

# 控制与决策

Control and Decision

## 控制输入受限的准全控制利用率有限时间稳定控制

蒲明, 袁建英

引用本文:

蒲明, 袁建英. 控制输入受限的准全控制利用率有限时间稳定控制[J]. 控制与决策, 2020, 35(5): 1039–1051.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1269>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 四旋翼无人机轨迹稳定跟踪控制

Trajectory stable tracking control of quadrotor UAV

控制与决策. 2020, 35(2): 349–356 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0639>

### 多无人机完全分布式有限时间编队控制

Fully distributed finite-time formation control for multiple UAVs

控制与决策. 2019, 34(12): 2656–2660 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0314>

### 快速二阶终端滑模控制及其在下肢外骨骼的应用

Fast second-order terminal sliding mode control and its application in exoskeleton of lower extremities

控制与决策. 2019, 34(1): 162–166 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.0976>

### 带乘性噪声的非齐次Markov跳跃系统有限时间稳定性

Finite-time stability for nonhomogeneous Markov jump systems with multiplicative noises

控制与决策. 2018, 33(3): 565–570 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1602>

### 不确定广义大系统有限时间鲁棒分散控制

Finite-time robust decentralized control for uncertain singular large-scale systems

控制与决策. 2017, 32(8): 1493–1498 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0769>

### 变体飞行器的非脆弱有限时间鲁棒控制器设计

Non-fragile finite-time robust controller design for morphing aircraft

控制与决策. 2017, 32(11): 1933–1940 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1087>

### 交会对接模拟系统姿态位置耦合有限时间控制

Coupled attitude and position finite-time control for rendezvous and docking simulator

控制与决策. 2017, 32(10): 1789–1795 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1163>

### 仿射切换系统的有限时间鲁棒 $\infty$ 跟踪控制

Robust  $\infty$  finite-time tracking control for affine switched system

控制与决策. 2015(6): 1126–1130 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0476>

# 控制输入受限的准全控制利用率有限时间稳定控制

蒲明<sup>†</sup>, 袁建英

(成都信息工程大学 控制工程学院, 成都 610225)

**摘要:** 针对控制输入受限的非线性系统, 分 6 种情况证明有限时间稳定控制器 (finite time stable controller, FTSC) 作用下的系统状态收敛速度在论域空间中每一点必快于非有限时间稳定控制器 (non-FTSC, NFTSC) 作用下的系统状态收敛速度, 并给出每一类情况下设计参数应满足的充分性约束条件, 同时证明这些条件的存在性. 在此基础上, 提出全控制利用率控制器 (CCUC) 的定义, 证明 CCUC 必然引起抖振, 进而提出准全控制利用率控制器 (QCCUC) 设计的思想, 并证明控制输入受限条件下, FTSC 的控制利用率必优于任意快速 FTSC (FFTSC), 即具有更优的控制性能, 从而得到一系列关于参数优化的结论. 理论证明的结论通过图表、数例和仿真得到了验证. 所得结论对终端滑模控制、加幂积分控制、有限时间稳定 backstepping 控制等多种 FTSC 均广泛适用.

**关键词:** 输入受限; 有限时间稳定控制; 控制利用率; 非线性控制系统; 终端滑模控制; 加幂积分控制; 有限时间 backstepping 控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Quasi-complete control utilization finite time stable control with input constraint

PU Ming<sup>†</sup>, YUAN Jian-ying

(Automation Engineering College, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

**Abstract:** For nonlinear systems with input constraint, it is proved that the convergence speed of state under the action of a finite time stable controller (FTSC) is faster than that under the action of a non-FTSC at any point in state space. Sufficient conditions in six cases are summarized to guarantee the conclusion and it is proved that these conditions are attainable with appropriate parameter selection. Then, the definition of a complete control utilization controller (CCUC) is proposed, and it is proved that the convergence speed under the action of the FTSC is faster than that under the action of fast FTSC with input constraint. A series of conclusions concerning the parameter optimization are proposed to improve the control performance. Numerical examples, simulations, figures and tables are used to illustrate the proposed theory and make the conclusions more understandable. The proposed conclusions are fit for the improvement of nearly all kinds of FTSC methods, such as terminal sliding mode control, adding one power integrator control and finite time stable backstepping control.

**Keywords:** input constraint; finite time stable control; control utilization ratio; nonlinear control systems; terminal sliding mode control; adding one power integrator control; finite time stable backstepping control

## 0 引言

有限时间稳定控制器 (FTSC) 是现代非线性控制领域中性能优异的控制方法. 基于 FTSC 的系统状态轨迹或误差轨迹将在有限时间内从任意有限初始点收敛到原点<sup>[1]</sup>. FTSC 包含多种先进非线性控制方法, 如: 与滑模控制结合产生了终端滑模控制 (terminal sliding mode control, TSMC)<sup>[2-3]</sup>; 与 backstepping 控制 (backstepping control, BC) 结合产生了有限时间稳

定 BC (FTSBC)<sup>[4]</sup>; 又进一步发展得到加幂积分控制 (adding one power integrator control, AOPIC)<sup>[5]</sup> 和齐次理论<sup>[6]</sup> 等. 所以 FTSC 的研究结果具备普适性, 其研究结论可推广到多种控制方法中. 另外, 工程中的控制任务总是要求在有限时间内完成, 所以 FTSC 是工程需要的产物, 并在应用中体现了优良性能. 从 2008 年开始, FTSC 逐渐成为研究热点并应用于具有扰动和不确定的高超声速飞行器的姿态控制<sup>[7-8]</sup>、永磁同

收稿日期: 2018-09-17; 修回日期: 2018-12-07.

基金项目: 四川省科技厅基金项目 (18ZDYF3191); 四川省教育厅基金项目 (17ZB0095); 成都信息工程大学科研基金项目 (KYTZ201636).

责任编辑: 关治洪.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: msznuaa@163.com.

步电机的速度控制<sup>[9]</sup>、基于观测器的未知信息有限时间提取<sup>[10-11]</sup>等. 但FTSC目前仍处于起步阶段, 研究成果相对于非有限时间稳定控制器(NFTSC)较少, 且主要集中在二阶系统的TSMC控制. 原因有二: 一方面是FTSC提出的时间并不长, 较为成熟的TSMC提出也不过20余年, 而FFTSC、齐次理论和AOPIC则是近10余年提出和开始发展的; 另一方面, 现有FTSC还存在大量需要完善和改进的地方, 例如高阶系统TSMC奇异性问题<sup>[12]</sup>、子系统具有非匹配复合干扰的任意阶非线性系统FTSC控制器有界性证明问题<sup>[10,13]</sup>、AOPIC保守性问题<sup>[14-15]</sup>等. 这些问题既是需要解决的难题, 也是FTSC性能改进和提升的突破点.

理论应用中更加紧迫的实际问题是, 任何物理控制系统的控制能力总是有限的, 因此, FTSC控制器设计中应考虑控制输入受限的约束. 但现有相关研究成果非常少<sup>[16-18]</sup>, 且存在以下3个问题: 1) 普遍使用饱和函数或符号函数来限制控制器, 避免超过允许的最大值. 尽管该方法简单易行、运算量小, 但它相对于替换前的非线性FTSC控制器, 控制性能缺乏理论证明, 也不具备自适应能力. 而当被控系统状态(或误差状态)接近原点阶段时, 饱和函数引起控制性能下降, 造成相当部分的控制能力闲置. 符号函数虽是一种FTSC控制器, 也是一种全控制利用率控制器, 但却会引起强烈抖振, 理论和工程都无法应用. 2) 现有文献都是针对某一种控制方法进行讨论的, 没有上升到FTSC这一层面进行研究, 其结论也被限制于某一种具体的控制方法, 难以推广. 3) 设计和选择参数都是依据尝试和经验进行, 缺乏理论的指导和保证, 未考虑如何在控制输入受限的情况下, 使得被控性能最优或接近最优.

针对上述问题, 本文开展以下工作: 1) 在给定的初始条件及控制输入受限的约束条件下, 证明FTSC作用下的状态收敛速度必然在原点及初始状态以外的任意点均快于NFTSC作用下的状态收敛速度, 并给出参数选择的充分性约束条件, 进而证明这些约束条件总是可以选择设计参数使之成立; 2) 定义了控制利用率和任意控制器对应状态收敛时间的积分表达式, 并证明满足所给约束条件的FTSC必然在控制利用率和状态收敛时间两方面都优于NFTSC; 3) 证明全控制输入利用率控制器必然会带来抖振, 进而设计准全控制利用率的FTSC控制器; 4) 证明在控制输入受限的情况下, 满足给定约束的传统FTSC必然在状态收敛速度和控制利用率等方面优于任意

FFTSC; 5) 讨论参数选择对控制性能的影响, 并给出定性的结论; 6) 对于多个结论, 采用数例、图表、仿真等进行证明和阐释, 并利用本文结论对AOPIC控制器进行改进. 这些工作均直观地表明了所提出结论对控制性能的提升作用.

本文工作的主要创新和贡献在于: 1) 所研究的输入受限条件下的QCCUC-FTSC是第一次提出, 其本质在于约束条件下控制性能的最优化, 得到用于参数定量选择的充分性约束条件. 2) 现有文献中, 当控制输入不考虑受限约束时, 所得结论总是FFTSC优于普通FTSC<sup>[10]</sup>. 但本文证明在输入受限约束下, FTSC优于任何FFTSC. 这一全新结论是对现有结论的有益补充. 考虑到实际工程中控制输入总是有限的, 因此, 本文结论相对于现有结论更具工程应用意义. 3) 所得控制器具有有限时间稳定、无抖振等优点. 4) 改进后的控制器具有自适应调节控制量大小的能力, 但未附加复杂控制算法, 从而可以避免大运算量. 5) 所得结论是FTSC这一层面的, 不局限于某一具体控制方法, 所以, 对于属于FTSC分支的终端滑模控制、加幂积分控制、有限时间backstepping控制等均适用.

## 1 问题陈述和预备知识

在控制理论的研究中, 通常存在如下两个问题.

**问题1** 不考虑控制量约束时, 总是可以通过增大控制参数, 使NFTSC的控制量大于给定的FTSC控制量. 该问题反过来, 以及在FTSC与FFTSC之间也存在. 因此, 不同控制器的控制性能优劣似乎难以认定, 甚至认为相关研究并不必要.

**问题2** 控制器的设计未考虑实际控制装置的最大输出. 这存在两方面的问题: 一是控制理论解算得到的控制器可能超过控制装置最大允许值 $u_{\max}$ , 使得理论不匹配实际; 二是理论所得控制器小于 $u_{\max}$ , 使控制装置的控制能力存在一定程度的闲置. 若能尽量减小这部分硬件可以提供而因控制理论闲置的控制量, 则将有助于进一步优化控制性能.

