

高阶不确定非线性系统的线性自抗扰控制

高 阳[†], 吴文海, 高 丽

(海军航空大学青岛校区 控制工程与指挥系, 山东 青岛 266041)

摘 要: 针对一类具有内部动态和外部扰动未知的 SISO 高阶非线性系统, 提出一种通用的线性自抗扰控制方案. 该方案基于单参数调节的高增益观测器思想, 分别设计线性跟踪微分器、线性扩张状态观测器和线性状态误差反馈控制律. 利用 Lagrange 中值定理和 Cauchy-Schwarz 不等式将系统总扰动的微分值转化为关于系统估计和跟踪误差的函数, 可以解决因系统控制增益未知所导致的控制量微分值难以预先确定的问题. 在此基础上, 基于 Lyapunov 稳定性定理证明闭环系统误差信号有界, 并进一步分析得到系统估计和跟踪误差与控制参数参数的定量关系, 即都可以随观测器增益的增大而达到无限小. 仿真比较结果验证了所提出方案的有效性, 与韩式自抗扰控制方案相比, 该方案结构简单, 调节参数少, 易于工程实现.

关键词: 非线性系统; 线性自抗扰控制; 不确定性; 未知控制增益; 单参数调节; 高增益观测器

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Linear active disturbance rejection control for high-order nonlinear systems with uncertainty

GAO Yang[†], WU Wen-hai, GAO Li

(Department of Control Engineering and Command, Qingdao Branch of Naval Aeronautical University, Qingdao 266041, China)

Abstract: A general linear active disturbance rejection control (LADRC) approach is proposed for a class of single-input single-output (SISO) high-order nonlinear systems with subject to dynamical and external uncertainties. For every part of LADRC, the principle of high-gain observer with single parameter tuning is adopted to construct the linear tracking differentiator, the linear extended state observer and the linear state error feedback law. By using Lagrange mean value theorem and Cauchy-Schwarz inequality, the differential value of the system's total disturbance is transformed into a function with respect to the system estimation and tracking errors, thus solving the problem that the differential value of control input is difficult to be determined in advance due to the unknown control gain. Then it is proved that the errors of the closed-loop system are bounded based on the Lyapunov stability theorem. By further analysis, the quantitative relationship between the estimation and tracking errors with the control parameters is derived, and both can be infinitely small as the observer gain increases. Numerical simulation results show the effectiveness of the proposed approach. Compared with Han's ADRC, the proposed LADRC has simple structure, few tuning parameters and easy implementation in engineering.

Keywords: nonlinear system; linear active disturbance rejection control; uncertainty; unknown control gain; single parameter tuning; high-gain observer

0 引 言

不确定系统的控制是控制科学的核心问题^[1]. 围绕此问题, 涌现出大量的现代控制方法, 如自适应控制、鲁棒控制、内模原理、滑模控制等^[2], 但这些方法在处理不确定性时, 往往因特定的局限性而不利于工程实用, 反倒是经典的 PID 控制, 以其“天生”的抗干扰性和模型不依赖性, 至今仍广泛应用于工业控制领域. 沿承 PID 控制的思想精髓^[3], 韩京清^[4]在对依赖

于精确数学模型的现代控制理论进行深刻反思的基础上, 于 20 世纪 90 年代提出了更为高效的自抗扰控制 (Active disturbance rejection control, ADRC) 技术. 大量数值^[4-7] 和应用^[7-9] 方面的研究表明, ADRC 不依赖被控对象的精确数学模型即可对存在复杂不确定性和外部干扰的系统实施有效控制, 具有很强的鲁棒性和抗干扰性, 同时控制能量更少, 非常适宜工程应用.

然而, 受限于 ADRC 中非线性、非光滑的反馈

收稿日期: 2018-04-28; 修回日期: 2018-09-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51505491).

责任编辑: 王燕舞.

[†]通讯作者. E-mail: 547645462@qq.com.

结构,其理论分析十分困难,在应用中需要调节的控制器参数也较多.为了简化ADRC的分析和实现,文献[10]利用带宽概念,提出了单参数调节的线性ADRC(Linear ADRC, LADRC)方法.之后,文献[11]在直接假设系统不确定性的导数有界的条件下,分析LADRC的收敛性,得出了系统的估计和跟踪误差有界.文献[12]提出了一种利用扩张高增益观测器对系统不确定性进行估计的输出反馈控制方法,给出了闭环系统的稳定性证明.本质上,文献[12]的扩张高增益观测器与文献[11]的线性扩张状态观测器是一致的,因此两者严格的理论分析极大地推动了ADRC的理论研究.文献[13-14]在此基础上分别针对MIMO下三角不确定非线性系统和不确定线性时变系统,详细分析了LADRC闭环系统的动态性能,揭示了系统误差与设计带宽的关系.文献[15]进一步研究了LADRC的控制性能与采样步长的定量关系.文献[16]从频域的角度分析了二阶LADRC的稳定性及其动态性能与控制器参数的关系,扩展了LADRC的研究思路.文献[17-18]将上述LADRC变换为具有相似结构的非线性ADRC(Nonlinear ADRC, NLADRC),在假设存在满足一定条件的Lyapunov函数的前提下,给出了SISO和MIMO系统下的NLADRC收敛性证明.然而,由于假设条件较为严格,通常难以判断被控系统是否满足要求,控制器设计也比较困难.

为此,本文针对一类一般的SISO不确定非线性系统,在文献[17]的基础上,首先基于单参数高增益(Single-parameter and high-gain, SPHG)观测器思想,设计一种通用的线性自抗扰控制器;然后,在对系统不确定性以适当限制的前提下,证明所提出的LADRC方法的收敛性,同时分析闭环系统的跟踪性能与控制参数的关系;最后,通过两个算例仿真的纵、横向对比验证所提出方法的有效性.

1 问题描述

考虑如下SISO高阶非线性系统:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) + \\ \quad w(t) + b(t)u(t), \\ y(t) = x(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: u 为控制输入; y 为系统输出; $f(\cdot)$ 为系统不确定内部动态; $w(t)$ 为系统未知的外部干扰; $b(t)$ 为时变不确定的控制量系数,满足 $b_1 < b(t) < b_2$.

