^{(m_1-1)(z-1)} + l_2} dz + \frac{1}{1 - m_2} \int_0^1 \frac{1}{l_1 z + l_2} dz \right) = \\ &= \lim_{z_0 \rightarrow +\infty} \int_1^{z_0} \frac{1}{l_1 e^{(m_1-1)(z-1)} + l_2} dz + \frac{1}{l_1(1 - m_2)} \ln \left( \frac{l_1 + l_2}{l_2} \right). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} T_1 &= \lim_{z_0 \rightarrow +\infty} \int_1^{z_0} \frac{1}{l_1 e^{(m_1-1)(z-1)} + l_2} dz, \\ \rho &= e^{(m_1-1)(z-1)}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{m_1 - 1} \lim_{\rho_0 \rightarrow +\infty} \int_1^{\rho_0} \frac{1}{\rho(l_1 \rho + l_2)} d\rho = \\ &= \frac{1}{m_1 - 1} \lim_{\rho_0 \rightarrow +\infty} \int_1^{\rho_0} \left( \frac{1}{l_2 \rho} + \frac{l_1}{l_2(l_1 \rho + l_2)} \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{l_2(m_1 - 1)} \ln \left( \frac{l_1 + l_2}{l_1} \right), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{1}{l_2(m_1 - 1)} \ln \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + \\ &= \frac{1}{l_1(1 - m_2)} \ln \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right). \quad \square \end{aligned}$$

**注1** 文献[17]给出了一个固定时间收敛系统

$$\dot{y} = -\alpha_0 \text{sign}^{\kappa} y - \beta_0 \text{sign}^{\rho_1/q_1} y,$$

并求出收敛时间上界

$$T < \frac{n_1}{\alpha_0(m_1 - n_1)} + \frac{q_1}{\alpha_0(q_1 - p_1)} \ln \left( 1 + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \right).$$

其中:  $\kappa = \frac{n_1 + m_1}{2n_1} + \frac{m_1 - n_1}{2n_1} \text{sign}(|y| - 1)$ ;  $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$ ;  $m_1, n_1, p_1, q_1$  是正奇数, 并且满足  $m_1 > n_1, p_1 < q_1$ . 因为

$$\ln \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \leq \frac{l_2}{l_1}, \quad \ln \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right) \leq \frac{l_1}{l_2},$$

所以本文设计的固定时间收敛系统相较于文献[17]和文献[18], 具有更快的收敛速率.

## 2 带有攻击角度约束的非奇异终端滑模固定时间收敛制导律设计

### 2.1 固定时间收敛非奇异终端滑模面构造

考虑二阶非线性系统(4), 文献[19]给出了一种固定时间收敛的终端滑模面的一般设计如下:

$$s = x_2 + l_1 \text{sign}^{m_1} x_1 + l_2 \text{sign}^{m_2} x_1. \quad (13)$$

其中:  $l_1 > 0, l_2 > 0, m_1 > 1, 0 < m_2 < 1$ . 基于滑模面(13)的控制输入  $a_M$  被设计为

$$a_M = \frac{r}{\cos(\gamma_M - q)} \left( -\frac{2\dot{r}x_2}{r} + l_1 m_1 |x_1|^{m_1-1} x_2 + l_2 m_2 |x_1|^{m_2-1} x_2 + k_1 \text{sign}^{\gamma_1} s + k_2 \text{sign}^{\gamma_2} s + \frac{k_3}{r} \text{sign}(s) \right). \quad (14)$$

其中:  $\gamma_1 > 0, 0 < \gamma_2 < 1; k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 = \Delta$ . 然而, 式(14)中, 当  $x_1 = 0, x_2 \neq 0$  时, 幂次项  $|x_1|^{m_2-1} x_2$  可能会引起奇异问题. 为了避免奇异现象的出现, 文献[20]提出了一种新型的非奇异终端滑模面设计方法如下:

$$s = x_2 + l_1 x_1 + l_2 g(x_1). \quad (15)$$

其中:  $l > 0, g(x_1) \in R$  定义为

$$g(x_1) = \begin{cases} \text{sign}^{m_2} x_1, & |x_1| > \varepsilon; \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \text{sign}(x_1) x_1^2, & |x_1| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = (2 - m_2) \varepsilon^{m_2-1},$$

$$\alpha_2 = (m_2 - 1) \varepsilon^{m_2-2}.$$

$0 < m_2 < 1, \varepsilon$  是一个小的正常数.