此外, 受限FTSC的设计也受限于无抖振、最优化或者次优化等性能的要求. 针对这些问题, 在本文中首先证明输入受限条件下FTSC(包括FFTSC)必然在每一点均优于NFTSC, 并给出充分性约束条件.

考虑如下MIMO系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, t). \quad (1)$$

其中:  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ;  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^n$ ,  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}^{n \times m}$  为已知非线性函数;  $\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x})$  对于任意 $\boldsymbol{x}$ 存在;  $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, t) : \boldsymbol{R}^{n+1} \rightarrow \boldsymbol{R}^n$  为未知有界干扰;  $\boldsymbol{u} : \boldsymbol{R}^m$

为控制器.

因为总是可以结合观测器等方法设计控制器为

$$u = g^{-1}(x)(-f(x) - \hat{d}(x, t) + v).$$

其中:  $\hat{d}(x, t)$  为观测器对  $d(x, t)$  的估计值,  $v$  为新控制器. 代入系统方程并考虑到观测器误差可任意小, 所以式(1)可化为  $\dot{x} = v$ . 由于  $\|v\| = \|g(x)u + f(x) + d(x, t)\|$ , 可定义受限控制器  $v$  的上界为

$$v_{\max} \triangleq \min\{\|g(x)u + f(x) + d(x, t)\|, \forall \|u\| = u_{\max}\}.$$

鉴于以下论证过程较为复杂, 为便于清晰地阐明思路和论述的简洁, 下面针对如下一阶 SISO 系统进行讨论:

$$\dot{x} = u. \tag{2}$$

根据不同的控制方法, 系统(2)中的  $u$  可包含多种控制器, 但总体可分为两大类, 即

$$\begin{aligned} u_1(x) &\triangleq -k_2x^{l_2} - k_3x^{l_3}, \\ u_2(x) &\triangleq -k_1x. \end{aligned}$$

其中:  $l_2 \in (0, 1)$ ,  $l_3 \geq 1$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $k_3 \geq 0$ . 当  $k_3 = 0$  时,  $u_1(x)$  是 FTSC 的核心部分, 如 TSMC 控制器<sup>[7,9]</sup>、AOPIC 控制器<sup>[8,14]</sup>、齐次控制器<sup>[6]</sup>、高阶滑模控制器<sup>[11]</sup>中的吸引子项; 当  $k_3 > 0$ ,  $l_3 = 1$  时,  $u_1(x)$  是 FFTSC<sup>[3,15]</sup>; 当  $k_3 > 0$ ,  $l_3 > 1$  时,  $u_1(x)$  可代表一大类新型 FFTSC<sup>[10,19]</sup>. 所以  $u_1(x)$  几乎涵盖了现有各种 FTSC. 由于文献[10]已证明  $\bar{u}_2(x) \triangleq -k_1x^{l_3}$  这类 NFTSC 性能较  $u_2(x) = -k_1x$  更差, 本文仅以  $u_2(x) = -k_1x$  作为 NFTSC 的代表.

**注1**  $k_3$  可以为0, 但不允许  $k_2 = 0$ , 否则无论其他参数怎么选择, 都会使  $u_1(x)$  为 NFTSC.

**注2**  $l_2$  小于1的原因是保证  $u_1(x)$  为 FTSC<sup>[10]</sup>;  $l_2$  不能等于0的原因在于避免控制器和被控系统状态出现抖振<sup>[19]</sup>;  $l_2$  不能取为负值的原因是避免奇异性<sup>[3]</sup>. 严格地,  $x^{l_2}$  应写为  $|x|^{l_2}\text{sgn}(x)$  以避免出现复数, 但  $x^{l_2}$  为习惯性简写, 本文保留该写法以简化推导.

**注3** 为了避免反复“冲过”原点形成抖振, 控制器在原点处应为0值. 对于这一约束要求,  $u_1(x)$  和  $u_2(x)$  均满足.

下面给出几个常用引理和推论.

**引理1**<sup>[20]</sup> 对于正数  $a_1, a_2, \dots, a_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ , 有下式成立, 当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立:

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq \left( \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

当引理1中  $n = 2$  时, 有如下推论1.

**推论1** 对于正数  $a_1, a_2, p_1, p_2$ , 有下式成立:

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 \geq a_1^{\frac{p_1}{p_1+p_2}} a_2^{\frac{p_2}{p_1+p_2}} (p_1 + p_2).$$

**引理2** 若  $0 < x_1 < x_3 < 1 < x_2, 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1, 1 < \beta_1 < \beta_2$ , 则  $x_1^{\alpha_1} > x_1^{\alpha_2}, x_2^{\beta_2} > x_2^{\beta_1}, x_3^{\alpha_1} > x_3^{\alpha_2}$ .

**证明** 令  $f_1(\alpha) = x_1^\alpha, \alpha \in (0, 1); f_2(\beta) = x_2^\beta, \beta > 1; f_3(x) = x^{\alpha_1}, x \in (0, 1)$ ; 则有  $\dot{f}_1(\alpha) = x_1^\alpha \times \ln x_1 < 0, \dot{f}_2(\beta) = x_2^\beta \ln x_2 > 0, \dot{f}_3(x) = \alpha_1 x^{\alpha_1-1} > 0$ . 根据函数的单调性, 引理2结论即可得证.  $\square$

**引理3** 若  $f_1 = (x + \Delta)^l, f_2 = x^l + \Delta^l, x > 0, l \geq 1, \Delta$  为一正数, 则  $f_1 \geq f_2$ , 当且仅当  $l = 1$  时等号成立.

**证明** 令  $f(x) = f_1 - f_2 = (x + \Delta)^l - x^l - \Delta^l$ , 显然有  $f(0) = 0$  以及  $\dot{f} = l[(x + \Delta)^{l-1} - x^{l-1}] \geq 0$ , 仅当  $l = 1$  时等号成立. 所以根据函数的单调性, 引理3结论即可得证.  $\square$

**引理4** 若  $0 < y < x < 1, 0 < l < 1$ , 且满足  $x \leq l^{\frac{1}{1-l}}$ , 则  $x^l - y^l > x - y$ .

**证明** 令  $f(x) = x^l - x$ , 则有

$$\dot{f}(x) = lx^{l-1} - 1 = \frac{l - x^{1-l}}{x^{1-l}}.$$

所以满足  $x \leq l^{\frac{1}{1-l}}$ , 故有  $\dot{f}(x) > 0$ . 结论可得.  $\square$

## 2 控制输入受限下 FTSC 必优于 NFTSC

首先, 根据现有结论<sup>[3,6-11,14-15,19]</sup> 可知,  $u_1(x)$  或  $u_2(x)$  作用下的系统(2)都是渐近稳定的. 因此, 对于任意  $t_1 > t_2 > 0$  都有  $x(t_1) \leq x(t_2)$ , 也即系统的状态必然属于区间  $[0, x_0]$ .

其次, 设允许的最大控制量为  $u_{\max} > 0$ , 被控系统初始状态为  $x_0 > 0$ . 一般地, 总是选择设计参数使控制器在初始时刻达到允许的最大值, 即  $|u_1(x_0)| = |u_2(x_0)| = u_{\max}$ . 因此得到本文第1个约束为

$$u_{\max} = k_2 x_0^{l_2} + k_3 x_0^{l_3} = k_1 x_0. \tag{3}$$

在  $t \geq 0$  的时刻, 均要求控制器不超过允许的最大值. 因此得到如下的第2个约束:

$$|u_1(x)| \leq u_{\max}, |u_2(x)| \leq u_{\max}, \forall x \in [0, x_0]. \tag{4}$$

根据约束方程(3), 对于给定的  $u_{\max}$  和  $x_0, u_2(x)$  中参数  $k_1$  固定, 即

$$k_1 = \frac{u_{\max}}{x_0}. \tag{5}$$

$u_1(x)$  中的可选参数有4个, 当  $k_3$  (或  $k_2$ ) 为负时, 虽然在约束(3)下也可满足控制系统的稳定性要求, 但不一定满足约束(4), 如下例.

**例1** 设  $x_0 = 1, u_{\max} = 10$ , 若选择参数  $l_2 =$

$1/2, l_3 = 3/2, k_1 = 10, k_2 = 20, k_3 = -10$ , 则  $u_1(x), u_2(x)$  在  $[0, 1]$  上的曲线如图1所示.  $u_1(x_0) = 20 \times 1^{0.5} - 10 \times 1^{1.5} = 10$ , 满足约束(3), 但在  $x \in (0.3819, 1)$  的区间上  $u_1(x) > u_{\max}$ , 不满足约束(4).

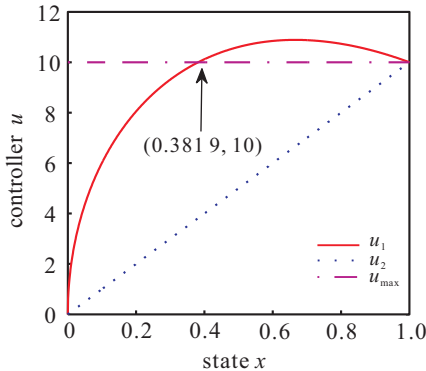


图1 例1控制器曲线

可以证明如下结论成立.

**定理1** 若取  $k_2 > 0, k_3 \geq 0$ , 则  $u_1(x)$  满足约束(3)和约束(4).

**证明** 设  $x = x_0 - \Delta, \Delta \in [0, x_0]$ , 由约束(3)有  $u_{\max} = k_2(x + \Delta)^{l_2} + k_3(x + \Delta)^{l_3}$ . 由引理2有  $k_2(x + \Delta)^{l_2} > k_2x^{l_2}$ ; 由引理3有  $k_3(x + \Delta)^{l_3} \geq k_3x^{l_3} + k_3\Delta^{l_3}$ . 所以  $u_{\max} \geq k_2x^{l_2} + k_3x^{l_3} + k_3\Delta^{l_3} \geq k_2x^{l_2} + k_3x^{l_3} = |u_1(x)|$ .  $\square$

由定理1得到本文第3个约束为

$$\begin{cases} k_2 > 0, \\ k_3 \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

因  $k_2 > 0$ , 根据约束(3)必有

$$u_{\max} > k_3x^{l_3}, \quad x \in [0, x_0]. \quad (7)$$

**注4** 本文的分析证明中仅考虑了  $x \in [0, x_0]$ ,  $x_0 > 0$  的情况. 当  $x \in [x_0, 0], x_0 < 0$  时, 结论同样成立, 证明过程仅差一负号, 这里不再给出.

约束(3)、约束(4)和约束(6)在本节后续部分均成立.

下文中将证明 FTSC 优于 NFTSC 的思路是: 若  $u_1(x)$  作用下系统状态的收敛速度在每一点均快于  $u_2(x)$  作用下系统状态的收敛速度, 则 FTSC 优于 NFTSC. 考虑到  $u_1(x)$  和  $u_2(x)$  的正负性总是相同的且均能保证系统稳定, 以及系统(2)的收敛速度大小等于控制器的绝对值, 所以设比较函数为  $\Theta(x) \triangleq |u_1(x)| - |u_2(x)|$ . 由于在  $x \in [0, x_0], x_0 > 0$  的论域内有

$$\Theta(x) = k_2x^{l_2} + k_3x^{l_3} - k_1x, \quad (8)$$

目标可转化为在上述区间内证明  $\Theta(x) > 0$ .

