控制与决策
Control and Decision

基于个人超出值的区间值合作博弈新的求解模型

南江霞，李梦祺，张茂军

引用本文:
南江霞, 李梦祺, 张茂军. 基于个人超出值的区间值合作博弈新的求解模型[J]. 控制与决策, 2020, 35(7): 1681-1688.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1603

文章编号: 1001-0920(2020)07-1681-08
DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1603

基于个人超出值的区间值合作博弈新的求解模型

南江霞[1,2], 李梦祺[1,2], 张茂军[3†]

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院，广西 桂林 541004；2. 桂林电子科学大学 广西高校数据分析与计算重点实验室，广西 桂林 541004；3. 苏州科技大学 商学院，江苏 苏州 215009)

摘　要: 从个人超出值的视角研究特征函数为区间值的合作博弈和联盟为模糊集的无限模糊联盟区间值合作博弈. 首先,利用区间值距离公式定义个人超出值;然后,建立最小化所有局中人个人超出值的最优化模型,进一步得到两类区间值合作博弈的显式解析解,并证明该解的性质;最后,通过数值实例验证所提出区间值合作博弈求解模型的实用性与有效性,为区间值合作博弈提供一种新的求解思路.

关键词: 区间值合作博弈；区间值距离；个人超出值；联盟超出值

中图分类号: O225　　　**文献标志码:** A

New models of interval values cooperative games based on player excess

NAN Jiang-xia[1,2], *LI Meng-qi*[1,2], *ZHANG Mao-jun*[3†]

(1. School of Mathematics and Computing Science，Guilin University of Electronic Technology，Guilin 541004，China；2. Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation，Guilin University of Electronic Technology，Guilin 541004，China；3. School of Business，Suzhou University of Science and Technology，Suzhou 215009，China)

Abstract: Based on player excess, this paper studies the cooperative games in which the characteristic functions are expressed with interval values, and also the cooperative game with infinite number of fuzzy coalitions and interval values characteristic functions. In order to avoid the interval subtraction, player excesses are defined by the distance between interval values. Then, the sum of all player excesses is minimized and the solutions of two types of interval values cooperative games are obtained by constructing a mathematical programming model. Moreover, some useful properties of the solutions are discussed. Finally, a numerical example is given to illustrate the applicability and effectiveness of the proposed model which provides a new method for solving interval values cooperative games.

Keywords: interval values cooperative games；interval values distance；player excess；coalition excess

0 引　言

由于决策环境的不确定性和局中人能力的局限性等条件,合作博弈的特征函数通常是不确定的,区间值是表示这种不确定信息的有效工具. 为此,学者研究了特征函数为区间值的合作博弈,称为区间值合作博弈. 已有研究将经典合作博弈的解(如核心、Shapley 值)等概念拓展到区间值合作博弈. Alparslan 等[1] 利用区间向量研究了区间值合作博弈的核心; Branzei 等[2] 利用区间非占优核心、平方区间占优核心和区间占优核心组成的非占优核心集,扩展了区间值合作博弈的区间型核心解,给出了区间值合作博弈的平方区间占优核心凸性的充要条件; Han 等[3] 分析了区间值合作博弈的核心和拟 Shapley 值; Branzei 等[4] 针对凸区间值合作博弈,提出类似 Shapley 值的解; 洪防璇等[5] 构建了基于满意度的区间值多目标合作博弈求解模型,并给出二分法的求解步骤. 在区间值合作博弈的求解过程中,区间减法会导致区间端点值放大或者为负值,因此研究者们提出区间值的 H 差、广义 H 差[6]、扩展 H 差[7] 等定义. Meng 等[7] 基于区间值扩展 H 差研究了区间值合作博弈的 Shapley 值. 然而,已有的研究主要是运用区间值的运算法则和区间值排序函数等研究区间值合作博弈的各种解. 区间值的减法运算给区间值合作博弈的求解带来困难,为避免区间值的减法, Li 等[8] 研究了具有联盟规模类单调性的区间值合作博弈的区间最小二乘预核仁. 进一步,李登峰等[9] 利用

收稿日期: 2018-11-20；**修回日期:** 2019-02-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71231003, 71561008, 71461005, 71801060)；广西自然科学基金项目 (2014GXNSFAA118010, 2017GXNSFBA198182).