取常数 $b_0 \in (b_1, b_2)$, 将 $(b(t) - b_0)u(t)$ 作为系统未知的控制扰动,并将系统所有不确定性作为总和扰

动;取状态变量

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T = [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]^T,$$

将总和扰动扩充为新的状态变量

$$x_{n+1}(t) = f(t, \mathbf{x}^T(t)) + w(t) + (b(t) - b_0)u(t),$$

并记 $\dot{x}_{n+1}(t) = F(t)$, 可得系统(1)的扩张状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) = x_{n+1}(t) + b_0 u(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = F(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (2)$$

本文的控制目标是,针对非线性系统(2),设计线性自抗扰控制器,使系统输出 y 及其至 $n - 1$ 阶导数 $\dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ 能够稳定跟踪设定轨迹 v_0 及其相应阶导数,且跟踪误差收敛到以原点为中心的小邻域内.

为实现控制目标,作如下假设.

假设1 非线性函数 $f(\cdot) : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ 关于其自变量的所有偏导数连续且有界,同时满足

$$\max \left\{ |f(t, \mathbf{0})|, \left| \frac{\partial f(t, \mathbf{x}^T(t))}{\partial x_i} \right| \right\} \leq M_1.$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$, 常数 $M_1 > 0$.

假设2 除有限个时刻点外,外扰函数 $w(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 连续可导,且满足 $|w(t)| + |\dot{w}(t)| \leq M_2$, 常数 $M_2 > 0$.

假设3 控制量系数 $b(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 连续可导,且满足 $M_3 \leq |b(t)| + |\dot{b}(t)| \leq M_4$, 常数 $M_3, M_4 > 0$.

2 线性自抗扰控制器设计

为方便表示,在不引起歧义的前提下,后文将省略时间变量 t . 针对非线性系统(2),设计具有“扰动估计补偿”功能的线性自抗扰控制器,如图1所示.其结构主要由线性跟踪微分器(Linear tracking differentiator, LTD)、线性扩张状态观测器(Linear extended state observer, LESO)和线性状态误差反馈(Linear state error feedback, LSEF)3部分组成.

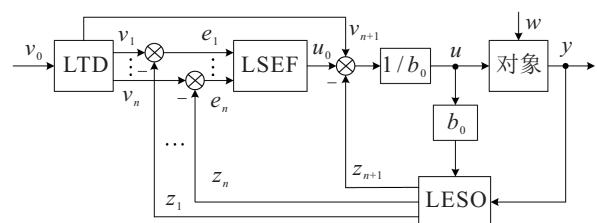


图1 线性自抗扰控制器结构

2.1 线性跟踪微分器

LTD在LADRC中相对独立,其作用在于跟踪给定的输入信号,即 $v_1 \rightarrow v_0$,以避免较大的起始误差对系统的冲击,起到信号过渡的作用;同时得到输入的各阶微分信号,即 $v_{i+1} \rightarrow v_0^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$. 将文献[19]给出的二阶LTD推广到高阶SPGH-LTD形式,有

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2, \\ \dot{v}_2 = v_3, \\ \vdots \\ \dot{v}_n = v_{n+1}, \\ \dot{v}_{n+1} = R^{n+1} \left(a_1 v_1' + a_2 \frac{v_2}{R} + \dots + a_{n+1} \frac{v_{n+1}}{R^n} \right). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $v_1' = v_1 - v_0$, R 为决定跟踪快慢的调节增益,系数 $a_i (i = 1, 2, \dots, n + 1)$ 满足

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

为Hurwitz矩阵, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$.

2.2 线性扩张状态观测器

针对非线性系统(2),利用实时输入 u 、输出 y 构造SPGH-LESO如下:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \frac{k_1}{r}(y - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_3 + \frac{k_2}{r^2}(y - z_1), \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n+1} + \frac{k_n}{r^n}(y - z_1) + b_0 u, \\ \dot{z}_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{r^{n+1}}(y - z_1). \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ 为系统状态 \mathbf{x} 的估计, z_{n+1} 为总和扰动 x_{n+1} 的估计, r 为调节参数(LESO增益的倒数),系数 $k_i (i = 1, 2, \dots, n + 1)$ 满足

$$K = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

为Hurwitz矩阵.

2.3 线性状态误差反馈

定义系统的状态误差 $\mathbf{e} = \mathbf{z} - \mathbf{v} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$,并考虑对总和扰动 x_{n+1} 的实时补偿,设计如下的LSEF:

$$u = \frac{1}{b_0} [g(\mathbf{e}) + v_{n+1} - z_{n+1}]. \quad (5)$$

其中: $g(\mathbf{e}) = l_1 e_1 + l_2 e_2 + \dots + l_n e_n$,系数 $l_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 满足

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

为Hurwitz矩阵.

3 收敛性分析

定义1 LADRC的收敛性是指,对于任意给定的非线性系统(2)、LTD(3)和LESO(4)的初始状态,有:

- 1) $\forall \tau_0 > 0$, s.t. $\lim_{R \rightarrow \infty} |v_1 - v_0| = 0, t \in [\tau_0, \infty)$.
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} |x_i - z_i| = 0, i = 1, 2, \dots, n + 1;$
 $\lim_{t \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} |x_j - v_j| = 0, j = 1, 2, \dots, n.$

由于LTD在LADRC中的相对独立性,在分析LADRC的收敛性时不再将LTD耦合于闭环系统,关于LTD(3)的收敛性有如下结论^[20].

引理1 若矩阵 A 是Hurwitz的,光滑函数 $v_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

$$B = \sup_{t \in [0, T]} |v_0^{(k)}| < \infty, k = 1, 2, \dots, n,$$

其中常数 $T, B > 0$. 则LTD(3)在如下意义下收敛:对于任意给定的LTD(3)的初始值以及任意的 $\rho > 0$ 和 $0 < \tau_0 < T$,存在常数 $R_0 > 0$,使得

$$|v_i - v_0^{(i-1)}| < \rho, i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

在 $t \in [\tau_0, T]$ 上对任意的 $R > R_0$ 都成立.