受文献[20]的启发, 本文提出一种新型的固定时间收敛非奇异终端滑模面(fixed-time convergence nonsingular terminal sliding mode, FTCNTSM)如下:

$$s = x_2 + l_1 \text{sign}^{\kappa_1} x_1 + l_2 g(x_1). \quad (16)$$

其中  $g(x_1) \in R$  定义如下:

$$g(x_1) = \begin{cases} x_1, & |x_1| > 1; \\ \text{sign}^{m_2} x_1, & \varepsilon < |x_1| \leq 1; \\ \alpha_1 \text{sign}^{\beta_1}(x_1) + \alpha_2 \text{sign}^{\beta_2}(x_1), & |x_1| \leq \varepsilon; \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2 - m_2}{\beta_2 - \beta_1} \varepsilon^{m_2-\beta_1},$$

$$\alpha_2 = \frac{m_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \varepsilon^{m_2-\beta_2};$$

$\beta_1, \beta_2 \geq 1$  且  $\beta_1 \neq \beta_2, \varepsilon$  是一个小于1的正常数. 则  $g(x_1)$  的导数为

$$\dot{g}(x_1) = \begin{cases} x_2, & |x_1| > 1; \\ m_2 |x_1|^{m_2-1} x_2, & \varepsilon < |x_1| \leq 1; \\ \alpha_1 \beta_1 |x_1|^{\beta_1-1} x_2 + \alpha_2 \beta_2 |x_1|^{\beta_2-1} x_2, & |x_1| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

本文提出的固定时间收敛非奇异终端滑模面  $s$  及其导数  $\dot{s}$  都是连续的, 当  $|x_1| > \varepsilon$  时, 式(16)与系统(9)相似; 当  $|x_1| \leq \varepsilon$  时, 式(16)中的幂次项  $l_2 \text{sign}^{m_2} x_1$  被  $\alpha_1 \text{sign}^{\beta_1}(x_1) + \alpha_2 \text{sign}^{\beta_2}(x_1)$  代替, 由于  $\beta_1, \beta_2 > 1$ , 避免了奇异问题的发生. 相较于文献[19], 本文给出了带有  $\text{sign}^{m_2} x_1$  项滑模面解决奇异性问题的一般性设计, 并将有限时间收敛滑模面扩展到固定时间收敛滑模面. 相较于文献[17]和文献[18], 合理地设计制导律可使得滑模面在到达阶段和滑动阶段具有更快的收敛速率.

### 2.2 制导律设计

**定理1** 对于制导系统(4)采用FTCNTSM设计方法, 如果制导指令  $\alpha_M$  设计为

$$a_M = \frac{r}{\cos(\gamma_M - q)} \left( -\frac{2\dot{r}x_2}{r} + l_1 \kappa_1 |x_1|^{\kappa_1-1} x_2 + l_2 \dot{g}(x) + k_1 \text{sign}^{\kappa_3} s + k_3 \text{sign}^{\kappa_4} s + \frac{k_3}{r} \text{sign}(s) \right). \quad (17)$$

其中

$$\kappa_3 = \frac{1 + \gamma_1}{2} + \frac{\gamma_1 - 1}{2} \text{sign}(|s| - 1),$$

$$\kappa_4 = \frac{1 + \gamma_2}{2} + \frac{1 - \gamma_2}{2} \text{sign}(|s| - 1).$$

则滑模面  $s$  将在时间  $T$  内收敛到0, 状态量  $x = [x_1, x_2]^T$  将在时间  $T$  内收敛到区域  $D = \{x_1, x_2 | |x_1| < \eta_1, |x_2| < \eta_2\}$ . 这里

$$T_1 = \frac{1}{k_2(\gamma_1 - 1)} \ln \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) +$$

$$\frac{1}{k_1(1 - \gamma_2)} \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right),$$

$$T_2 = \frac{1}{l_2(m_1 - 1)} \ln \left( l + \frac{l_2}{l_1} \right) +$$

$$\frac{1}{l_1(1-m_2)} \ln\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right),$$

$$T' < T_1, T < T_1 + T_2,$$

$$\eta_1 = \varepsilon, \eta_2 = l_1\varepsilon + l_2\varepsilon^{m_2}.$$

**证明** 考虑如下Lyapunov函数:

$$V = S^2.$$

根据式(16)和(17), Lyapunov函数 $V$ 的导数可以写为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2s\dot{s} = \\ &2s(\dot{x}_2 + l_1\kappa_1|x_1|^{\kappa_1-1}x_2 + l_2\dot{g}(x_1)) \leq \\ &-2s(k_1\text{sign}^{\kappa_3}s + k_2\text{sign}^{\kappa_4}s) = \\ &-2k_1V^{\frac{\kappa_3+1}{2}} - 2k_2V^{\frac{\kappa_4+1}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

由式(18)以及引理2可知,系统FTCNTSM可在固定时间 $T'$ 内收敛到 $s = 0$ .当 $s = 0$ 时,分两种情况进一步讨论制导系统(4)的状态 $x_1, x_2$ 的变化情况.