由式(8)和约束(3)知  $\Theta(x)$  在初始点和原点处均有0值, 即

$$\begin{cases} \Theta(0) = 0, \\ \Theta(x_0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

下面根据初始条件和参数选择的不同, 分6种情况证明  $\Theta(x) > 0$  对于任意  $x \in (0, x_0)$  均成立.

**情况1**  $x_0 = 1, l_3 = 1$ . 由式(9)和引理2有

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= k_2x^{l_2} + k_3x - k_1x > \\ &k_2x + k_3x - k_1x = \\ &(k_2 + k_3 - k_1)x. \end{aligned} \quad (10)$$

由约束条件(3)可知

$$\Theta(1) = k_2 + k_3 - k_1 = 0. \quad (11)$$

将式(11)代入(10)有  $\Theta(x) > 0$ . 无新增约束.

**情况2**  $x_0 = 1, l_3 > 1$ . 约束(11)同样满足, 再根据推论1可得

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= k_2x^{l_2} + k_3x^{l_3} - k_1x > \\ &(k_2 + k_3)(x^{l_2k_2}x^{l_3k_3})^{\frac{1}{k_2+k_3}} - k_1x = \\ &(k_2 + k_3)x^{\frac{l_2k_2+l_3k_3}{k_2+k_3}} - (k_2 + k_3)x. \end{aligned}$$

根据引理2, 若  $\frac{l_2k_2 + l_3k_3}{k_2 + k_3} \leq 1$ , 则必有  $\Theta(x) > 0$  成立. 考虑到  $x_0 = 1$  并将约束(3)代入不等式  $\Theta(x) > 0$ , 有  $l_2k_2 + l_3(u_{\max} - k_2) \leq u_{\max}$ . 即如下约束可使  $\Theta(x) > 0$  成立:

$$k_2 \geq u_{\max} \frac{l_3 - 1}{l_3 - l_2} \in (0, u_{\max}). \quad (12)$$

式(12)与  $k_2 \leq u_{\max}$  不矛盾, 所以  $k_2$  可得, 同时  $k_3 = u_{\max} - k_2 \in (0, u_{\max})$  也可得. 综上, 在约束(3)~约束(6)下, 对于给定的  $u_{\max}, l_2$  和  $l_3$  总可以选择恰当的  $k_2$  和  $k_3$  使得约束(12)和  $\Theta(x) > 0$  成立.

由引理2可知  $\frac{l_2k_2 + l_3k_3}{k_2 + k_3}$  越小  $\Theta(x)$  越大,  $u_1(x)$  相对于  $u_2(x)$  的优势越明显. 因此有

$$\frac{l_2k_2 + l_3k_3}{k_2 + k_3} = \frac{l_2k_2 + l_3(u_{\max} - k_2)}{u_{\max}} = l_3 - k_2 \frac{l_3 - l_2}{u_{\max}}.$$

所以对于给定的  $u_{\max}$ , 若  $k_2$  越大,  $l_2$  越小,  $l_3$  越小, 则  $\Theta(x)$  越大. 该结论表明在  $x \in (0, 1)$  范围内,  $x^{l_2}$  项在  $u_1(x)$  中起主导作用且控制作用明显强于  $x^{l_3}$ . 这一结论也可由有限时间稳定 Lyapunov 定理推得<sup>[10]</sup>.

**例2** 若  $x_0 = 1, x = 1/4, l_2 = 1/2, l_3 = 3/2, u_{\max} = 10$ , 则由式(5)可知  $k_1 = 10$ . 选取参数  $k_3 = 5$ , 由式(11)可得  $k_2 = 5$ . 且满足

$$k_2 \geq u_{\max} \frac{l_3 - 1}{l_3 - l_2} = 10 \frac{1.5 - 1}{1.5 - 0.5} = 5,$$

即满足约束(12). 代入式(8)有  $\Theta(1/4) = 5/8 > 0$ . 在其他条件不变的情况下, 增大  $k_2$ , 减小  $k_3, l_2$  和  $l_3$ ,

根据约束(3)~约束(6),取 $k_2 = 8, k_3 = 2, l_2 = 1/4, l_3 = 1.01$ ,经检验满足约束(12).代入式(8)有 $\Theta(1/4) = 3.6619 > 5/8$ .相对于第1种参数选择,后一种参数选择下, $u_1(x)$ 控制性能将更优于 $u_2(x)$ .

**情况3**  $0 < x_0 < 1, l_3 = 1$ .此时有 $0 < x < x_0 < 1$ .将上述条件代入约束(5)和约束(9),有 $u_{\max} = k_2x_0^{l_2} + k_3x_0 = k_1x_0$ ,再根据式(9)有

$$\Theta(x) = k_2x^{l_2} + k_3x - k_1x = \frac{u_{\max} - k_3x_0}{x_0^{l_2}}x^{l_2} + k_3x - \frac{u_{\max}}{x_0}x. \quad (13)$$

式(13)的导数为

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{u_{\max} - k_3x_0}{x_0^{l_2}}l_2x^{l_2-1} + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0}.$$

令 $\dot{\Theta}(\bar{x}) = 0$ ,可得

$$\bar{x}^{l_2-1} = \frac{u_{\max} - k_3x_0}{l_2(u_{\max} - k_3x_0)x_0^{1-l_2}}.$$

因为约束(6)要求 $k_2 > 0$ ,所以必有 $u_{\max} - k_3x_0 > 0$ ,于是可进一步化为 $\bar{x} = l_2^{\frac{1}{1-l_2}}x_0 < x_0$ .将该极值代入式(13),有

$$\Theta(\bar{x}) = \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}}\bar{x}^{l_2} - \frac{k_3x_0}{x_0^{l_2}}\bar{x}^{l_2} + k_3\bar{x} - \frac{u_{\max}}{x_0}\bar{x} = \frac{k_3x_0 - u_{\max}}{x_0}\bar{x}^{l_2}(\bar{x}^{1-l_2} - x_0^{1-l_2}).$$

根据约束(6)有 $k_3x_0 - u_{\max} < 0$ ,再由引理2有 $\bar{x}^{1-l_2} - x_0^{1-l_2} < 0$ ,又 $x_0 > 0, \bar{x}^{l_2} > 0$ ,所以 $\Theta(\bar{x}) > 0$ .令 $\dot{\Theta}(0) \triangleq \lim_{x \rightarrow 0} \dot{\Theta}(x), \dot{\Theta}(x_0) \triangleq \lim_{x \rightarrow x_0} \dot{\Theta}(x)$ ,于是有

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(0) &= \frac{u_{\max} - k_3x_0}{x_0^{l_2}}l_2\frac{1}{x(0)^{1-l_2}} + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0} = +\infty, \\ \dot{\Theta}(x_0) &= (u_{\max} - k_3x_0)l_2x_0^{-1} + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0} = \frac{(1-l_2)(k_3x_0 - u_{\max})}{x_0} < 0. \end{aligned}$$

因为 $\bar{x}$ 是 $\Theta(x)$ 唯一的极点,所以当 $x \in (0, \bar{x})$ 时, $\dot{\Theta}(x) > 0$ ;当 $x \in (\bar{x}, x_0)$ 时, $\dot{\Theta}(x) < 0$ .再由 $\Theta(\bar{x}) > 0$ 可知, $x \in (0, x_0)$ 时必有 $\Theta(x) > 0$ .该情况下无新增约束条件.

**情况4**  $0 < x_0 < 1, l_3 > 1$ .代入约束(3)有 $u_{\max} = k_2x_0^{l_2} + k_3x_0^{l_3} = k_1x_0$ .进一步有

$$\Theta(x) = \frac{u_{\max} - k_3x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}}x^{l_2} + k_3x^{l_3} - \frac{u_{\max}}{x_0}x.$$

其导数为

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{u_{\max} - k_3x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}}l_2x^{l_2-1} + k_3l_3x^{l_3-1} - \frac{u_{\max}}{x_0}. \quad (14)$$

类似于情况3中证明,由式(14)有

$$\dot{\Theta}(0) = +\infty,$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(x_0) &= \frac{u_{\max} - k_3x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}}l_2x_0^{l_2-1} + k_3l_3x_0^{l_3-1} - \frac{u_{\max}}{x_0} = \frac{k_3x_0^{l_3}(l_3 - l_2) - u_{\max}(1 - l_2)}{x_0}. \end{aligned}$$

上式分母为正,所以只要 $k_3$ 满足

$$k_3 < \frac{u_{\max}(1 - l_2)}{x_0^{l_3}(l_3 - l_2)}, \quad (15)$$

则必有 $\dot{\Theta}(x_0) < 0$ .在以上结论基础上,若有 $\ddot{\Theta}(x) < 0$ ,则类似于情况3中证明,可证必存在唯一极点 $\bar{x} \in (0, x_0)$ 使得 $\Theta(\bar{x}) > 0, \dot{\Theta}(\bar{x}) = 0$ .进一步可得 $\Theta(x) > 0, x \in (0, x_0)$ .因为

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta}(x) &= \frac{u_{\max} - k_3x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}}l_2(l_2 - 1)x^{l_2-2} + k_3l_3(l_3 - 1)x^{l_3-2}, \end{aligned}$$

$l_2 - 2 < l_3 - 2$ ,所以由引理2有 $x^{l_2-2} > x^{l_3-2}, \forall x \in (0, x_0)$ .若

$$\frac{u_{\max} - k_3x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}}l_2(1 - l_2) > k_3l_3(l_3 - 1),$$

则必有 $\ddot{\Theta}(x) < 0$ .要满足上述不等式,应有

$$\begin{aligned} \frac{u_{\max} - k_3x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}}l_2(1 - l_2) - k_3l_3(l_3 - 1) > 0 \Rightarrow \\ u_{\max}l_2 - u_{\max}l_2^2 - k_3l_2x_0^{l_3} + k_3l_2^2x_0^{l_3} - k_3l_3^2x_0^{l_2} + k_3l_3x_0^{l_2} > 0. \end{aligned}$$

代入约束(3),上面不等式转化为

$$\begin{aligned} k_2l_2x_0^{l_2} + k_3l_2x_0^{l_3} - k_2x_0^{l_2}l_2^2 - k_3x_0^{l_3}l_2^2 - k_3l_2x_0^{l_3} + k_3l_2^2x_0^{l_3} - k_3l_3^2x_0^{l_2} + k_3l_3x_0^{l_2} > 0 \Rightarrow \\ k_2l_2 - k_2l_2^2 - k_3l_3^2 + k_3l_3 > 0. \end{aligned}$$

再一次代入约束(3),使上述不等式仅含 $k_3$ ,转化为

$$\begin{aligned} k_3l_3(l_3 - 1) &< k_2l_2(1 - l_2) \Rightarrow \\ k_3l_3(l_3 - 1) &< \frac{u_{\max} - k_3x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}}l_2(1 - l_2) \Rightarrow \\ k_3x_0^{l_3}l_3(l_3 - 1) + k_3x_0^{l_3}l_2(1 - l_2) &< \\ u_{\max}l_2(1 - l_2). \end{aligned}$$

所以参数 $k_3$ 若满足约束

$$k_3 < \frac{u_{\max}l_2(1 - l_2)}{x_0^{l_2}l_3(l_3 - 1) + x_0^{l_3}l_2(1 - l_2)}, \quad (16)$$

则 $\ddot{\Theta}(x) < 0$ ,从而得到结论 $\Theta(x) > 0, x \in (0, x_0)$ .