†通讯作者. E-mail: zhang1977108@sina.com.

区间值距离代替区间值减法运算,基于区间值的最小平方距离的思想,建立数学规划模型,得到区间值合作博弈的解. 联盟超出值是刻画一些合作博弈解的重要概念,如预核仁、核仁和核子等等. Ruiz等[10]借助于联盟超出值研究了经典合作博弈的最小二乘预核仁和最小二乘核仁. 为了考虑联盟基数对联盟超出值的影响, Wallmeier[11]提出f-超出值的概念并定义了f-核仁. 在联盟超出值的基础上, Hou等[12]定义了联盟的乐观抱怨值和悲观抱怨值,给出了合作博弈的最优妥协解,以及该解与ENSC值和CIS值的关系. 然而,联盟超出值只能反映联盟对分配值的不满意程度,无法体现局中人对分配值的不满意程度. 另外, Sakawa等[13]指出当模糊联盟的个数为无限多个时,无法用联盟超出值研究模糊联盟合作博弈的解. 为此, Sakawa等[13]定义了个人超出值,并基于此概念研究了经典合作博弈和模糊合作博弈预核仁和核仁的字典序求解模型,进一步给出了当所有局中人超出值相等时预核仁的显式解析解. Molina等[14]研究了基于个人超出值的模糊联盟合作博弈的解,并给出了当所有局中人个人超出值相等时,该类模糊合作博弈的显式解. Kong等[15]基于个人超出值的字典序解定义了模糊联盟合作博弈广义预核仁和最小二乘广义预核仁,同时给出有序个人超出值,无序个人超出值及相应的广义预核仁等的求解模型,进一步拓宽了对个人超出值的研究. 然而,当合作博弈的特征函数为区间值时,个人超出值涉及到区间减法运算,由于区间减法运算的局限性,使得求解区间值合作博弈比较困难. 目前,尚未见到用个人超出值研究区间值合作博弈的相关问题. 鉴于此,本文基于Sakawa等[13]提出的个人超出值的定义,并用文献[9]提出的区间值的最小平方距离,研究联盟清晰特征函数为区间值的合作博弈和无限模糊联盟的特征函数为区间值的合作博弈的解. 首先,建立两类区间值合作博弈的求解模型,得出这两类区间值合作博弈的显式解析解;然后,分析该解的性质;最后,通过数值实例说明本文提出的区间值合作博弈求解模型的合理性.

本文的学术贡献体现为: 1) 在研究问题上,研究基于个人超出值的清晰联盟区间值合作博弈和无限模糊联盟区间值合作博弈的解,考虑了各局中人对支付值的不满意度; 2) 在研究方法上,采用区间值的距离公式定义个人超出值,避免区间值减法给区间值合作博弈求解带来的困难. 本文的研究能够为区间值合作博弈的求解提供一种新的理论体系,具有一定的理论价值. 此外,针对实际问题中存在的不确定性的利益分配或成本分摊问题提供一个新的分配方案,具有一定的实际应用价值.

1 预备知识

记$\bar{a}=[a_L,a_R]=\{x|x\in R, a_L\leqslant x\leqslant_R\}$为区间值,其中$a_L\in R, a_R\in R$, R是实数集. $I(R)$记为所有有界闭区间的集合. 显然,若$a_L=a_R$,则区间值$\bar{a}=[a_L,a_R]$退化为一个实数,故区间值可视为实数的拓展. 区间值运算在区间值合作博弈的求解中具有重要地位.