**情况1** 如果 $|x_1| > \varepsilon$ ,由FTCNTSM可得

$$s = x_2 + l_1\text{sign}^{\kappa_1}x_1 + l_2\text{sign}^{\kappa_2}x_1 = 0. \quad (19)$$

选取Lyapunov函数 $V_1 = x_1^2$ ,由式(4)和(19)可得Lyapunov函数 $V_1$ 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2x_1\dot{x}_1 = \\ &-2x_1(l_1\text{sign}^{\kappa_1}x_1 + l_2\text{sign}^{\kappa_2}x_1) = \\ &-2l_1V_1^{\frac{\kappa_1+1}{2}} - 2l_2V_1^{\frac{\kappa_2+1}{2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

由式(20)以及引理2可知,制导系统(4)的状态量 $x_1$ 将在固定时间 $T$ 内收敛到区域 $|x_1| < \eta_1 = \varepsilon$ .此时,由式(19)可得

$$\begin{aligned} |x_2| &= |l_1x_1 + l_2\text{sign}^{m_2}x_1| \leq \\ &l_1\varepsilon + l_2\varepsilon^{m_2}. \end{aligned} \quad (21)$$

即制导系统(4)的状态量 $x_2$ 将在固定时间 $T$ 内收敛到区域 $|x_2| < \eta_2 = l_1\varepsilon + l_2\varepsilon^{m_2}$ .

**情况2** 如果 $|x_1| \leq \varepsilon$ ,由FTCNTSM可得

$$\begin{aligned} s &= \\ x_2 + l_1x_1 + l_2(\alpha_1\text{sign}^{\beta_1}(x_1) + \alpha_2\text{sign}^{\beta_2}(x_1)) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

由式(22)可以得到

$$\begin{aligned} |x_2| &= \\ |l_1x_1 + l_2(\alpha_1\text{sign}^{\beta_1}(x_1) + \alpha_2\text{sign}^{\beta_2}(x_1))| &\leq \\ l_1\varepsilon + l_2(\alpha_1\varepsilon^{\beta_1} + \alpha_2\varepsilon^{\beta_2}) &= \\ l_1\varepsilon + l_2\varepsilon^{m_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

同样地,制导系统(4)的状态量 $x = [x_1, x_2]^T$ 将

在时间 $T$ 内收敛到区域 $D = \{x_1, x_2 ||x_1| < \eta_1, |x_2| < \eta_2\}$ . □

**注2** 由定理1可知,制导律(17)不仅能够保证滑模面 $s$ 将在固定时间 $T_1$ 内收敛,而且LOS角和LOS角速率在固定时间 $T_1 + T_2$ 内也是收敛的.相较于有限时间收敛制导律<sup>[10-15]</sup>, $T_1$ 和 $T_2$ 只包含常值参数 $l_1, l_2, m_1, m_2, \gamma_1, \gamma_2, k_1, k_2$ ,并不依赖于制导系统的初始状态,因此可以被预先设定.

**注3** 为了解决传统的固定时间收敛滑模面(13)存在的非奇异问题,本文提出的滑模面(16)在 $|x_1| \leq \varepsilon$ 时进行了滑模面转换,这也导致了状态量 $x = [x_1, x_2]^T$ 最终并不能严格收敛到0,只能收敛到区域 $D$ 内,但是通过选取足够小的 $\varepsilon$ ,系统的制导精度完全能够得到满足.

### 2.3 扩张状态观测器(ESO)设计

实际情况中,目标加速度 $a_T$ 通常是未知的,并且其上界值也很难得到,为了保证制导律(17)有较好的鲁棒性,通常需要选取的 $\Delta$ 足够大,但是符号函数 $\text{sign}(s)$ 的存在会引发严重的颤振现象.为了解决这一问题,本文引入扩张状态观测器(extended state observer, ESO)来对制导系统(4)的外部扰动 $d$ 进行实时估计,并在导引指令中加以补偿.

与文献[10]设计类似,本文构造如下ESO(关于ESO的收敛性证明,可参考文献[21]):

$$\begin{aligned} e &= z_1 = \dot{q}, \\ \dot{z}_1 &= \frac{z_2}{r} - \omega_1 e - \frac{2\dot{r}z_1}{r} - \frac{\cos(\gamma_M - q)}{r} a_M, \\ z_2 &= -r\omega_2 \text{fal}(e, \tau, \delta). \end{aligned} \quad (24)$$

其中: $z_1$ 和 $e$ 分别为 $\dot{q}$ 的估计值和估计误差. $z_2$ 为 $d$ 的估计值. $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 为观测增益.fal的定义为

$$\begin{aligned} \text{fal}(e, \tau, \delta) &= \begin{cases} |e|^\tau \text{sign}(e), & |e| > \delta; \\ \frac{e}{\delta^{1-\tau}}, & |e| \leq \delta; \end{cases} \\ 0 &< \tau < 1, 0 < \delta < 1. \end{aligned} \quad (25)$$

有了 $d$ 的估计值 $z_2$ ,制导指令(17)可以修改成如下形式:

$$\begin{aligned} a_M &= \\ \frac{r}{\cos(\gamma_M - q)} &\left( -\frac{2\dot{r}x_2}{r} + \frac{z_2}{r} + l_1\kappa_1|x_1|^{\kappa_1-1}x_2 + \right. \\ &\left. l_2\dot{g}(x) + k_1\text{sign}^{\kappa_3}s + k_2\text{sign}^{\kappa_4}s \right). \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)即为本文最终设计的带有攻击角度约束的非奇异终端滑模固定时间收敛制导律(fixed-time convergence nonsingular terminal sliding mode guidance law, FTCNTSMG).