根据引理1可知,对于任意的 $R > R_0$,存在常数 $M_5 > 0$,使得 $\|\mathbf{v}^T, v_{n+1}\| \leq M_5$.

注1 若无特别说明,文中 $\|\cdot\|$ 均指Euclid范数.

定理1 对于满足假设1~假设3的SISO高阶非线性系统(1),设计如式(3)~(5)的通用LADRC,控制器系数 a_i, k_i, l_j 满足矩阵 A, K, L 是Hurwitz的,那么对于任意给定的闭环系统初始值,存在常数 $r_0 > 0$,使得对于任意 $r \in (0, r_0)$,有:

1) 存在 $\tau_1 > 0$ 和依赖于 τ_1 的常数 $T_1 > 0$,使得对于任意 $t \in (\tau_1, \infty)$,满足

$$|x_i - z_i| \leq T_1 r^{n+2-i}, i = 1, 2, \dots, n + 1;$$

2) 存在 $\tau_1 > 0$ 和依赖于 τ_1 的常数 $T_2 > 0$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_j - v_j| \leq T_2 r, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

证明 1) 构造闭环系统误差模型. 令

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= x_i - z_i, \quad \xi_i = \frac{1}{r^{n+1-i}} \varepsilon_i, \\ i &= 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (6)$$

沿式(2)和(4)求导可得

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{1}{r}(\xi_2 - k_1 \xi_1), \\ \dot{\xi}_2 = \frac{1}{r}(\xi_3 - k_2 \xi_1), \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = \frac{1}{r}(\xi_{n+1} - k_n \xi_1), \\ \dot{\xi}_{n+1} = \frac{1}{r}(rF(t) - k_{n+1} \xi_1), \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\partial f(t, \mathbf{x}^T)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial f(t, \mathbf{x}^T)}{\partial x_i} + \\ & f(t, \mathbf{x}^T) \frac{\partial f(t, \mathbf{x}^T)}{\partial x_n} + w \frac{\partial f(t, \mathbf{x}^T)}{\partial x_n} + \dot{w} + \\ & \left(b \frac{\partial f(t, \mathbf{x}^T)}{\partial x_n} + \dot{b} \right) u + (b - b_0) \dot{u}. \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$\zeta_i = x_i - v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

沿式(2)、(3)和(5)求导可得

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_3, \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n-1} = \zeta_n, \\ \dot{\zeta}_n = g(e) + \xi_{n+1}. \end{cases} \quad (10)$$

令

$$\begin{aligned} \varepsilon &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T, \\ \xi &= [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}]^T, \\ \zeta &= [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]^T, \end{aligned}$$

则有 $e = \zeta - \varepsilon$, 进而式(7)和(10)可写为

$$\dot{\xi} = \frac{1}{r} K \xi + \mathbf{c}_1 F(t), \quad (11)$$

$$\dot{\zeta} = L \zeta + \mathbf{c}_2 (\xi_{n+1} - g(\varepsilon)). \quad (12)$$

其中: $\mathbf{c}_1 = [0, \dots, 0, 1]_{n+1}^T$, $\mathbf{c}_2 = [0, \dots, 0, 1]_n^T$.

2) 证明闭环系统误差有界. 取Lyapunov函数 V :

$\mathbf{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ 如下:

$$V(\xi^T, \zeta^T) = \xi^T P_1 \xi + \zeta^T P_2 \zeta. \quad (13)$$

其中: 矩阵 $P_1, P_2 > 0$ 分别为如下Lyapunov方程:

$$P_1 K + K^T P_1 + I_{n+1} = 0, \quad (14)$$

$$P_2 L + L^T P_2 + I_n = 0 \quad (15)$$

的解, I_{n+1}, I_n 分别为 $n+1, n$ 维单位矩阵.

对式(13)沿式(11)和(12)求关于 t 的导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dV(\xi^T, \zeta^T)}{dt} &= \frac{1}{r} \xi^T (K^T P_1 + P_1 K) \xi + \\ & (\mathbf{c}_1^T P_1 \xi + \xi^T P_1 \mathbf{c}_1) F(t) + \zeta^T (L^T P_2 + P_2 L) \zeta + \\ & (\mathbf{c}_2^T P_2 \zeta + \zeta^T P_2 \mathbf{c}_2) [\xi_{n+1} - g(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (16)$$

由假设1、Lagrange中值定理和Cauchy-Schwarz不等式, 可得

$$\begin{aligned} |f(t, \mathbf{x}^T)| &= \left| f(t, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(t, \theta \mathbf{x}^T)}{\partial x_i} \right| \leq \\ & M_1 + \sqrt{n} M_1 (\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|) \leq \\ & M_1 (1 + \sqrt{n} M_5) + \sqrt{n} M_1 \|\zeta\|, \\ & \theta \in (0, 1), \end{aligned} \quad (17)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left| x_{i+1} \frac{\partial f(t, \mathbf{x}^T)}{\partial x_i} \right| &\leq \\ & \sqrt{n-1} M_1 M_5 + \sqrt{n-1} M_1 \|\zeta\|. \end{aligned} \quad (18)$$

根据式(5), 有

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{b_0} \left[\sum_{i=1}^n l_i (\zeta_i - \varepsilon_i) + v_{n+1} - (x_{n+1} - \varepsilon_{n+1}) \right] = \\ & \frac{1}{b_0} \left[\sum_{i=1}^n l_i (\zeta_i - \varepsilon_i) + v_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \right] - \\ & \frac{1}{b_0} [f(t, \mathbf{x}^T) + w + (b - b_0) u], \end{aligned}$$

移项可得

$$\begin{aligned} |u| &\leq \frac{1}{M_3} \left(\sum_{i=1}^n |l_i \zeta_i| + \sum_{i=1}^n |l_i \varepsilon_i| \right) + \\ & \frac{1}{M_3} (|v_{n+1}| + |\xi_{n+1}| + |f(t, \mathbf{x}^T)| + |w|) \leq \\ & \frac{1}{M_3} [(l + \sqrt{n} M_1) \|\zeta\| + l \|\varepsilon\| + \|\xi\| + M_6]. \end{aligned}$$