定义1 [8] 设$\bar{a}=[a_L,a_R]$和$\bar{b}=[b_L,b_R]$为$I(R)$上的两个区间值,$\gamma\in R$为任意实数. 则:

1) $\bar{a}=\bar{b}$当且仅当$a_L=b_L$和$a_R=b_R$.

2) $\bar{a}+\bar{b}=[a_L+b_L,a_R+b_R]$.

3) $\bar{a}-\bar{b}=[a_L-b_R,a_R-b_L]$.

4) $\gamma\bar{a}=\begin{cases}[\gamma a_L,\gamma a_R],\ \gamma\geqslant 0;\\ [\gamma a_R,\gamma a_L],\ \gamma<0.\end{cases}$

定义2 [9] 设$\bar{a}=[a_L,a_R]$, $\bar{b}=[b_L,b_R]$和$\bar{c}=[c_L,c_R]$是$I(R)$上的任意3个区间值.若满足以下3个条件: 1) $D(\bar{a},\bar{b})\geqslant 0$; 2) $D(\bar{a},\bar{b})=D(\bar{b},\bar{a})$; 3) $D(\bar{a},\bar{b})\leqslant D(\bar{a},\bar{c})+D(\bar{c},\bar{b})$.则称$D(\bar{a},\bar{b})$为区间值$\bar{a}$和$\bar{b}$之间的距离.

文献[9]基于最小平方思想提出区间值距离如下:

$$D(\bar{a},\bar{b})=(a_L-b_L)^2+(a_R-b_R)^2. \tag{1}$$

2 清晰联盟区间值合作博弈个人超出值

记经典合作博弈为$\langle N,v\rangle$,其中$N=\{1,2,\ldots,n\}$为所有局中人的集合,函数$v:2^N\to R$,满足$v(\varnothing)=0$. 对于每个联盟$S\subseteq N$, $v(S)$表示联盟S的特征函数值,经典合作博弈v的集合记为G^N. n维向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$表示$n$个局中人参与大联盟后获得的支付值,称为支付向量.

定义3 [16] 对于一个经典合作博弈$v\in G^N$,若支付向量$\boldsymbol{x}$满足$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=v(N)$,则称$\boldsymbol{x}$为经典合作博弈的一个预分配.

在经典合作博弈中联盟超出值的大小反映了联盟S对支付向量$\boldsymbol{x}$的态度,联盟超出值越大,表示联盟对该支付向量越不满意,其定义如下.

定义4 [16] 经典合作博弈$v\in G^N$,联盟S关于支付向量$\boldsymbol{x}$的超出值定义为

$$e(S,\boldsymbol{x})=v(S)-\boldsymbol{x}(S),$$

其中$\boldsymbol{x}(S)=\displaystyle\sum_{i:i\in S}x_i$.

当合作博弈联盟为模糊联盟时,由于模糊联盟具有无限多个,无法表示模糊联盟的超出值,因此文献

[13]将局中人参加的所有联盟超出值求和定义为个人超出值.

定义5[13]　对于经典合作博弈$v \in G^N$, $e(S,\boldsymbol{x})$是关于支付向量$\boldsymbol{x}$的联盟超出值,称

$$w(i,\boldsymbol{x}) = \sum_{S:i\in S} e(S,\boldsymbol{x}) = \sum_{S:i\in S} v(S) - \boldsymbol{x}(S)$$

为局中人i关于支付向量$\boldsymbol{x}$的个人超出值.