### 3 仿真分析

假设导弹和目标的初始弹目距离  $r_0 = 10 \text{ km}$ , 初始LOS角  $q_0 = 30^\circ$ ; 初始航迹角  $\gamma_{M0} = 60^\circ, \gamma_{T0} = 90^\circ$ ; 导弹和目标的的速度  $V_M = 500 \text{ m/s}, V_T = 400 \text{ m/s}$ ; 目标的加速度  $a_M = 7g \sin(\pi/4)$ . 参照文献[22], ESO式(24)中的参数取  $\tau_1 = 0.5, \delta = 0.01, \omega_1 = 50, \omega_2 = 100$ . FTCNTSMG中的参数设定为  $l_1 = 0.2, l_2 = 0.1, m_1 = 1.8, m_2 = 0.7, k_1 = 1, k_2 = 0.1, \gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 0.5, \beta_1 = 1.25, \beta_2 = 1.75, \varepsilon = 0.001$ , 重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , 导弹的最大加速度取  $20g$ . 根据定理1计算得到  $T = 30.08 \text{ s}$ .

**注4** FTCNTSMG中各种参数选择直接影响  $T$  的大小, 由于FTCNTSMG给出的固定时间表示的是任意初始条件下收敛时间的上界,  $T$  一般设计的较大, 通常导弹在拦截目标时状态量  $X = [X_1, X_2]^T$ , 实际收敛时间要小于  $T$ . 如果设计  $T$  太小, 在某些特殊情况, 例如初始LOS角误差  $x_1$  较大时, 为了满足制导律固定时间收敛的要求, 导弹需要有较强的机动能力, 但是通常导弹的机动能力有限, 因此制导指令在末制导初始阶段会出现饱和现象. 因此, 根据导弹末制导机动能力的强弱, 需要通过调节FTCNTSMG中的参数来合理地设计  $T$ .

#### 3.1 以不同的期望攻击角度拦截目标

假设导弹拦截目标时期望的终端LOS角  $q_d$  分别为  $30^\circ, 45^\circ$  和  $60^\circ$ . 从图2(a)可以看出, FTCNTSMG使导弹在3种情况下都能够精确地拦截目标, 并且  $q_d$  越大, 导弹拦截轨迹越长, 拦截时间越久. 图2(b)给出了相应的制导指令曲线图, 可以看出3种情况下制导指令在前期较大, 甚至出现了饱和现象. 这是因为在末制导的前期, 为了使导弹LOS角  $q$  和LOS角速率  $\dot{q}$  满足固定时间内收敛的要求, 导弹通常需要进行高强度的机动. 图2(c)和图2(d)也表明制导指令初始阶段的剧烈变化引起了  $q$  和  $\dot{q}$  在初始阶段的较大变化, 当  $q$  和  $\dot{q}$  趋于0时, 制导指令也趋于缓和. 因为制导指令饱和的存在,  $q$  和  $\dot{q}$  实际收敛时间会相应地增大. 然而, 因为  $T$  是任意初始条件下收敛时间的上界, 并且制导指令饱和时间又较短, 通常情况下  $q$  和  $\dot{q}$  在设定的固定时间  $T$  内仍旧能够收敛. 从图2(c)和图2(d)可以看到, 当  $q_d = 60^\circ$  时,  $\dot{q}$  在初始阶段达到了一个最大的峰值, 这也导致了其收敛时间比其他两种情况较长. 同样地, LOS角误差  $x_1$  越大, LOS角  $q$  收敛时间也越长, 而  $\dot{q}$  和  $q$  依然能够在  $20 \text{ s}$  之前收敛到0和  $q_d$ . 从图2(e)可以看出, 3种情况下滑模面  $s$  都能够能够在  $\dot{q}$  和  $q$  收敛之前快速收敛到0.