$\Theta(x)$ 状态变化示意如图2所示.

下面证明满足约束(16)就必然满足约束(15).式(16)中,分子分母每一项都为正,因此右边项为正数.再令式(16)左右两边同乘以 $x_0^{l_3}$ ,可得

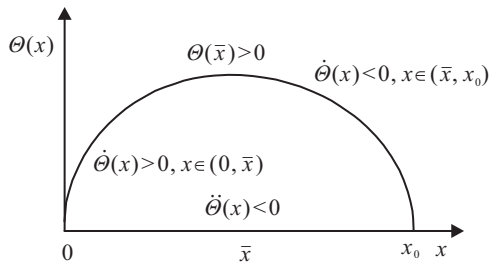


图2 情况4中 $\Theta(x)$ 曲线

$$k_3 x_0^{l_3} < u_{\max} \frac{x_0^{l_2} l_2 (1-l_2)}{x_0^{l_2} l_3 (l_3-1) + x_0^{l_3} l_2 (1-l_2)} = \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2-l_3} \frac{l_3}{l_2} \frac{l_3-1}{1-l_2} + 1}$$

因为  $x_0^{l_2-l_3} \frac{l_3}{l_2} \frac{l_3-1}{1-l_2} > 0$ , 所以

$$u_{\max} \frac{1}{x_0^{l_2-l_3} \frac{l_3}{l_2} \frac{l_3-1}{1-l_2} + 1} < u_{\max}$$

这意味着满足约束(16)则必然使得约束(7)成立. 所以  $k_3$  必然存在. 进一步, 将式(16)变形为

$$k_3 < u_{\max} \frac{1-l_2}{x_0^{l_3} (l_3-l_2)} \times \frac{x_0^{l_3} l_2 (l_3-l_2)}{x_0^{l_2} l_3 (l_3-1) + x_0^{l_3} l_2 (1-l_2)}$$

上式右端第2项, 其分子与分母相减可得一新函数为

$$\Gamma = x_0^{l_3} l_2 (l_3-l_2) - x_0^{l_2} l_3 (l_3-1) - x_0^{l_3} l_2 (1-l_2) = x_0^{l_3} l_2 (l_3-1) \left(1 - \frac{1}{x_0^{l_3-l_2} l_2} \frac{l_3}{l_2}\right)$$

其中:  $l_3/l_2 > 1, x_0^{l_3-l_2} \in (0, 1)$ . 所以  $\frac{1}{x_0^{l_3-l_2} l_2} \frac{l_3}{l_2} > 1$ , 故  $\Gamma < 0$ , 即有

$$\frac{x_0^{l_3} l_2 (l_3-l_2)}{x_0^{l_2} l_3 (l_3-1) + x_0^{l_3} l_2 (1-l_2)} < 1$$

这说明  $k_3$  若满足约束(16), 则必然满足约束(15), 因此在该情况下, 参数选择只需考虑约束(16).

**情况5**  $x_0 > 1, l_3 = 1$ . 由约束(3)和式(8)有

$$\Theta(x) = k_2 x^{l_2} + k_3 x - k_1 x = \frac{u_{\max} - k_3 x_0}{x_0^{l_2}} x^{l_2} + k_3 x - \frac{u_{\max}}{x_0} x \quad (17)$$

下面根据  $x$  不同取值分3种情形具体讨论.

1) 当  $x = 1$  时. 此时

$$\Theta(1) = \frac{u_{\max} - k_3 x_0}{x_0^{l_2}} + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0} = \frac{\left(1 - \frac{1}{x_0^{1-l_2}}\right)(u_{\max} - k_3 x_0)}{x_0^{l_2}}$$

其中  $x_0^{1-l_2} > 1$ . 再由式(7)可知, 必有  $\Theta(1) > 0$ .

2) 当  $x < 1$  时. 由引理2可知  $x^{l_2} > x, x_0^{l_2} < x_0$ , 所以由式(17)有下式成立:

$$\Theta(x) > \frac{u_{\max} - k_3 x_0}{x_0} x + k_3 x - \frac{u_{\max}}{x_0} x = 0, \quad (18)$$

即  $\Theta(x) > 0$ .

3) 当  $1 < x < x_0$  时. 式(17)的导数为

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{u_{\max} - k_3 x_0}{x_0^{l_2}} l_2 x^{l_2-1} + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0} \quad (19)$$

令  $\dot{\Theta}(\bar{x}) = 0$ , 可解出

$$\bar{x}^{l_2-1} = \frac{u_{\max} - k_3 x_0}{x_0} \frac{x_0^{l_2}}{l_2 (u_{\max} - k_3 x_0)}$$

因为  $u_{\max} - k_3 x_0 > 0$ , 所以有  $\bar{x}^{l_2-1} = \frac{1}{l_2} x_0^{l_2-1}$ , 即  $\Theta(x)$  存在唯一的极点

$$\bar{x} = l_2^{\frac{1}{1-l_2}} x_0 > 0. \quad (20)$$

因为  $1-l_2 \in (0, 1)$ , 所以  $\frac{1}{1-l_2} > 1$ , 进一步有  $l_2^{\frac{1}{1-l_2}} < l_2 < 1$ , 从而证明了  $\bar{x} \in (0, x_0)$ .

由式(17)可知  $\Theta(1) = k_2 + k_3 - k_1$ . 再由约束(3)有

$$\begin{aligned} 0 &= k_2 x_0^{l_2} + k_3 x_0 - k_1 x_0 = \\ & x_0 \left( k_2 \frac{1}{x_0^{1-l_2}} + k_3 - k_1 \right) < \\ & x_0 (k_2 + k_3 - k_1) = x_0 \Theta(1). \end{aligned}$$

所以必有  $\Theta(1) > 0$ . 同样, 根据约束(3)有  $\Theta(x_0) = 0$ . 由情形3)中所得结论可知,  $\Theta(x)$  曲线必属于图3中3种可能曲线之一.

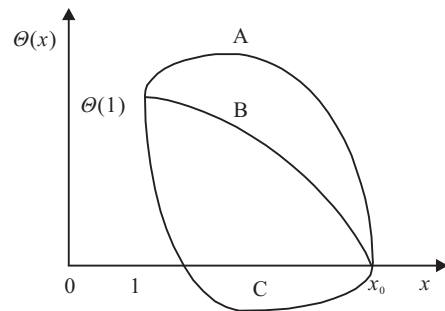


图3  $\Theta(x)$ 的3种可能曲线

图3中: 曲线A对应于  $\bar{x} \in (1, x_0), \Theta(\bar{x}) > \Theta(1), \dot{\Theta}(\hat{x}) > 0, \hat{x} \in (1, \bar{x}), \dot{\Theta}(\hat{x}) < 0, \hat{x} \in (\bar{x}, x_0)$ ; 曲线B对应于  $\bar{x} < 1, \Theta(\bar{x}) > \Theta(1), \dot{\Theta}(x) < 0$ ; 曲线C对应于  $\bar{x} \in (1, x_0), \Theta(\bar{x}) < 0, \dot{\Theta}(\tilde{x}) < 0, \tilde{x} \in (1, \bar{x}), \dot{\Theta}(\hat{x}) > 0, \hat{x} \in (\bar{x}, x_0)$ .

下面证明只可能是A、B两种情况, 并分别给出约束条件. 由式(19)必有

$$\dot{\Theta}(x_0) = \frac{u_{\max} - k_3 x_0}{x_0^{l_2}} l_2 x_0^{l_2-1} + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0} = \frac{x_0^{l_2-1} (u_{\max} - k_3 x_0) (l_2 - 1)}{x_0^{l_2}} < 0, \quad (21)$$

而图3中曲线C与式(21)矛盾,因此曲线C不可能是 $\Theta(x)$ 的曲线. 曲线A和曲线B则均满足式(21). 进一步考察

$$\dot{\Theta}(1) = \frac{u_{\max} - k_3 x_0}{x_0^{l_2}} l_2 + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0} = \frac{x_0^{l_2-1}(u_{\max} - k_3 x_0)(l_2 x_0^{1-l_2} - 1)}{x_0^{l_2}}. \quad (22)$$

如果 $\bar{x} \leq 1$ (对应于曲线B),则根据式(20)有 $1 \geq l_2^{\frac{1}{1-l_2}} x_0$ ,从而有 $1 \geq l_2 x_0^{1-l_2}$ . 代入式(22)有 $\dot{\Theta}(1) \leq 0$ , 等号当且仅当 $\bar{x} = 1$ 时成立. 由于 $\bar{x}$ 为唯一极点,同时由式(21)可知,在 $x \in (1, x_0)$ 区间上均有 $\dot{\Theta}(x) < 0$ . 再根据 $\Theta(x_0) = 0$ 可知,在 $x \in (1, x_0)$ 区间上均有 $\Theta(x) > 0$ . 所以约束(20)足以保证 $\Theta(x) > 0$ .

进一步证明约束(20)对于任意 $l_2$ 均是必然成立的. 因为 $1 \geq l_2^{\frac{1}{1-l_2}} x_0$ ,所以约束(20)等价于 $1/l_2^{\frac{1}{1-l_2}} \geq x_0 > 1$ ,即要求 $l_2^{\frac{1}{1-l_2}} < 1$ . 对于任意 $l_2 \in (0, 1)$ ,显然有 $l_2^{\frac{1}{1-l_2}} < l_2 < 1$ 成立. 所以对于任意 $x_0 > 1$ ,总是存在 $l_2 \in (0, 1)$ 使得约束(20)成立.