其中

$$l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2},$$

$$M_6 = \sqrt{n}M_1M_5 + M_1 + M_2 + M_5.$$

根据式(6), $\forall r \in (0, 1)$, 有 $|\varepsilon_i| \leq |\xi_i|, i = 1, 2, \dots, n$, 进而有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i|^2},$$

即 $\|\varepsilon\| \leq \|\xi\|$, 从而可得

$$|u| \leq \frac{1}{M_3} [(l + \sqrt{n}M_1)\|\zeta\| + (l + 1)\|\xi\| + M_6]. \tag{19}$$

继续考虑式(8)最后1项, 结合式(3)和(4)可得

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{b_0} \left(\sum_{i=1}^n l_i \dot{\varepsilon}_i + \dot{v}_{n+1} - \dot{z}_{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{b_0} \dot{v}_{n+1} + \frac{1}{b_0} \left[\sum_{i=1}^{n-1} l_i \left(\zeta_{i+1} - \varepsilon_{i+1} + \frac{k_i}{r^i} \varepsilon_1 \right) - \frac{k_{n+1}}{r^{n+1}} \varepsilon_1 + \right. \\ &\quad \left. l_n \left(x_{n+1} - \varepsilon_{n+1} - v_{n+1} + \frac{k_n}{r^n} \varepsilon_1 + b_0 u \right) \right] = \\ &= \frac{1}{b_0} \left(\sum_{i=1}^{n-1} l_i \zeta_{i+1} + \sum_{i=1}^{n+1} d_i \varepsilon_i + G(\cdot) \right). \end{aligned}$$

其中

$$d_1 = \sum_{i=1}^n l_i \frac{k_i}{r^i} - \frac{k_{n+1}}{r^{n+1}},$$

$$d_{j+1} = -l_j, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$G(\cdot) = l_n(f(t, \mathbf{x}^T) + w + bu) + (\dot{v}_{n+1} - l_n v_{n+1}).$$

根据式(17)、(19)、假设2、假设3和 $\|\mathbf{v}^T, v_{n+1}\| \leq M_5$ 可知, 存在常数 $M_7, M_8, M_9 > 0$, 使得

$$|G(\cdot)| \leq M_7\|\zeta\| + M_8\|\xi\| + M_9, \forall r \in (0, 1).$$

从而可得

$$|\dot{u}| \leq \left| \frac{1}{b_0} \right| [(l + M_7)\|\zeta\| + (d + M_8)\|\xi\| + M_9], \tag{20}$$

其中 $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_{n+1}^2}$.

将式(17)~(20)代入(8), 并结合假设1~假设3可得, 存在常数 $M_{10}, M_{11}, M_{12} > 0$, 使得

$$|F(t)| \leq M_{10}\|\xi\| + M_{11}\|\zeta\| + M_{12}, \forall r \in (0, 1). \tag{21}$$

对于式(16)的其他项, 有

$$|g(\varepsilon)| = \left| \sum_{i=1}^n l_i \varepsilon_i \right| \leq l\|\xi\|, \forall r \in (0, 1). \tag{22}$$

此外有

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1^T P_1 \xi + \xi^T P_1 \mathbf{c}_1 &= \langle \mathbf{c}_1, P_1 \xi \rangle + \langle \xi, P_1 \mathbf{c}_1 \rangle \leq \\ &\leq \|\mathbf{c}_1\| \|P_1 \xi\| + \|\xi\| \|P_1 \mathbf{c}_1\| \leq 2\|P_1\|_F \|\xi\|, \end{aligned}$$

其中 $\|P\|_F$ 为矩阵 P 的 Frobenius 范数. 令 $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别为矩阵 P 的最小和最大奇异值, 则有

$\sqrt{n}\lambda_{\min}(P) \leq \|P\|_F \leq \sqrt{n}\lambda_{\max}(P)$, n 为矩阵 P 的列数. 这样, 上式可写为

$$\mathbf{c}_1^T P_1 \xi + \xi^T P_1 \mathbf{c}_1 \leq 2\sqrt{n+1}\lambda_{\max}(P_1)\|\xi\|. \tag{23}$$

同理可得

$$\mathbf{c}_2^T P_2 \zeta + \zeta^T P_2 \mathbf{c}_2 \leq 2\sqrt{n}\lambda_{\max}(P_2)\|\zeta\|. \tag{24}$$

最后, 将式(14)、(15)、(21)~(24)代入(16), 得到

$$\begin{aligned} \frac{dV(\xi^T, \zeta^T)}{dt} &\leq \\ &- \|\zeta\|^2 + 2\varpi_2\|\zeta\|(\|\xi\| + l\|\xi\|) + \\ &- \frac{1}{r}\|\xi\|^2 + 2\varpi_1\|\xi\|(M_{10}\|\xi\| + M_{11}\|\zeta\| + M_{12}) \leq \\ &- \left(\frac{1}{2r} - B_1 \right) \|\xi\|^2 + B_2\|\xi\| - \left(1 - \frac{B_3^2}{2} r \right) \|\zeta\|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$\varpi_1 = \sqrt{n+1}\lambda_{\max}(P_1), \varpi_2 = \sqrt{n}\lambda_{\max}(P_2),$$

$$B_1 = 2\varpi_1 M_{10}, B_2 = 2\varpi_1 M_{12},$$

$$B_3 = 2\varpi_1 M_{11} + 2\varpi_2(1 + l).$$

令

$$\sigma = \max\{2, 4B_2 + \delta\}, \forall \delta > 0,$$

$$r_0 = \min\left\{1, \frac{1}{2(B_1 + B_2)}, \frac{1}{B_3^2}\right\},$$

$$\boldsymbol{\eta} = (\xi^T, \zeta^T)^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]^T,$$

对于任意 $r \in (0, r_0)$, 当 $\|\boldsymbol{\eta}\| > \sigma$ 时, 分以下两种情况讨论.