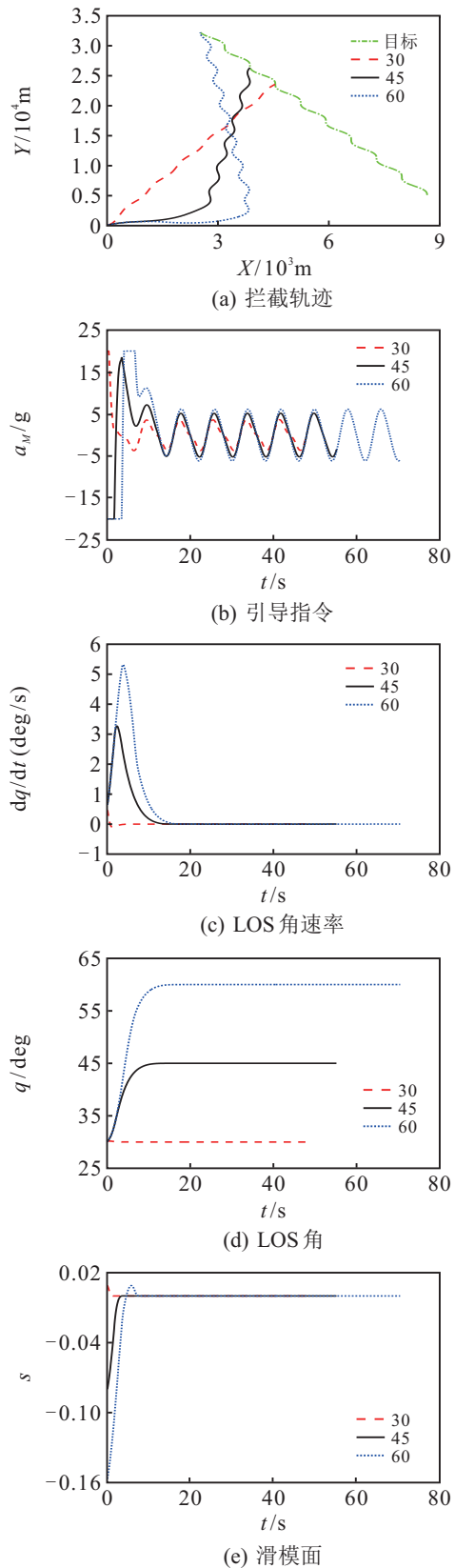


图2 以不同的期望攻击角度拦截目标

#### 3.2 与其他制导律对比

假设导弹拦截目标时期望的终端LOS角  $q_d$  为  $45^\circ$ . 这里采用文献[23]给出的非奇异终端滑模制导律(nonsingular terminal sliding mode guidance law, NTSMG)以及文献[20]设计的一种自适应非奇异快

速终端滑模制导律 (adaptive nonsingular fast terminal sliding mode guidance law, ANFTSMG) 进行仿真对比分析.

文献[23]设计的滑模面和NTSMG分别为

$$s = x_1 + \beta x_2^\alpha, \tag{27}$$

$$a_M = \frac{-2\dot{r}\dot{q} + \frac{r}{\alpha\beta}\dot{q}^{2-\alpha}}{\cos(\gamma_M - q)} + \frac{M\text{sgmf}(s)}{\text{sign}\cos(\gamma_M - q)}. \tag{28}$$

其中: 目标加速度  $a_T$  假设是未知的,  $\alpha = \frac{5}{3}, \beta = 1, M = 3 \times 10^3 \cdot \text{sgmf}(s)$  的表达式为

$$\text{sgmf}(s) = \begin{cases} \text{sign}(s), & |s| > \xi; \\ (1 + e^{\sigma s}) / (1 + e^{-\sigma s}), & |s| \leq \xi; \end{cases} \tag{29}$$

$$\xi = 0.002, \sigma = 1/\xi.$$

文献[20]设计的滑模面和ANFTSMG分别为

$$s = x_2 + l_1 x_1 + l_2 g(x_1); \tag{30}$$

$$a_M = \frac{r}{\cos(\gamma_M - q)} \left[ -\frac{2\dot{r}x_2}{r} + l_1 x_2 + l_2 \dot{g}(x) + \hat{\Delta}\sigma\text{sgmf}(s) + k_1 \text{sign}^{\gamma_1}(s) + k_2 s \right]. \tag{31}$$

其中

$$g(x_1) = \begin{cases} \text{sign}^\gamma(x_1), & |x_1| > \varepsilon; \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \text{sign}(x_1)x_1^2, & |x_1| \leq \varepsilon; \end{cases}$$