若 $\bar{x} > 1$ (对应于曲线A),则有

$$l_2^{\frac{1}{1-l_2}} x_0 > 1. \quad (23)$$

代入式(22)有 $\dot{\Theta}(1) > 0$ . 考虑到 $\bar{x}$ 为唯一极点、式(21)以及 $\Theta(1) > 0, \Theta(x_0) = 0$ ,所以必有 $\Theta(\bar{x}) > \Theta(1) > 0 = \Theta(x_0)$ . 将 $\Theta(\bar{x})$ 和 $\Theta(1)$ 的表达式代入式(23),有

$$\begin{aligned} & k_2 (l_2^{\frac{1}{1-l_2}} x_0)^{l_2} + \frac{u_{\max} - k_2 x_0^{l_2}}{x_0} l_2^{\frac{1}{1-l_2}} x_0 - \frac{u_{\max}}{x_0} l_2^{\frac{1}{1-l_2}} x_0 > \\ & k_2 + \frac{u_{\max} - k_2 x_0^{l_2}}{x_0} - \frac{u_{\max}}{x_0} \Rightarrow \\ & k_2 l_2^{\frac{l_2}{1-l_2}} x_0^{l_2} - k_2 x_0^{l_2} l_2^{\frac{1}{1-l_2}} > k_2 - \frac{k_2 x_0^{l_2}}{x_0} \Rightarrow \\ & l_2^{\frac{l_2}{1-l_2}} - l_2^{\frac{1}{1-l_2}} > \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0}. \end{aligned} \quad (24)$$

所以,若选择参数 $l_2$ 满足约束(24),则必有 $\Theta(\bar{x}) > \Theta(1)$ . 再考虑到 $\bar{x}$ 为唯一极点、式(21)以及 $\Theta(1) > 0, \Theta(x_0) = 0$ ,则有 $\Theta(x) > 0, x \in (0, x_0)$ 成立.

下面证明满足式(23)( $\bar{x} > 1$ ),则约束(24)必然对于任意 $l_2$ 成立. 由 $\bar{x} > 1$ 有 $l_2^{\frac{1}{1-l_2}} > \frac{1}{x_0}$ . 又因 $l_2^{\frac{1}{1-l_2}} \in (0, 1)$ ,所以 $1/x_0 < 1$ . 根据引理4,对于任意 $x_0 > 1$ 和 $l_2 \in (0, 1)$ ,下式成立:

$$\left(l_2^{\frac{1}{1-l_2}}\right)^{l_2} - \left(\frac{1}{x_0}\right)^{l_2} > l_2^{\frac{1}{1-l_2}} - \frac{1}{x_0},$$

即式(24)成立.

综合以上3种情形下的结论,情况5无需新增约束条件即可保证 $\Theta(x) > 0, x \in (0, x_0)$ 成立.

**情况6**  $x_0 > 1, l_3 > 1$ . 下面根据 $x$ 不同取值分两种情形讨论.

1) 当 $x = 1$ 时,有

$$\Theta(1) = \frac{u_{\max} - k_3 x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}} + k_3 - \frac{u_{\max}}{x_0} = \frac{u_{\max} x_0^{1-l_2} - k_3 x_0^{1+l_3-l_2} + k_3 x_0 - u_{\max}}{x_0}. \quad (25)$$

若式(25)满足 $\Theta(1) > 0$ ,则应满足如下约束:

$$k_3 < u_{\max} \frac{x_0^{1-l_2} - 1}{x_0^{1+l_3-l_2} - x_0}. \quad (26)$$

不等式(26)右端分子分母均大于0,因此总存在参数 $k_3$ 使该不等式成立.

2) 当 $x < 1$ 或 $1 < x < x_0$ 时,有

$$\begin{aligned} \Theta(x) = & \frac{u_{\max} - k_3 x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}} x^{l_2} + k_3 x^{l_3} - \frac{u_{\max}}{x_0} x = \\ & \frac{u_{\max} x^{l_2} (1 - x_0^{l_2-1} x^{1-l_2})}{x_0^{l_2}} + \\ & \frac{k_3 x_0^{l_2} x^{l_2} (x^{l_3-l_2} - x_0^{l_3-l_2})}{x_0^{l_2}}. \end{aligned}$$

基于上式,要使 $\Theta(x) > 0$ ,则要求满足如下约束:

$$k_3 < \min \left\{ u_{\max} \frac{1 - x_0^{l_2-1} x^{1-l_2}}{x_0^{l_2} (x_0^{l_3-l_2} - x^{l_3-l_2})}, \forall x \in (0, 1) \cup (1, x_0) \right\}, \quad (27)$$

其中 $x_0^{l_2-1} x^{1-l_2} = (x/x_0)^{1-l_2} \in (0, 1)$ ,所以式(27)右边分子分母均为正数,因此,总可以选择 $k_3$ 使式(27)成立. 但式(27)中存在变量 $x$ ,使得基于该式选择 $k_3$ 变得非常困难. 若能求得式(27)中

$$u_{\max} \frac{1 - x_0^{l_2-1} x^{1-l_2}}{x_0^{l_2} (x_0^{l_3-l_2} - x^{l_3-l_2})}$$

在 $\forall x \in (0, 1) \cup (1, x_0)$ 区间内的一个下限,则选择 $k_3$ 小于该下限自然满足式(27). 考虑到 $u_{\max}$ 是一个常数,令

$$f(x) = \frac{1 - x_0^{l_2-1} x^{1-l_2}}{x_0^{l_2} (x_0^{l_3-l_2} - x^{l_3-l_2})},$$

则 $f(0) = 1/x_0^{l_3}$ . 根据洛必达法则,有

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x_0^{l_2-1} (1-l_2) x^{-l_2}}{-x_0^{l_2} (l_3-l_2) x^{l_3-l_2-1}} =$$

$$\frac{1-l_2}{(l_3-l_2)x_0^{l_3}}, \quad (28)$$

同时有 $f(x_0) < f(0)$ . 进一步,求 $f(x)$ 的导数,有

$$f'(x) = \frac{-x_0^{l_2-1} (1-l_2) x^{-l_2} (x_0^{l_3} - x_0^{l_2} x^{l_3-l_2})}{(x_0^{l_3} - x_0^{l_2} x^{l_3-l_2})^2}$$



$$\frac{(1 - x_0^{l_2-1}x^{1-l_2})(-x_0^{l_2}(l_3 - l_2)x^{l_3-l_2-1})}{(x_0^{l_3} - x_0^{l_2}x^{l_3-l_2})^2} \tag{29}$$

式(29)中因为 $x^{l_3-l_2} < x_0^{l_3-l_2}$ ,所以分母必为正. 分子整理后为

$$x_0^{l_2}x^{-l_2}[-x_0^{l_3-1}(1 - l_2) + (l_3 - l_2)x^{l_3-1} + x_0^{l_2-1}x^{l_3-l_2}(1 - l_3)],$$

其中 $x_0^{l_2}x^{-l_2} > 0$ . 令

$$g(x) = -x_0^{l_3-1}(1 - l_2) + (l_3 - l_2)x^{l_3-1} + x_0^{l_2-1}x^{l_3-l_2}(1 - l_3),$$

有

$$g(0) = -x_0^{l_3-1}(1 - l_2) < 0, \\ g(x_0) = -x_0^{l_3-1}(1 - l_2 - l_3 + l_2 - 1 + l_3) = 0.$$

又

$$\dot{g}(x) = (l_3 - l_2)(l_3 - 1)x^{l_3-2} + x_0^{l_2-1}(1 - l_3)(l_3 - l_2)x^{l_3-l_2-1} = (l_3 - l_2)(l_3 - 1)x^{l_3-l_2-1}(x^{l_2-1} - x_0^{l_2-1}), \tag{30}$$

其中 $\frac{1}{x^{1-l_2}} - \frac{1}{x_0^{1-l_2}} > 0$ 对于任意 $x \in (0, x_0)$ 成立,所以 $\dot{g}(x) > 0, \forall x \in (0, x_0)$ . 进而有 $g(x) < 0, \forall x \in (0, x_0)$ ,也即 $\dot{f}(x) < 0, \forall x \in (0, x_0)$ 成立,所以 $f(x)$ 单调减小. 再由式(28)知其最小值为 $f_{\min}(x) = f(x_0) = \frac{(1 - l_2)}{(l_3 - l_2)x_0^{l_3}}$ ,所以若 $k_3$ 满足

$$k_3 < u_{\max} \frac{1 - l_2}{(l_3 - l_2)x_0^{l_3}}, \tag{31}$$

则 $k_3$ 必满足式(27). 式(31)右边是一常数,较式(27)更便于 $k_3$ 的选择.

考虑到在情形1)和情形2)下均能使 $\Theta(x) > 0$ 成立,参数的选择应同时满足这两种情形下的约束(26)和(31). 下面证明参数若满足式(31),则必满足式(26). 令

$$f(x_0) = u_{\max} \frac{x_0^{1-l_2} - 1}{x_0^{1+l_3-l_2} - x_0} - u_{\max} \frac{1 - l_2}{(l_3 - l_2)x_0^{l_3}} = u_{\max} \frac{x_0^{l_3-1}(x_0^{1-l_2} - 1)(l_3 - l_2)}{x_0^{l_3}(x_0^{l_3-l_2} - 1)(l_3 - l_2)} - u_{\max} \frac{(1 - l_2)(x_0^{l_3-l_2} - 1)}{x_0^{l_3}(x_0^{l_3-l_2} - 1)(l_3 - l_2)}.$$

上式分母必为正数,因此只考虑分子. 令

$$g(x_0) = x_0^{l_3-1}(x_0^{1-l_2} - 1)(l_3 - l_2) - (1 - l_2)(x_0^{l_3-l_2} - 1) = x_0^{l_3-l_2}(l_3 - 1) - x_0^{l_3-1}(l_3 - l_2) + 1 - l_2.$$

将 $x_0 = 1$ 代入上式有 $g(1) = 0$ . 再求上式关于 $x_0$ 的偏导,得

$$\frac{\partial g(x_0)}{\partial x_0} = (l_3 - 1)(l_3 - l_2)x_0^{l_3-l_2-1} - (l_3 - l_2)(l_3 - 1)x_0^{l_3-2} = (l_3 - 1)(l_3 - l_2)x_0^{l_3-2}(x_0^{1-l_2} - 1) > 0.$$

所以 $g(x_0) > 0$ 对于任意 $x_0 > 1$ 成立, $f(x_0) > 0$ 对于任意 $x_0 > 1$ 也成立,即必有

$$u_{\max} \frac{x_0^{1-l_2} - 1}{x_0^{1+l_3-l_2} - x_0} > u_{\max} \frac{1 - l_2}{(l_3 - l_2)x_0^{l_3}}.$$

因此, $k_3$ 满足式(31)必满足式(26). 综上考虑,情况6新增约束条件为式(31).

至此,证明了在约束条件(3)~式(8)下,对于任意的给定初值总可以选择参数使得 $\Theta(x) > 0, \forall x \in (0, x_0)$ 成立. 将上述所有情况下的约束条件归纳总结于表1中.