情况1 $\|\xi\| > \frac{\sigma}{2}$. 有 $\|\xi\|^2 > \|\xi\| > 1$, 另外有 $1 - \frac{B_3^2}{2} r > 0, \frac{1}{2r} - B_1 - B_2 > 0$, 由式(25)可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(\xi^T, \zeta^T)}{dt} &\leq -\left(\frac{1}{2r} - B_1\right)\|\xi\|^2 + B_2\|\xi\| < \\ &- \left(\frac{1}{2r} - B_1 - B_2\right)\|\xi\|^2 < 0. \end{aligned}$$

情况2 $\|\xi\| \leq \frac{\sigma}{2}$. 由 $\|\xi\| + \|\zeta\| \geq \|\boldsymbol{\eta}\| > \sigma$, 得到 $\|\zeta\| > \frac{\sigma}{2}$, 另外有 $\frac{1}{2r} - B_1 > 0, B_2 - \frac{\sigma}{4} < 0$, 再由式(25)可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(\xi^T, \zeta^T)}{dt} &\leq B_2\|\xi\| - \left(1 - \frac{B_3^2}{2} r\right)\|\zeta\|^2 \leq \\ &B_2\|\xi\| - \frac{1}{2}\|\zeta\|^2 < \frac{\sigma}{2} \left(B_2 - \frac{\sigma}{4}\right) < 0. \end{aligned}$$

综上所述, 对于任意 $r \in (0, r_0)$, 当 $\|\boldsymbol{\eta}\| > \sigma$ 时, 有 $\frac{dV(\xi^T, \zeta^T)}{dt} < 0$. 即存在 $\tau_{11} > 0$, 使得 $\|\boldsymbol{\eta}\| \leq \sigma$ 在 $t \in (\tau_{11}, \infty)$ 都成立, 从而闭环系统误差有界.

3) 估计闭环系统误差大小.

考虑子系统(11), 取 Lyapunov 函数 $V_1: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ 为 $V_1(\xi^T) = \xi^T P_1 \xi$, 则有

$$\varpi_3 \|\xi\|^2 \leq V_1(\xi^T) \leq \varpi_1 \|\xi\|^2,$$

其中 $\varpi_3 = \sqrt{n+1} \lambda_{\min}(P_1)$.

由 $\|\eta\| \leq \sigma$ 和式(21)可得, $\forall t > \tau_{11}, \exists M_0 > 0$, s.t. $|F(t)| \leq M_0$. 求 V_1 沿式(11)对 t 的导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(\xi^T)}{dt} &\leq -\frac{1}{r} \|\xi\|^2 + 2\varpi_1 M_0 \|\xi\| \leq \\ &\quad -\frac{B_4}{r} V_1(\xi^T) + B_5 \sqrt{V_1(\xi^T)}. \end{aligned}$$

其中: $B_4 = \frac{1}{\varpi_1}, B_5 = \frac{2\varpi_1 M_0}{\sqrt{\varpi_3}}$. 进而可得

$$\frac{d\sqrt{V_1(\xi^T)}}{dt} \leq -\frac{B_4}{2r} \sqrt{V_1(\xi^T)} + \frac{B_5}{2}.$$

因此 $\forall t > \tau_{11}$, 有

$$\begin{aligned} \|\xi\| &\leq \sqrt{\frac{V_1(\xi^T)}{\varpi_3}} \leq \\ &\sqrt{\frac{V_1(\xi^T(\tau_{11}))}{\varpi_3}} e^{-\frac{B_4}{2r}(t-\tau_{11})} + \\ &\frac{B_5}{2\sqrt{\varpi_3}} \int_{\tau_{11}}^t e^{-\frac{B_4}{2r}(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\frac{2\sqrt{V_1(\xi^T(\tau_{11}))}}{B_4\sqrt{\varpi_3}(t-\tau_{11})} r + (1 - e^{-\frac{B_4}{2r}(t-\tau_{11})}) \frac{B_5}{B_4\sqrt{\varpi_3}} r \leq \\ &\left(\frac{2\sqrt{V_1(\xi^T(\tau_{11}))}}{B_4\sqrt{\varpi_3}(t-\tau_{11})} + \frac{B_5}{B_4\sqrt{\varpi_3}} \right) r. \end{aligned}$$

表明存在 $\tau_{12} > \tau_{11}$ 和依赖于 τ_{12} 的常数 $T_1 > 0$, 使得 $\forall t > \tau_{12}$, 满足 $\|\xi\| \leq T_1 r$.

结合式(6)可得

$$|x_i - z_i| = r^{n+1-i} |\xi_i| \leq r^{n+1-i} \|\xi\| \leq T_1 r^{n+2-i}.$$

即 $\lim_{r \rightarrow 0} |x_i - z_i| = 0, i = 1, 2, \dots, n+1$, 在 $t \in (\tau_{12}, \infty)$ 上一致成立.

同理, 考虑子系统(12), 取 Lyapunov 函数 $V_2: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为 $V_2(\zeta^T) = \zeta^T P_2 \zeta$, 则有

$$\varpi_4 \|\zeta\|^2 \leq V_2(\zeta^T) \leq \varpi_2 \|\zeta\|^2,$$

其中 $\varpi_4 = \sqrt{n} \lambda_{\min}(P_2)$.

利用上述 $\|\xi\| \leq T_1 r$, 求 V_2 沿式(12)对 t 的导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(\zeta^T)}{dt} &\leq \\ &- \|\zeta\|^2 + 2\varpi_2 \|\zeta\| (\|\xi\| + l\|\xi\|) \leq \\ &- \|\zeta\|^2 + 2\varpi_2(1+l)T_1 r \|\zeta\| \leq \\ &- B_6 V_2(\zeta^T) + B_7 r \sqrt{V_2(\zeta^T)}. \end{aligned}$$

其中: $B_6 = \frac{1}{\varpi_2}, B_7 = \frac{2\varpi_2 T_1(1+l)}{\sqrt{\varpi_4}}$. 进而可得

$$\frac{d\sqrt{V_2(\zeta^T)}}{dt} \leq -\frac{B_6}{2} \sqrt{V_2(\zeta^T)} + \frac{B_7}{2} r.$$