$$\hat{\Delta}(0) > 0, \hat{\Delta} = \sigma|s|,$$

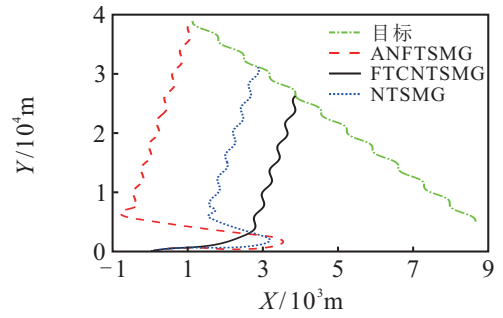
$$l_1 = 0.5, l_2 = 0.5,$$

$$\gamma = \frac{2}{3}, \sigma = 1.1,$$

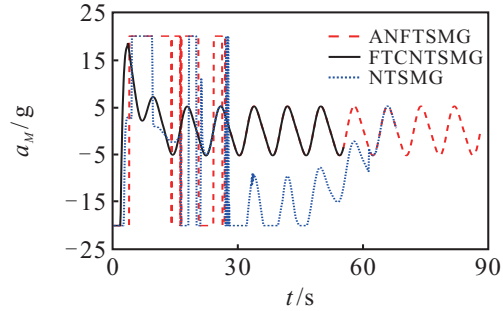
$$k_1 = 6, k_2 = 2,$$

$$\gamma_1 = 0.9, \varepsilon = 0.001, \xi = 0.002.$$

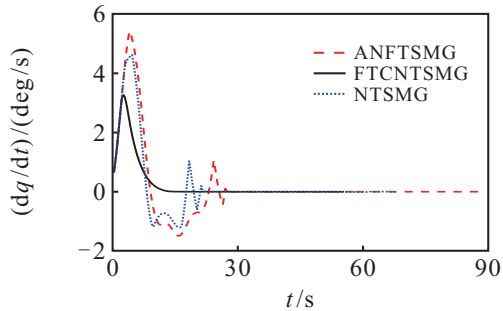
从图3(a)可以看到,3种制导律都能够成功拦截目标. 相比于NTSMG和ANFTSMG,FTCNTSMG有着相对较短的拦截轨迹,制导时间较短. 如图3(b)所示,FTCNTSMG指令曲线较为平滑,而NTSMG和ANFTSMG指令曲线变化剧烈,并且NTSMG在27s附近存在颤振现象,而FTCNTSMG通过采用ESO对目标加速度  $a_T$  进行估计使得制导指令曲线较为圆滑,避免了颤振现象. 图3(c)和图3(d)表明,NTSMG和ANFTSMG相较于FTCNTSMG使得LOS角  $q$  和角速率  $\dot{q}$  在收敛的过程中变化剧烈,都出现了较大的峰值,收敛时间较长. 图3(e)给出了滑模面  $s$  曲线图,FTCNTSMG滑模面收敛时间更快,在5s左右便趋近于0;而NTSMG和ANFTSMG滑模面收敛时间较长,分别在23s和28s左右才趋近于0.



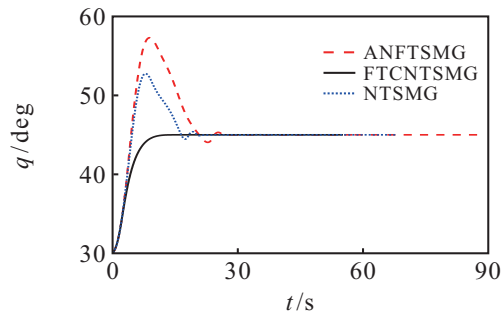
(a) 拦截轨迹



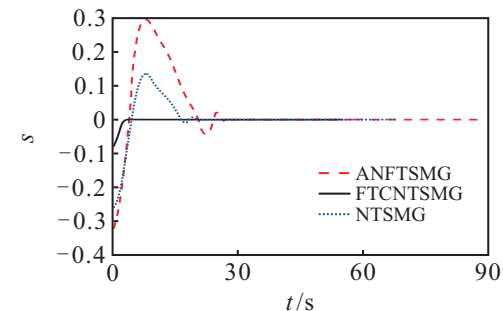
(b) 导引指令



(c) LOS角速率



(d) LOS角



(e) 滑模面

图3 FTCNTSMG与其他制导律对比

表1说明,3种制导律都能够使导弹以较高精度拦截目标,并且FTCNTSMG使得拦截时间最短,脱靶量最小.



表1 不同制导律下导弹拦截目标时的仿真结果

制导律	拦截时间/s	脱靶量/m	LOS角误差/deg	LOS角速率/(deg/s)
NTSMG	67.8514	0.0806	0.0005	-0.0026
FTCNTSMG	55.2544	0.0020	-0.0028	0.0084
ANFTSMG	87.9218	0.0084	-0.0040	-0.0396

图4给出了所设计的ESO对外部扰动 $d$ 的估计曲线.从图4可以看出, $d$ 的估计值能够快速收敛到实际值曲线上,从而确保了制导系统的收敛性能不受影响.