表1 控制输入受限情况下FTSC优于NFTSC所需的充分条件

情况	参数	条件1	条件2	条件3	条件4
1	$x_0 = 1, l_3 = 1$				—
2	$x_0 = 1, l_3 > 1$				$k_2 \geq u_{\max} \frac{l_3 - 1}{l_3 - l_2}$
3	$0 < x_0 < 1, l_3 = 1$	$\begin{cases} k_1 x_0 = \\ k_2 x_0^{l_2} + k_3 x_0^{l_3} = \\ u_{\max} > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k_2 > 0 \\ k_3 \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 < l_2 < 1 \\ l_3 \geq 1 \end{cases}$	—
4	$0 < x_0 < 1, l_3 > 1$				$k_3 < u_{\max} \frac{l_2(1 - l_2)}{x_0^{l_2} l_3(l_3 - 1) + x_0^{l_3} l_2(1 - l_2)}$
5	$x_0 > 1, l_3 = 1$				—
6	$x_0 > 1, l_3 > 1$				$k_3 < u_{\max} \frac{1 - l_2}{(l_3 - l_2)x_0^{l_3}}$

表1中条件1~条件3是6种情况下均应满足的约束.

以上证明分析的结果总结在如下定理中.

**定理2** 输入受限的被控系统(2),若设计参数的选取满足表1中的约束条件,则在整个状态空间内任

意一点,FTSC控制器作用下的系统状态收敛速度均快于NFTSC控制器作用下的系统状态收敛速度.

**注5** 由于式(3)自然包含式(5),也证明了式(6)必然导致式(4)满足,而式(3)和(6)联立可得式(7),所以约束条件(4)、(5)、(7)无须在表1中给出.

**注6** 虽然表1只给出了 $k_2$ (或 $k_3$ )的约束条件,但在此基础上再考虑约束1,即可得出另外一个参数 $k_3$ (或 $k_2$ )的约束条件.例如情况2中有 $k_2 \geq u_{\max} \frac{l_3 - 1}{l_3 - l_2}$ 约束,代入 $k_2 = u_{\max} - k_3$ 便可得到关于 $k_3$ 的约束为 $k_3 \leq u_{\max} \frac{1 - l_2}{l_3 - l_2}$ .

**注7** 由于参数选择的限制及证明中存在不等式缩放,以上结论为充分而非必要的结论.这意味着若某些参数即使不满足表1中的约束,也可能使FTSC控制性能比NFTSC控制性能更优.采用缩放程度更小(更精准)的不等式证明上述结论将有助于放松参数选择的约束.

### 3 准全控制利用率控制器设计

在第2节中,并未解决参数满足受限条件的约束下,怎样选取才能使得FTSC的控制性能更优甚至最优.为解决这个问题,本节首先讨论收敛时间这一性能指标对评价FTSC和NFTSC的不足,然后给出控制器利用率的定义,再证明该性能指标正比于FTSC的控制性能,进而证明输入受限下FTSC优于快速FTSC.

由微积分及动力学知识可知控制器 $u_1$ 作用下,系统状态从初始出发点到原点的收敛时间为

$$t_1 = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{-k_2 x^{l_2} - k_3 x^{l_3}} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{|u_1(x)|}. \quad (32)$$

虽然 $t_1$ 一般难以获得积分的解析表达式,但对于任意给定参数,总可以通过数学软件获取高精度的数值解<sup>[21]</sup>,并且可以证明为一有限值<sup>[10]</sup>.

控制器 $u_2$ 作用下,系统状态从初始出发点到原点的收敛时间为

$$t_2 = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{-k_1 x} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{|u_2(x)|} = \frac{1}{k_1} (\ln x_0 - \ln 0) = +\infty. \quad (33)$$

当满足表1中约束时,由 $\Theta(x) > 0$ 可知 $|u_1(x)| > |u_2(x)|, \forall x \in (0, x_0)$ .再由式(32)和(33)可知 $t_1 < t_2$ .若设收敛时间比为 $\bar{r} = t_1/t_2$ ,则必有 $\bar{r} = 0$ .所以,收敛时间这一性能指标在分析中存在局限性.本文采用控制利用率这一新的性能指标,其定义如下.

**定义1** 系统状态从初始值 $x_0$ 收敛到原点的整个过程中,某一控制器 $u$ 对应的积分定义为 $P = \int_0^{x_0} |u(x)| dx$ ,而最大输入量 $u_{\max}$ 对应的积分定义为 $P_{\max} = u_{\max} x_0$ ,则比值 $r = P/P_{\max}$ 被称为控制利用率.若 $r = 1$ ,则称为全控制利用率控制器;若 $r$ 小于1但接近于1,则称为准全控制利用率控制器.

由式(32)和(33)给出的收敛时间和定义1可知,控制利用率 $r$ 反比于收敛时间.且容易证明对于任意

的 $u_{\max} > 0$ 和 $x_0 > 0$ ,必有 $u_2$ 对应的NFTSC控制利用率恒为

$$r_2 = \frac{P_2}{P_{\max}} = \frac{\int_0^{x_0} k_1 x dx}{\int_0^{x_0} u_{\max} dx} = k_1 \frac{x_0^2}{2u_{\max} x_0} = \frac{u_{\max}}{x_0} \frac{x_0^2}{2u_{\max} x_0} \equiv 50\%.$$

在图4中:这一控制利用率代表 $u_2$ 曲线和横轴所围面积必占虚线正方形总面积的一半;而 $u_1$ 所占面积比更大一些,代表FTSC; $u_3$ 所占面积比接近于1,代表准全控制利用率控制器.

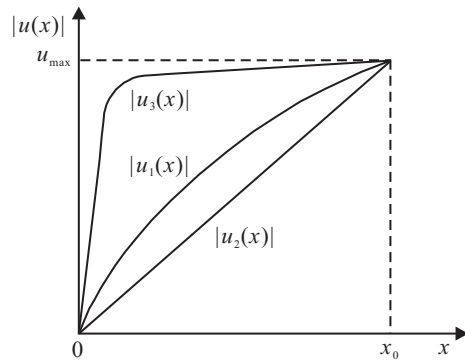


图4 控制利用率曲线

$r_2$ 说明在输出状态 $x_0$ 和最大控制量 $u_{\max}$ 给定的受限情况下,不可能通过改变 $k_1$ 值的方法提高 $r_2$ .这与控制输入不受限的情况是不同的.

根据第2节中的结论 $\Theta(x) > 0, \forall x \in (0, x_0)$ ,必然有

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\int_0^{x_0} (k_2 x^{l_2} + k_3 x^{l_3}) dx}{\int_0^{x_0} k_1 x dx} > 1. \quad (34)$$

即对于满足表1中约束的任意参数,FTSC的控制利用率高于NFTSC的控制利用率.

**例3** 1) 设 $u_{\max} = 10, x_0 = 1$ ,根据表1中条件1~条件3选取参数为 $l_2 = 1/2, l_3 = 3/2, k_2 = 8, k_3 = 2$ .检验表1中条件4,即

$$k_2 = 8 > 10 \times \frac{1.5 - 1}{1.5 - 0.5} = 5,$$

满足所有约束.按照上文定义有 $P_{\max} = 10, u_1$ 对应的

$$P_1 = \int_0^1 (8x^{0.5} + 2x^{1.5}) dx = 6.1333,$$

$r_1 = 61.33\%$ ,因此, $r_1$ 比 $r_2$ 提高了11.33%.

2) 初始条件和 $l_2, k_2, k_3$ 取值不变,而

$$l_3 = 3 \quad k_2 = 8 \geq 10 \times \frac{3 - 1}{3 - 0.5} = 8,$$

满足表1中所有约束,并得

$$P_1 = \int_0^1 (8x^{0.5} + 2x^3) dx = 5.8333,$$

$r_1 = 58.33\%$ .该方案下,尽管 $r_1$ 比 $r_2$ 提高了8.33%,

但比方案1)中提高值要低.这是因为在(0,1)段, $u_1$ 中 $x^{l_3}$ 项的控制能力弱于 $x^{l_2}$ 项的控制能力,且 $l_3$ 越大其控制能力越弱.同理,若 $l_2$ 、 $l_3$ 不变,而增大 $k_3$ 减小 $k_2$ ,也会使得 $r_1$ 下降.

上例既证实了式(34)的结论,同时又说明在定理2的基础上需要继续探究如下定量问题:在满足表1约束的情况下,如何选择参数使 $r_1$ 更大甚至最大.考虑下式:

$$r_1 = \frac{P_1}{P_{\max}} = \frac{\int_0^{x_0} (k_2 x^{l_2} + k_3 x^{l_3}) dx}{\int_0^{x_0} u_{\max} dx} = \frac{\int_0^{x_0} \left( k_2 x^{l_2} + \frac{u_{\max} - k_2 x_0^{l_2}}{x_0^{l_3}} x^{l_3} \right) dx}{\int_0^{x_0} u_{\max} dx} = \frac{\frac{k_2 x_0^{l_2+1}}{l_2+1} + \frac{u_{\max} - k_2 x_0^{l_2}}{x_0^{l_3}} \frac{x_0^{l_3+1}}{l_3+1}}{u_{\max} x_0} = \frac{k_2 x_0^{l_2} (l_3 - l_2) + u_{\max} (l_2 + 1)}{u_{\max} (l_2 + 1) (l_3 + 1)}. \quad (35)$$

其中: $x_0$ 、 $u_{\max}$ 是客观给定的, $l_2$ 、 $l_3$ 、 $k_2$ 是可以选择的参数.分类讨论后可以得到如下结论.

**定理3** 在输入受限条件下:1)无抖振FTSC的 $u_1$ 的控制利用率 $r_1$ 必小于1;2) $r_1$ 的上界为 $1/(l_2+1)$ ;3)全控制利用率控制器必有抖振;4)FTSC的控制利用率必高于任意快速FTSC的控制利用率.

**证明** 1)式(35)中 $k_2 x_0^{l_2} \leq u_{\max}$ , $l_3 - l_2 < l_3$ ,所以有

$$r_1 < \frac{u_{\max} l_3 + u_{\max} (l_2 + 1)}{u_{\max} (l_2 + 1) (l_3 + 1)} < \frac{u_{\max} l_3 (l_2 + 1) + u_{\max} (l_2 + 1)}{u_{\max} (l_2 + 1) (l_3 + 1)} = 1.$$

因此,不论初值怎么给定,参数如何选择,都有 $r_1$ 小于1.