因此 $\forall t > \tau_{12}$, 结合式(9)有

$$\begin{aligned} |x_i - v_i| = |\zeta_i| &\leq \|\zeta\| \leq \sqrt{\frac{V_2(\zeta^T)}{\varpi_4}} \leq \\ &\frac{2\sqrt{V_2(\zeta^T(\tau_{12}))}}{B_6\sqrt{\varpi_4}(t-\tau_{12})} + (1 - e^{-\frac{B_6}{2}(t-\tau_{12})}) \frac{B_7 r}{B_6\sqrt{\varpi_4}} \leq \\ &\frac{2\sqrt{V_2(\zeta^T(\tau_{12}))}}{B_6\sqrt{\varpi_4}(t-\tau_{12})} + \frac{B_7}{B_6\sqrt{\varpi_4}} r, \end{aligned}$$

即存在依赖于 τ_{12} 的常数 $T_2 > 0$, 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i - v_i| \leq T_2 r$, 进而可得 $\lim_{t \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} |x_i - v_i| = 0, i = 1, 2, \dots, n$. \square

4 算例仿真

本节通过两个算例仿真验证所提出 LADRC 算法的有效性, 以及 ADRC 固有的鲁棒性和抗干扰性. 在仿真前, 首先给出 LADRC 参数选取的一般原则:

1) 基于控制器带宽的概念, 选择 a_i, k_i, l_j 在满足矩阵 A, K, L 是 Hurwitz 的前提下, 使得

$$\begin{aligned} h(\lambda_A) &= (\lambda_A + w_A)^{n+1}, \\ h(\lambda_K) &= (\lambda_K + w_K)^{n+1}, \\ h(\lambda_L) &= (\lambda_L + w_L)^n \end{aligned}$$

比其他选择要好, 其中 $h(\lambda_A), h(\lambda_K), h(\lambda_L)$ 分别代表矩阵 A, K, L 的特征多项式, 通常使 $w_A = w_K = w_L = 1$ 即可.

2) 对于 R , 由于 LTD 在 LADRC 中的相对独立性, R 的取值变化对系统的性能影响不大, 无需精确调节, 通常取 $R \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ 即可满足需要.

3) 需要重点调节 LESO 参数 r , 可兼顾控制性能和控制量, 在 $[0.001, 1)$ 之间调节. 通常, 系统不确定性越大, r 取值越小. 若要减少控制量, 则可适当增大 r .

仿真1 考虑如下 SISO 三阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = f(t, x_1, x_2, x_3) + w(t) + u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (26)$$

假设系统的未知内部动态为

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2, x_3) &= \\ &0.5x_1 + e^{-2t} \sin^2 x_1 + x_2 + \sin 2t \cos x_3, \end{aligned}$$

外界干扰为

$$w(t) = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq t < 10; \\ 0.5 \cos(2(t-10)), & t \geq 10. \end{cases}$$

令扩张状态 $x_4 = f(t, x_1, x_2, x_3) + w(t)$, 容易验证系统(26)满足假设1~假设3.

为此,设计四阶LADRC如下:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2, \\ \dot{v}_2 = v_3, \\ \dot{v}_3 = v_4, \\ \dot{v}_4 = -R^4(v_1 - v_0) - 4R^3v_2 - 6R^2v_3 - 4Rv_4, \\ \dot{z}_1 = z_2 + \frac{4}{r}(y - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_3 + \frac{6}{r^2}(y - z_1), \\ \dot{z}_3 = z_4 + \frac{4}{r^3}(y - z_1) + u, \\ \dot{z}_4 = \frac{1}{r^4}(y - z_1), \\ e_i = z_i - v_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ u = -e_1 - 3e_2 - 3e_3 + v_4 - z_4. \end{cases} \quad (27)$$

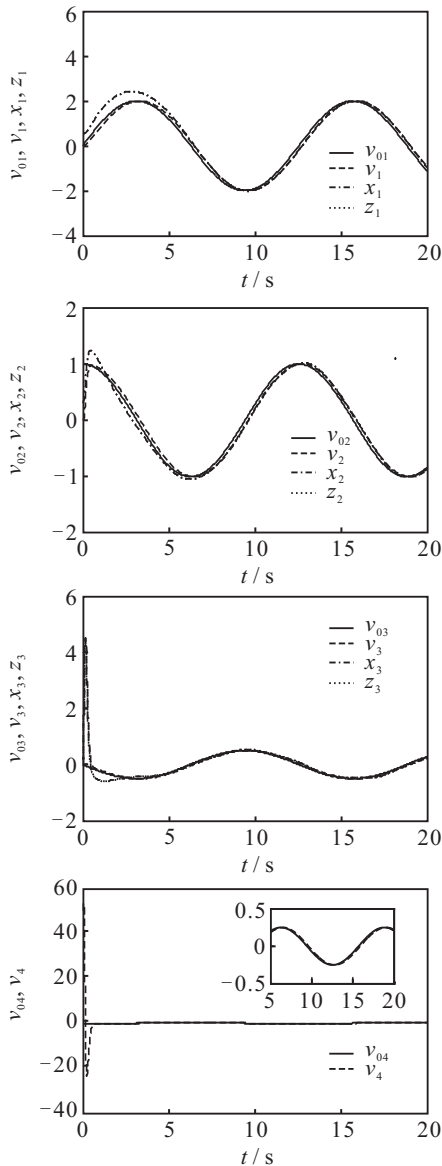


图2 闭环系统轨迹跟踪与状态估计

这样,系统(26)和LADRC(27)构成闭环系统. 令其初始值

$$\begin{aligned} [x_1(0), x_2(0), x_3(0)] &= [0.5, 0.3 + 0.05\rho, 0.2 + 0.1\rho], \\ [v_1(0), v_2(0), v_3(0), v_4(0)] &= \mathbf{0}^{1 \times 4}, \\ [z_1(0), z_2(0), z_3(0), z_4(0)] &= [0.5, 0.3, 0.2, 0.1], \end{aligned}$$

ρ 为0~1之间的随机数;设定轨迹 $v_0(t) = 2 \sin(0.5t)$, 并令 $v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{04}$ 分别代表 v_0 及其1~3阶导数;取调节参数 $R = 20, r = 0.01$,积分步长 $h = 0.001$. 得到实时数值仿真结果如图2和图3所示.