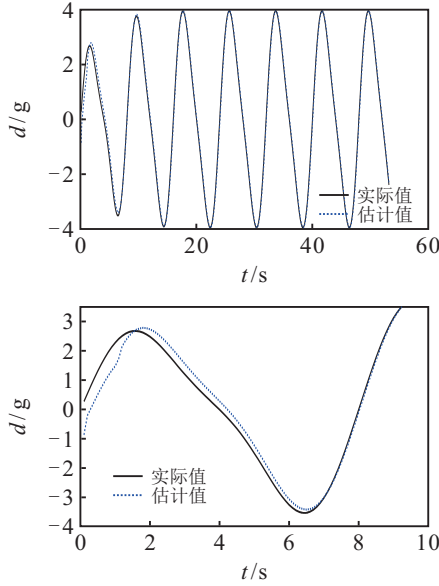


图4 ESO的估计值与实际值对比

### 3.3 与传统的固定时间收敛制导律对比

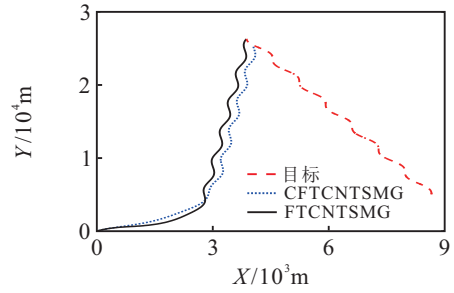
若FTCNTSMG中, $\kappa_1 = m_1, \kappa_2 = m_2, \kappa_3 = \gamma_1, \kappa_4 = \gamma_2$ ,则FTCNTSMG变为如下形式:

$$a_m = \frac{r}{\cos(\gamma_M - q)} \left( -\frac{2\dot{r}x_2}{r} + \frac{z_2}{r} + l_1 m_1 |x_1|^{m_1-1} x_2 + l_2 \dot{g}_1(x_1) + k_1 \text{sign}^{\gamma_1} s + k_2 \text{sign}^{\gamma_2} s \right). \quad (32)$$

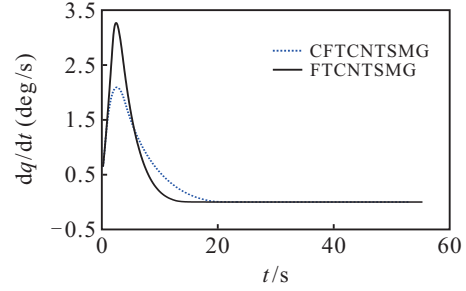
其中 $g_1(x_1)$ 表达式为

$$g(x_1) = \begin{cases} \text{sign}^{m_2} x_1, & |x_1| > \varepsilon; \\ \alpha_1 \text{sign}^{\beta_1}(x_1) + \alpha_2 \text{sign}^{\beta_2}(x_1), & |x_1| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

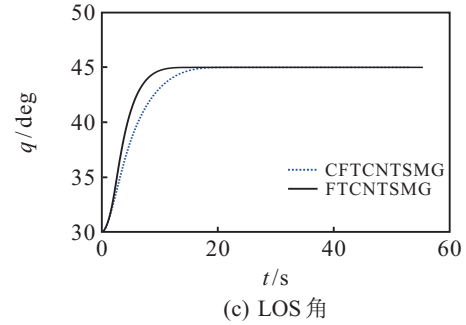
式(32)可以看作一个传统的固定时间收敛非奇异终端滑模制导律 (conventional fixed-time convergence nonsingular terminal sliding mode guidance law, CFTCNTSMG).假设导弹拦截目标时期望的终端LOS角 $q_d$ 为 $45^\circ$ ,从图5(a)可以看出,两种制导律均能够成功拦截目标.图5(b)和图5(c)表明,FTCNTSMG相较于CFTCNTSMG,使得LOS角 $q$ 和LOS角速率 $\dot{q}$ 能够更快地收敛到原点,从而验证了本文设计的FTCNTSMG具有更快的收敛速率.



(a) 拦截轨迹



(b) LOS角速率



(c) LOS角

图5 FTCNTSMG与CFTCNTSMG对比

## 4 结论

本文设计了一种带攻击角度约束的非奇异终端滑模固定时间收敛的末制导律.该制导律在考虑了末端攻击角度约束的同时,构造了一种固定时间收敛非奇异终端滑模面.针对滑模面到达过程中存在的奇异性问题,本文给出了带有 $\text{sign}^{m_2} x_1 (0 < m_2 < 1)$ 项滑模面解决奇异性问题一般性设计,并在有限时间收敛的基础上提出了一种固定时间收敛制导律的设计方法.通过Lyapunov理论证明得到,该制导律设计的滑模面以及LOS角和LOS角速率在预先设定的收敛时间上界内收敛,并且比已有的固定时间收敛控制的收敛速度更快.此外,针对目标机动引起的外部扰动,本文通过引入一种扩张状态观测器来对其进行估计,减少了颤振现象的发生.最后,通过采用不同的期望攻击角度拦截目标进行仿真,并与其他制导律进行对比.针对本文设计的制导律进行分析,验证了该制导律的制导性能.