2)式(35)也可记为

$$r_1 = k_2 \frac{x_0^{l_2} (l_3 + 1) - x_0^{l_2} (l_2 + 1)}{u_{\max} (l_2 + 1) (l_3 + 1)} + \frac{1}{l_3 + 1}.$$

对于固定的 $x_0$ 、 $l_2$ 、 $l_3$ 、 $u_{\max}$ ,上式中的变量仅为 $k_2$ ,且 $k_2$ 越大, $r_1$ 越大.因为 $k_3 = (u_{\max} - k_2 x_0^{l_2})/x_0^{l_3}$ ,所以 $k_3$ 越小, $r_1$ 越大.在表1的约束下,当 $k_3 = 0$ 时, $k_2$ 可取最大值为 $u_{\max}/x_0^{l_2}$ .代入 $r_1$ 有

$$r_1 = \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}} \frac{x_0^{l_2} (l_3 + 1) - x_0^{l_2} (l_2 + 1)}{u_{\max} (l_2 + 1) (l_3 + 1)} + \frac{1}{l_3 + 1} = \frac{l_3 - l_2}{(l_2 + 1) (l_3 + 1)} + \frac{1}{l_3 + 1} = \frac{1}{l_2 + 1}.$$

在该式基础上可知, $l_2$ 越小, $r_1$ 越大.若 $l_2 = 0^+$ ,则 $r_1 = 1$ ,控制器成为全控制利用率控制器.

3)全控制利用率FTSC控制器为

$$u_1(x) = \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}} x^{0+} = \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}} |x^{0+}| \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}}, & x > 0; \\ -\frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}}, & x < 0. \end{cases} \quad (36)$$

该控制器将会产生严重抖振,进而使系统状态也产生抖振.这在滑模变结构控制中体现得尤为明显,也讨论得非常充分<sup>[2,9-10,19]</sup>.但注意到只要 $l_2$ 为一正数,则 $\frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}} x^{l_2} = \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}} |x|^{l_2} \operatorname{sgn}(x)$ 是连续的,即可避免抖振.因此,可以选择一足够小的 $l_2$ 以充分提高 $r_1$ ,成为准全控制利用率FTSC.

4)令 $u_{11}(x) = -k_{21} x^{l_2}$ , $k_{21} x_0^{l_2} = u_{\max}$ , $u_{12}(x) = -k_{22} x^{l_2} - k_3 x^{l_3}$ , $k_3 > 0$ , $k_{22} x_0^{l_2} + k_3 x_0^{l_3} = u_{\max}$ .取比较函数为

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(x) &= |u_{11}(x)| - |u_{12}(x)| = \\ &= k_{21} x^{l_2} - k_{22} x^{l_2} - k_3 x^{l_3} = \\ &= \frac{u_{\max}}{x_0^{l_2}} x^{l_2} - \frac{u_{\max} - k_3 x_0^{l_3}}{x_0^{l_2}} x^{l_2} - k_3 x^{l_3} = \\ &= k_3 \frac{x_0^{l_3} x^{l_2} - x_0^{l_2} x^{l_3}}{x_0^{l_2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

根据引理2,若 $x_0 = 1$ ,则

$$x < 1, \bar{\Theta}(x) = k_3 (x^{l_2} - x^{l_3}) > 0;$$

若 $x_0 < 1$ ,则

$$x < 1, x_0^{l_2} > x_0^{l_3}, \bar{\Theta}(x) = k_3 \frac{x^{l_2} - x_0^{l_2-l_3} x^{l_3}}{x_0^{l_2-l_3}},$$

其中 $x_0^{l_2-l_3} < x^{l_2-l_3}$ ,所以

$$\bar{\Theta}(x) > k_3 \frac{x^{l_2} - x^{l_2-l_3} x^{l_3}}{x_0^{l_2-l_3}} = 0;$$

若 $x_0 > 1$ ,则,

$$x_0^{l_3} > x_0^{l_2}, \bar{\Theta}(x) = k_3 (x_0^{l_3-l_2} x^{l_2} - x^{l_3}),$$

其中 $x_0^{l_3-l_2} > x^{l_3-l_2}$ ,所以

$$\bar{\Theta}(x) > k_3 (x^{l_3-l_2} x^{l_2} - x^{l_3}) = 0.$$

综上,任意初始条件下均有 $|u_{11}(x)| > |u_{12}(x)|$ , $\forall x \in (0, x_0)$ .再考虑定义1中关于 $r$ 的定义即可得到结论.□

**注8** 现有一些文献中将 $l_2$ 定义为 $l_2 \triangleq q/p \in (1/2, 1)$ , $q < p$ 且 $q$ 、 $p$ 均为互质正奇数.这存在一些问题.首先,有限时间稳定Lyapunov定理中关于 $l_2$ 定义在(0,1)区间而非(1/2,1)区间,也并不要求 $l_2$ 一定为两个正奇数的比<sup>[10]</sup>.其次,可以发现许多文献中FTSC设计存在明显 $l_2 \notin (1/2, 1)$ 的情况,但同样可以保证有限时间收敛或稳定.如Levant等<sup>[22]</sup>在

HOSMD或高阶滑模控制器中最后一层滑模面的指数设计为1/2. 再次, 要避免复数, 采用 $|x|^{l_2} \text{sgn}(x)$ 的形式即可. 最后, 由定理3可知,  $l_2$ 被限制得过大是对FTSC控制能力的严重闲置. 例如, 在 $x = 10^{-4}$ 处: 若 $l_2 = 1/2$ ,  $u_1 = -x^{1/2}$ , 则该点处状态收敛速度大小为 $10^{-2}$ ; 若 $l_2 = 1/4$ ,  $u_1 = -x^{1/4}$ , 则该点处状态收敛速度大小为 $10^{-1}$ . 两者对比, 后者的收敛速度提高了10倍.

**注9** 若不考虑输入受限的初始约束条件 $u_{\max} = k_2 x_0^{l_2} + k_3 x_0^{l_3} = k_1 x_0$ , 则可以选择参数 $l_2$ 、 $l_3$ 使得 $k_2 x_0^{l_2} + k_3 x_0^{l_3} > k_2 x_0^{l_2}, \forall k_3 > 0$ . 所以 $k_1 = k_2 = k_3$ 时, 有快速项 $k_3 x_0^{l_3}$ 的FFTSC优于无快速项的FTSC<sup>[3,10,19]</sup>. 但考虑输入受限的初始约束条件下, 定理3表明无快速项的FTSC更优. 这一结论是对现有成果的补充, 可以避免错误使用FFTSC反而造成控制性能下降.

### 4 仿真研究

**仿真1** 考虑6种FTSC控制器, 其中example 1~example 3为FFTSC, example 4~example 6为非快速FTSC. 设初始条件为 $u_{\max} = 10, x_0 = 4, l_3 = 2$ , 根据表1约束选择参数并计算 $r_1$ 和 $t_1$ , 如表2所示. 其中: example 1和example 4的 $l_2 = 0.9$ ; example 2和example 5的 $l_2 = 0.5$ ; example 3和example 6的 $l_2 = 0.01$ . 6个控制器作用下系统的状态曲线如图5所示; 控制量如图6所示, 其中矩形框面积表示 $P_{\max}$ , 控制器曲线和横轴所围面积表示 $P_1$ . 矩形框面积不变, 所以所围面积越大, 控制器利用率 $r_1$ 越大.

分析表2、图5和图6可知:

表2 不同参数下的 $r_1$ 和 $t_1$

	$k_2$	$k_3$	$l_2$	$r_1$	$t_1 / s$
example 1	2.6112	0.0567	0.9000	0.5088	4.3149
example 2	3.3336	0.2083	0.5000	0.5556	1.0819
example 3	4.9580	0.3108	0.0100	0.6635	0.6330
example 4	2.8717	0.0000	0.9000	0.5263	3.9592
example 5	5.0000	0.0000	0.5000	0.6667	0.8000
example 6	9.8623	0.0000	0.0100	0.9901	0.4041

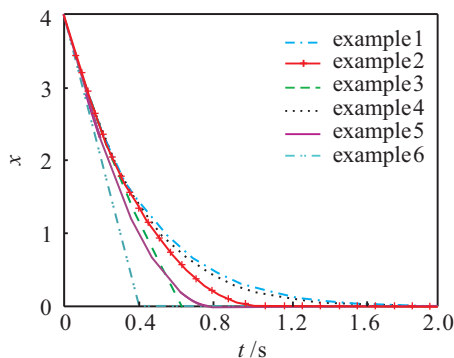


图5 example 1~example 6状态轨迹

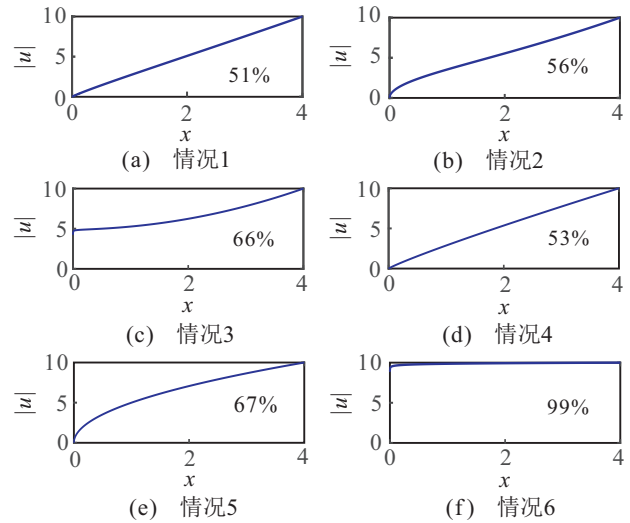


图6 example 1~example 6控制曲线

1) 根据表1所得的控制器参数, 使得6种FTSC输出总是小于最大允许值 $u_{\max}$ , 表明了表1中所得约束条件的正确性.

2) 图5中实际状态收敛时间与表2中根据式(32)理论计算所得的收敛时间完全一致, 表明了该计算式正确.

3) FTSC的收敛时间总是小于NFTSC无穷大的收敛时间; FTSC的控制利用率 $r_1$ 总是高于NFTSC的50%控制利用率.

4) 将情况1~情况3视为第1个对照组, 情况4~情况6视为第2个对照组, 随着 $l_2$ 的减小, 这两个对照组中控制利用率 $r_1$ 均上升, 收敛时间 $t_1$ 均下降. 例如: 情况3相对于情况1,  $r_1$ 提升了30.40%,  $t_1$ 减小了85.33%; 情况6相对于情况4,  $r_1$ 提升了88.12%,  $t_1$ 减小了89.79%.

5) 将情况1和情况4视为第1个对照组; 情况2和情况5视为第2个对照组; 情况3和情况6视为第3个对照组. 每组中的两个 $l_2$ 、 $l_3$ 的取值都相同, 但每组中后者的 $k_3$ 小于前者的 $k_3$ . 这3组均表明, 较小的 $k_3$ 对应着较大的控制利用率 $r_1$ 和较小的收敛时间 $t_1$ . 例如: 情况4相对于情况1,  $r_1$ 提升了3.44%,  $t_1$ 减小了8.24%; 情况5相对于情况2,  $r_1$ 提升了20.00%,  $t_1$ 减小了26.06%; 情况6相对于情况3,  $r_1$ 提升了49.22%,  $t_1$ 减小了36.16%.

6) example 6中,  $l_2 = 0.01$ , 在该准全控制利用率控制器作用下,  $r_1 = 99.01\%$ , 接近于100%, 而 $t_1 = 0.4041s$ , 也接近于理论下限 $t_1 = x_0/u_{\max} = 4/10 = 0.4s$ . 同时, 控制器无抖振.