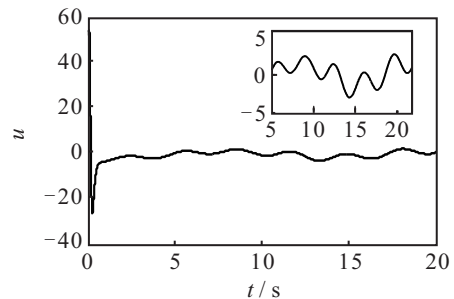


图3 闭环系统控制输入

由图2可见,基于设定轨迹的良好跟踪微分效果($[v_1, v_2, v_3, v_4] \rightarrow [v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{04}]$)以及系统状态和总扰动精确估计效果($[z_1, z_2, z_3, z_4] \rightarrow [x_1, x_2, x_3, x_4]$),系统输出能够稳定跟踪设定轨迹 $y \rightarrow v_0$,且有 $\dot{y} \rightarrow \dot{v}_0, \ddot{y} \rightarrow \ddot{v}_0$,从数值上验证了定理1的正确性,表明了所提出LADRC方法控制高阶不确定系统的有效性,同时体现了LADRC的鲁棒性和抗干扰性.

图3显示控制输入在初始时刻比较大,这是由于随机选取的系统初始值导致了较大的初始误差 $e_i (i = 1, 2, 3)$. 在实际控制过程中,精确掌握系统初始值可以有效减小控制量,同时减少 R 和增大 r 也可以减小控制量,但这需要在跟踪精度与控制量之间权衡.

仿真2 倒立摆系统是一个复杂的、不稳定的、非线性的系统,其控制一直是控制研究的一个典型问题. 一级倒立摆系统的模型^[21]如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - amlx_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos x_1 u}{4l/3 - aml \cos^2 x_1}, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (28)$$

其中: x_1 为摆的角度(相对于垂直方向), x_2 为摆的角速度, $2l$ 为摆长, $a = 1/(m + M)$, m 为摆的质量, M 为小车的质量, u 为加在小车上的控制力.

针对系统(28),取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2, 2l = 0.65 \text{ m}, m = 0.21 \text{ kg}, M = 0.45 \text{ kg}$. 令初始值 $x_1(0) = x_2(0) =$

0, 设定值 $v = \pi/4$, 即控制倒立摆与垂直方向的夹角稳定在 $\pi/4$, 据此估计控制量系数 $b_0 = -2.8$. 系统(28)可转化为如式(2)所示的三阶形式, 其中扩张状态为

$$x_3 = \frac{g \sin x_1 - amlx_2^2 \sin(2x_1)/2}{4l/3 - aml \cos^2 x_1} - \left(\frac{a \cos x_1}{4l/3 - aml \cos^2 x_1} \right) u,$$

代表系统的总和扰动.

由于系统(28)的实际状态总是有界的, 满足假设条件, 可以设计如式(27)的三阶LADRC. 取控制器系数 $[a_1, a_2, a_3] = [-1, -3, -3], [k_1, k_2, k_3] = [3, 3, 1], [l_1, l_2] = [-1, -2]$, 以满足矩阵 A, K, L 是Hurwitz的. 同时, 利用韩式ADRC算法作为比较, 算法如下^[3]:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2, \\ \dot{v}_2 = \text{fhan}(v_1 - v, v_2, r_1, h), \\ e = z_1 - y, \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_1 e, \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_2 \text{fal}(e, 0.5, h_1) + b_0 u, \\ \dot{z}_3 = -\beta_3 \text{fal}(e, 0.25, h_1), \\ e_i = v_i - z_i, \quad i = 1, 2, \\ u = (-\text{fhan}(e_1, ce_2, r_2, h_2) - z_3)/b. \end{cases} \quad (29)$$

其中: 非线性函数 $\text{fal}(e, \alpha, \delta)$ 的表达式为

$$\text{fal}(e, \alpha, \delta) = \begin{cases} |e|^\alpha \text{sgn}(e), & |e| > \delta; \\ e/\delta^{1-\alpha}, & |e| \leq \delta. \end{cases}$$

最速控制综合函数 $\text{fhan}(x_1, x_2, r_0, h_0)$ 的具体算法为

$$\begin{cases} d = r_0 h_0^2, \\ a_0 = h_0 x_2, \\ x_0 = x_1 + a_0, \\ a_1 = \sqrt{d^2 + 8d|x_0|}, \\ a_2 = a_0 + \text{sgn}(x_0)(a_1 - d)/2, \\ \text{fsg}(x_0, d) = (\text{sgn}(x_0 + d) - \text{sgn}(x_0 - d))/2, \\ a = (a_0 + x_0 - a_2)\text{fsg}(x_0, d) + a_2, \\ \text{fsg}(a, d) = (\text{sgn}(a + d) - \text{sgn}(a - d))/2, \\ \text{fhan} = -r_0(a/d - \text{sgn}(a))\text{fsg}(a, d) - r_0 \text{sgn}(a). \end{cases}$$

在仿真中, 取LADRC参数 $R = 10, r = 0.001$; 取ADRC(29)参数 $r_1 = 2, r_2 = 15, \beta_1 = 100, \beta_2 = 200, \beta_3 = 3000, h_1 = 0.005, h_2 = 0.05, c = 1$. 令两个控制器的初始值均为0, 积分步长 $h = 0.001$, 仿真结果如图4和图5所示.