### 参考文献(References)

[1] Guelman M. A qualitative study of proportional navigation[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic



- Systems, 1971, 7(4): 637-643.
- [2] Lee C H, Kim T H, Tahk M J. Interception angle control guidance using proportional navigation with error feedback[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(1): 1-6.
- [3] Zarchan P. Tactical and strategic missile guidance[M]. New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics Publications, 2012: 163-184.
- [4] 敦晓彪, 李君龙, 蔡婧竹. 拦截高机动目标的最优控制制导律[J]. *国防科技大学学报*, 2018, 1: 176-182. (Dun X B, Li J L, Cai J Z. Optimal guidance law for intercepting high-speed maneuvering targets[J]. *J of National University of Defense Technology*, 2018, 1: 176-182.)
- [5] Liu Y F, Qi N M, Tang Z W. Linear quadratic differential game strategies with two-pursuit versus single-evader[J]. *Chinese J of Aeronautics*, 2012, 6: 896-905.
- [6] Yang C D, Chen H Y. Nonlinear  $H_\infty$  infinity robust guidance law for homing missiles[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(6): 882-890.
- [7] Yang J, Li S, Su J, et al. Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances[J]. *Automatica*, 2013, 49(7): 2287-2291.
- [8] Shtessel Y B, Shkolnikov I A, Levant A. Guidance and control of missile interceptor using second-order sliding modes[J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, 45(1): 110-124.
- [9] Venkataraman S T, Gulati S. Control of nonlinear systems using terminal sliding modes[J]. *J of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1993, 115(3): 554-560.
- [10] Zhao J L, Zhou J. Strictly convergent nonsingular terminal sliding mode guidance law with impact angle constraints[J]. *Optik*, 2016, 127: 10971-10980.
- [11] Man Z H, Yu X H. Terminal sliding mode control of mimo linear systems[C]. *Proc of the 35th IEEE Conf on Decision and Control*. Kobe: IEEE, 1996: 4619-4624.
- [12] 蒲明, 蒋涛, 刘鹏. 一类3阶非线性系统的非奇异终端滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(5): 683-691. (Pu M, Jiang T, Liu P. Nonsingular terminal sliding mode control for a class of 3-order nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(5): 683-691.)
- [13] 赵斌, 周军, 卢晓东, 等. 考虑终端角度约束的自适应积分滑模控制[J]. *控制与决策*, 2017, 32(11): 1966-1972. (Zhao B, Zhou J, Lu X D, et al. Adaptive integral sliding mode guidance law considering impact angel constraint[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(11): 1966-1972.)
- [14] Sun L H, Wang W H, Yi R, et al. A novel guidance law using fast terminal sliding mode control with impact angle constraints[J]. *Isa Trans*, 2016, 64(9): 12-23.
- [15] 袁雷, 肖飞, 沈建清, 等. 基于扰动观测器的不确定非线性系统非奇异终端滑模控制[J]. *控制与决策*, 2014, 29(2): 353-357. (Yuan L, Xiao F, Shen J Q, et al. Nonlinear terminal sliding mode control with disturbance observer for uncertain nonlinear systems[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(2): 353-357.)
- [16] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [17] Zhang Y, Tang S J, Guo J. Adaptive terminal angle constraint interception against maneuvering targets with fast fixed-time convergence[J]. *Int J of Robust Nonlinear Control*, 2018, 28(8): 2996-3014.
- [18] Zuo Z, Tie L. Distributed robust finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems[J]. *Int J of Systems Science*, 2016, 47(6): 1366-1375.
- [19] Yang L, Yang J Y. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems[J]. *Int J of Robust Nonlinear Control*, 2011, 21(16): 1865-1879.
- [20] Song J H, Song S M, Zhou H B. Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode guidance law with impact angle constraints[J]. *Int J of Control, Automation and Systems*, 2016, 14(1): 99-114.
- [21] Huang Y, Han J. Analysis and design for the second order nonlinear continuous extended states observer[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2000, 45(21): 1938-1944.
- [22] Wang W H, Xiong S F, Liu X D. Adaptive nonsingular terminal sliding mode guidance law against maneuvering targets with impact angle constraint[J]. *J of Aerospace engineering*, 2015, 229(5): 867-890.
- [23] Kumar S R, Rao S, Ghose D. Nonsingular terminal sliding mode guidance with impact angle constraints[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(4): 1114-1130.

### 作者简介

李晓宝(1990—), 男, 博士生, 从事飞行器导航制导与控制、先进控制理论与应用的研究, E-mail: lixiaobaohjhy@163.com;

张友安(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事先进控制技术及其在飞行器导航、制导与控制中的应用等研究, E-mail: zhangya63@sina.com;

鲍虎(1974—), 男, 副教授, 博士, 从事信号与信息处理应用的研究, E-mail: baohu@tju.edu.cn;

赵国荣(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器控制与导航技术应用等研究, E-mail: grzhao6881@163.com.

(责任编辑: 齐 霖)