7) 对比情况6和情况3可知, 虽然两种情况下 $l_2 = 0.01$ 都为充分小的数, 但因为情况3中的 $k_3 \neq 0$ , 所以情况3中的 $r_1$ 远小于1. 这说明准全控制利用率

FTSC 必须是传统的仅含终端吸引子项的控制器,如  $u = -x^{0.01}$ ; 而不可以是含快速项的控制器,如  $u = -x - x^{0.01}$ .

8) 从图6(a)~图6(c)看,若控制器含有快速项,则在状态靠近  $x_0$  附近,控制器曲线为一凹函数,随着  $x$  减小迅速下降;从图6(d)~图6(f)看,没有快速项的控制器在整个状态区间均为一凸函数,所以下降较慢,从而始终保持较大的控制量,提高了控制利用率。

**仿真2** 验证本文结论对 FTSC 的改进作用. 文献[23]作为 AOPIC 核心论文之一,在仿真中为二阶积分系统  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u$  设计了具有非奇异、有限时间稳定、无抖振等优点的 AOPIC 控制器:  $u = -1.5 \times (x_2^{5/3} + 0.15x_1)^{1/5}$ . 初始状态为  $x_1(0) = 5, x_2(0) = -3$ . 定义  $s \triangleq x_2^{5/3} + 0.15x_1$ , 于是  $u = -1.5s^{1/5}$  (实际上  $s$  也可视为二阶系统的非奇异 TSMC 滑模面<sup>[18]</sup>). 可以假设控制器最大输出为  $u_{\max} = -1.5 \times (-5.4903)^{1/5} = 2.1087$ . 根据本文提出的结论设计改进的 AOPIC 控制器为  $u = -2.1087(x_2^{8/3} + 3.9449x_1)^{1/100}$ . 所得控制器、滑模面和系统状态的曲线如图7所示.

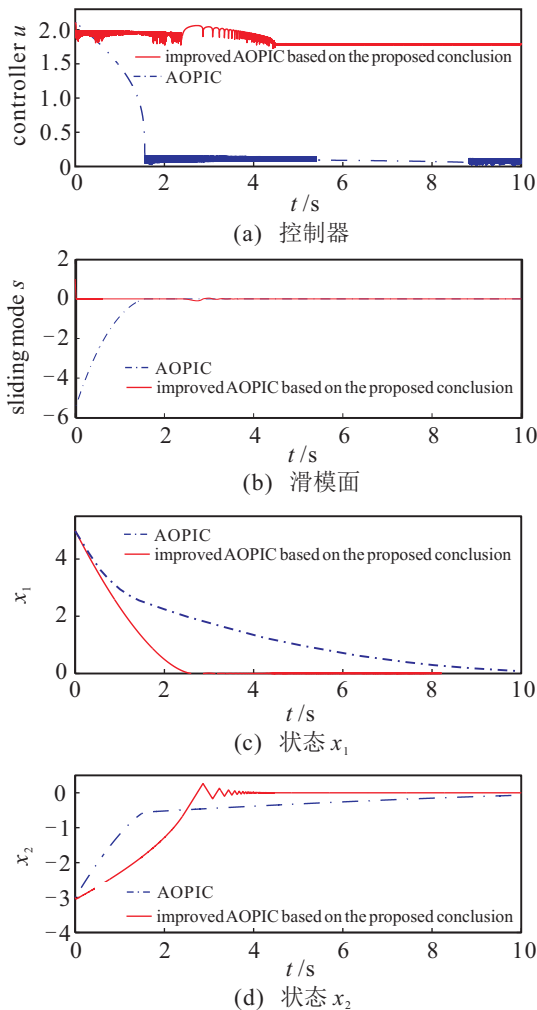


图7 AOPIC 与改进 AOPIC 的控制器、滑模面及状态曲线

图7(a)表明:随着时间增加,传统的 AOPIC 控制器输出迅速下降,造成控制器部分控制能力的闲置;而基于本文提出的改进 AOPIC 控制器(准全控制利用率 AOPIC)几乎不下降,控制量始终接近  $u_{\max}$ . 在这两种控制器差异的影响下,图7(b)~图7(d)清晰地显示了控制性能的差异:图7(b)中改进 AOPIC 的滑模面  $s$  收敛于 0 的时间远小于原 AOPIC 滑模面收敛于 0 的时间;图7(c)和图7(d)中的状态轨迹也具有类似的改进和趋势。

上述两个仿真均表明,在控制输入受限的条件下,按照本文的结论,改进的 FTSC 控制器均可以最大程度地发挥控制器的性能,以求得最小的收敛时间和最快的收敛速度,同时保持了 FTSC 有限时间收敛、无抖振、非奇异等一系列的优点. 另一方面,通过这两个例子可以看出,本文的结论广泛适用于 FTSC 控制的各个分支,具有普适性。

## 5 结论

本文提出输入受限的准全控制利用率 FTSC 控制器具有以下意义: 1) 每一点的控制输入均不大于允许最大值  $u_{\max}$ , 符合工程实际的限制; 2) 尽可能在状态轨迹的每一点上使控制量接近  $u_{\max}$ , 以获取可能的最优性能; 3) 控制器仍然是有限时间收敛的, 同时控制器在原点又是连续的, 因此不存在抖振; 4) 无需增加或融合在线调整参数、自适应率等额外复杂控制方法, 准全控制利用率 FTSC 本身即具有自适应调节控制量大小的能力; 5) 所得结论广泛适用于目前已知的大部分 FTSC 控制方法; 6) 从理论上严格证明了输出受限时 FTSC 优于 NFTSC, 并给出了充分性的约束条件, 且所得条件易于参数的选择, 简单易行; 7) 证明了准全控制利用率 FTSC 只含终端吸引子项  $x^{l_2}$  而不含快速项  $x^{l_3}$ , 即 FTSC 优于快速 FTSC, 这是对“快速 FTSC 优于 FTSC”这一结论在输入受限条件下的一个重要补充。

## 参考文献(References)

- [1] Zhai J Y, Ai W Q, Fei S M. Global output feedback stabilisation for a class of uncertain nonlinear systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(2): 305-313.
- [2] Li S H, Wu C S, Sun Z X. Design and implementation of clutch control for automotive transmission using terminal sliding mode control and uncertain observer[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2016, 65(4): 1890-1898.
- [3] Xu S D, Chen C C, Wu Z L. Study of nonsingular fast terminal sliding mode fault-tolerant control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(6):

- 3906-3913.
- [4] 赵明元, 魏明英, 何秋茹. 基于有限时间稳定和backstepping的直接力/气动力复合控制方法[J]. 宇航学报, 2010, 31(9): 2157-2164.  
(Zhao M Y, Wei M Y, He Q R. Research on method of lateral jet and aerodynamic fins compound control based on finite time stability and backstepping approach[J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(9): 2157-2164.)
- [5] Xie X J, Zhang X H, Zhang K M. Finite time state feedback stabilisation of stochastic high-order nonlinear feedforward systems[J]. International Journal of Control, 2016, 89(7): 1332-1341.
- [6] Tian B L, Yin L P, Wang H. Finite time reentry attitude control based on adaptive multivariable disturbance compensation[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(9): 5889-5898.
- [7] Zhang R M, Wang L, Zhou Y J. On-line RNN compensated second order nonsingular terminal sliding mode control for hypersonic vehicle[J]. International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics, 2012, 5(2): 186-205.
- [8] Lu P L, Gan C, Liu X D. Finite time distributed cooperative attitude control for multiple spacecraft with actuator saturation[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(18): 2186-2198.
- [9] Li S H, Zhou M M, Yu X H. Design and implementation of terminal sliding mode control method for PWSM speed regulation system[J]. IEEE Transactions on Industrial Information, 2012, 9(4): 1879-1891.
- [10] 蒲明. 近空间飞行器鲁棒自适应滑模控制[D]. 南京: 南京航空航天大学自动化学院, 2012.  
(Pu M. Robust adaptive sliding mode control for near space vehicle[D]. Nanjing: College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012.)
- [11] Barbot J P, Boutat D, Busawon K. Utility of high-order sliding mode differentiators for dynamical left inversion problems[J]. IET Control Theory and Applications, 2015, 9(4): 538-544.
- [12] Chen S Y, Lin F J. Robust nonsingular terminal sliding mode control for nonlinear magnetic bearing system[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(3): 636-643.
- [13] Tao C W, Taur J S, Chan M L. Adaptive fuzzy terminal sliding mode controller for linear systems with mismatched time-varying uncertainties[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2004, 34(1): 255-262.
- [14] 张健. 不确定非线性系统全局自适应收敛控制设计[D]. 济南: 山东大学控制科学与工程学院, 2012.  
(Zhang J. Global adaptive stability control design for several classes of uncertain nonlinear systems[D]. Jinan: School of Control Science and Engineering, Shandong University, 2012.)
- [15] Sun Z Y, Zhang X H, Xie X J. Global continuous output-feedback stabilization for a class of high-order nonlinear systems with multiple time delays[J]. Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 2014, 35(18): 4334-4356.
- [16] Xiao F, Wang L, Chen T. Finite time consensus in networks of integrator-like dynamic agents with directional link failure[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 756-762.
- [17] Zhao Y, Duan Z S, Wen G H. Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with saturated control protocols[J]. IET Control Theory and Applications, 2015, 9(3): 312-319.
- [18] He X Y, Wang Q Y, Yu W W. Finite-time containment control for second-order multi agent systems under directed topology[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2014, 61(8): 619-623.
- [19] 蒲明, 吴庆宪, 姜长生, 等. 新型快速Terminal滑模及其在近空间飞行器上的应用[J]. 航空学报, 2011, 32(7): 1283-1291.  
(Pu M, Wu Q X, Jiang C S, et al. Novel fast terminal sliding mode and its application to near space vehicle[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(7): 1283-1291.)
- [20] 王连祥, 方德植, 张鸣镛, 等. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 21-22.  
(Wang L X, Fang D Z, Zhang M Y, et al. Mathematics manual[M]. Beijing: Higher Education Press, 2011: 21-22.)
- [21] 薛定宇, 陈阳泉. 控制数学问题的Matlab求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 157-174.  
(Xue D Y, Chen Y Q. Matlab solutions to mathematical problems in control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 157-174.)
- [22] Levant A, Li S H, Yu X H. Accuracy of some popular non-homogeneous 2-sliding modes[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(10): 2615-2619.
- [23] Huang X Q, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems[J]. Automatica, 2005, 41(5): 881-888.

### 作者简介

蒲明(1981—), 男, 讲师, 博士, 从事有限时间控制及其应用等研究, E-mail: msznuaa@163.com;

袁建英(1982—), 女, 讲师, 博士, 从事智能控制的研究, E-mail: 393556743@qq.com.

(责任编辑: 孙艺红)