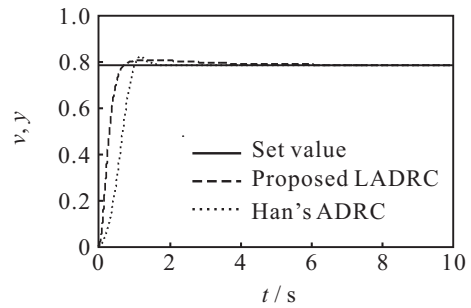


图4 目标跟踪性能比较

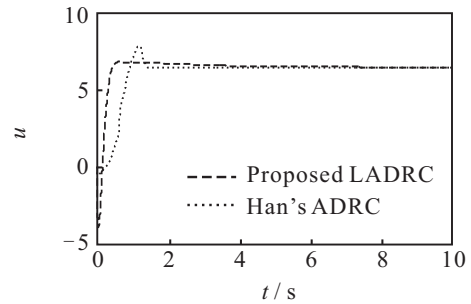


图5 控制输入比较

图4和图5表明, 对于强非线性不稳定系统, 所提出的LADRC算法同样具有良好的控制效果, 进一步体现了LADRC的鲁棒自适应性. 虽然得益于ADRC(29)的最速控制效应, LADRC的过渡时间较长, 但控制输入更为平滑, 更重要的是, LADRC待调节参数少且整定容易, 便于实际工程应用.

5 结论

本文针对一类具有内部不确定和外部扰动的SISO高阶非线性系统, 提出了一种基于SPHG的LADRC方法. 该方法控制器结构简单, 需要调节的参数很少, 易于实现. 理论分析表明, 取足够大的LTD参数和足够小的LESO参数, 可保证闭环系统的跟踪误差达到任意小. 算例仿真验证了所提出方法的有效性, 显示了该方法具有良好的鲁棒自适应性和抗干扰性, 具有一定的工程应用价值.

参考文献(References)

- [1] Gao Z Q. On the centrality of disturbance rejection in automatic control[J]. ISA Trans, 2014, 53(4): 850-857.
- [2] 郭宝珠. 非线性系统的自抗扰控制引论[J]. 数学建模及其应用, 2017, 6(1): 13-22.
(Guo B Z. An introduction to active disturbance rejection control for nonlinear systems[J]. Mathematical Modeling and Its Applications, 2017, 6(1): 13-22.)
- [3] Han J Q. From PID to active disturbance rejection control[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2009, 56(3): 900-906.
- [4] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用[J]. 控制与决策, 1998, 13(1): 19-23.

- (Han J Q. Active disturbance rejection controller and applications[J]. Control and Decision, 1998, 13(1): 19-23.)
- [5] Tian G, Gao Z Q. Frequency response analysis of active disturbance rejection based control system[C]. Proc of the 16th IEEE Int Conf on Control. Singapore: IEEE, 2007: 1595-1599.
- [6] Chen X, Li D H, Gao Z Q, et al. Tuning method for second-order active disturbance rejection control[C]. Proc of the 30th Chinese Control Conf. Yantai: IEEE, 2011: 6322-6327.
- [7] Zheng Q, Gao Z Q. On practical applications of active disturbance rejection control[C]. Proc of the 29th Chinese Control Conf. Beijing: IEEE, 2010: 6095-6100.
- [8] Li Z Y, Li X M, Zhou Z Y. Active disturbance rejection controller for loitering unit with parameter uncertainty[C]. Proc of the 16th Int Conf on Control, Automation and Systems. Gyeongju: IEEE, 2016: 140-144.
- [9] Zheng Q, Gao Z Q. An energy saving, factory-validated disturbance decoupling control design for extrusion processes[C]. Proc of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation. Beijing: IEEE, 2012: 2891-2896.
- [10] Gao Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning[C]. Proc of the American Control Conf Denver: IEEE, 2003: 4989-4996.
- [11] Zheng Q, Gao Z Q, Gao L Q. On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics[C]. Proc of the 46th IEEE Conf on Decision and Control. New Orleans: IEEE, 2007: 3501-3506.
- [12] Freidovich L B, Khalil H K. Performance recovery of feedback-linearization-based designs[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(10): 2324-2334.
- [13] Xue W C, Huang Y. On performance analysis of ADRC for a class of MIMO lower-triangular nonlinear uncertain systems[J]. ISA Trans, 2014, 53(4): 955-962.
- [14] Xue W C, Huang Y. Performance analysis of active disturbance rejection tracking control for a class of uncertain LTI systems[J]. ISA Trans, 2015, 58: 133-154.
- [15] Xue W C, Huang Y. Tuning of sampled-data ADRC for nonlinear uncertain systems[J]. J of Systems Science and Complexity, 2016, 29(5): 1187-1211.
- [16] 袁东, 马晓军, 曾庆含, 等. 二阶系统线性自抗扰控制器频带特性与参数配置研究[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(12): 1630-1640.
(Yuan D, Ma X J, Zeng Q H, et al. Research on frequency-band characteristics and parameters configuration of linear active disturbance rejection control for second-order systems[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(12): 1630-1640.)
- [17] Guo B Z, Zhao Z L. On convergence of nonlinear active disturbance rejection for SISO systems[C]. Proc of the 24th Chinese Control and Decision Conf. Taiyuan: IEEE, 2012: 3507-3512.
- [18] Zhao Z L, Guo B Z. On convergence of nonlinear active disturbance rejection for MIMO systems[C]. Proc of the 31st Chinese Control Conf. Hefei: IEEE, 2012: 434-441.
- [19] Guo B Z, Han J Q, Xi F B. Linear tracking-differentiator and application to online estimation of the frequency of a sinusoidal signal with random noise perturbation[J]. Int J of Systems Science, 2002, 33(5): 351-358.
- [20] Guo B Z, Zhao Z L. On convergence of tracking differentiator and application to frequency estimation of sinusoidal signals[C]. Proc of the 8th Asian Control Conf Kaohsiung: IEEE, 2011: 1470-1475.
- [21] 王春晓, 武玉强. 控制方向未知的全状态约束非线性系统的鲁棒自适应跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 153-161.
(Wang C X, Wu Y Q. Robust adaptive tracking control for full state-constrained nonlinear systems with unknown control direction[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(2): 153-161.)

作者简介

高阳(1989—), 男, 博士生, 从事非线性控制理论与应用的研究, E-mail: 547645462@qq.com;

吴文海(1962—), 男, 教授, 博士, 从事舰载机着舰引导控制、战斗机攻击导引轨迹控制等研究, E-mail: hkdx_2017@126.com;

高丽(1982—), 女, 讲师, 博士, 从事先进飞行控制技术 etc 研究, E-mail: 1720294960@qq.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)