二元组$\langle N,\bar{v}\rangle$是定义在局中人集合$N=\{1,2,\ldots,n\}$上的区间值合作博弈,其中联盟$S\subseteq N$的特征函数$\bar{v}(S)$为区间值,满足$\bar{v}: S\to I(R)$且$\bar{v}(\varnothing)=[0,0]$,记$\bar{v}(S)=[v_L(S),v_R(S)]$. 由于每个联盟特征函数是区间值,因此每个局中人的支付值也是区间值,用$\bar{x}_i=[x_{Li},x_{Ri}]$表示,联盟$S$中所有局中人的支付值之和$\bar{x}(S)=\sum\limits_{i:i\in S} x_i=[x_L(S),x_R(S)]$. 类似经典合作博弈中预分配的定义,若区间值支付向量$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}$满足$\bar{x}(N)=\bar{v}(N)$,则$\bar{x}$是区间值合作博弈的一个预分配. 当区间值合作博弈的联盟为清晰联盟时,即每个局中人完全参与合作,本文称此类合作博弈为清晰联盟区间值合作博弈,记清晰联盟区间值合作博弈$\bar{v}$的集合为$\bar{G}^N$. 为避免区间值减法给区间值合作博弈求解带来困难,根据式(1)定义的区间值距离,给出清晰联盟区间值合作博弈个人超出值的定义如下.

定义6　任意的清晰联盟区间值合作博弈$\bar{v}\in\bar{G}^N$,局中人i的个人超出值为

$$w(i,\bar{x}) = \sum_{S:i\in S}\Big[\Big(v_L(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Lj}\Big)^2+\Big(v_R(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Rj}\Big)^2\Big].$$

3　清晰联盟区间值合作博弈求解模型

合作博弈研究的主要问题是如何给联盟中的局中人一个公平、合理的分配方案,以保障联盟的稳定性. 本文从局中人对支付值是否满意的角度出发,以所有参与者的不满意程度之和最小为目标,为清晰联盟区间值合作博弈寻找公平合理的分配方案. 为使所有局中人的个人超出值之和最小,建立以下模型:

$$\min\ \sum_{i=1}^n w(i,\bar{x}).$$

由定义6,模型可转化为

$$\min\ \sum_{i=1}^n\sum_{S:i\in S}\Big[\Big(v_L(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Lj}\Big)^2+\Big(v_R(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Rj}\Big)^2\Big]. \tag{2}$$

由于$\bar{x}$需满足集体有效性即$\bar{x}(N)=\bar{v}(N)$,因此,以集体有效性为约束条件,构建如下最优化模型:

$$\begin{aligned}&\min\ \sum_{i=1}^n\sum_{S:i\in S}\Big[\Big(v_L(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Lj}\Big)^2+\Big(v_R(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Rj}\Big)^2\Big];\\ &\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n x_{Li}=v_L(N),\ \sum_{i=1}^n x_{Ri}=v_R(N).\end{aligned} \tag{3}$$

式(3)的最优解$\bar{x}_i=[x_{Li},x_{Ri}]\,(i=1,2,\ldots,n)$为清晰联盟区间值合作博弈的解,即为局中人满意的分配方案. 为求解式(3),构造如下拉格朗日函数:

$$\begin{aligned}&L(\bar{x},\lambda,\mu)=\\ &\sum_{i=1}^n\sum_{S:i\in S}\Big[\Big(v_L(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Lj}\Big)^2+\\ &\Big(v_R(S)-\sum_{j:j\in S}x_{Rj}\Big)^2\Big]+\lambda\Big(\sum_{i=1}^n x_{Li}-v_L(N)\Big)+\\ &\mu\Big(\sum_{i=1}^n x_{Ri}-v_R(N)\Big),\end{aligned}$$

其中λ和μ为拉格朗日乘子.

对$L(\bar{x},\lambda,\mu)$分别关于变量$x_{Li},x_{Ri}\,(i=1,2,\ldots,n)$和$\lambda,\mu$求偏导数,并令其等于零,可得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\bar{x},\lambda,\mu)}{\partial x_{Li}}=\\ -2\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{S:k,i\in S}\Big(v_L(S)-\sum\limits_{j:j\in S}x_{Lj}\Big)+\lambda=0,\\ \sum\limits_{i=1}^n x_{Li}-v_L(N)=0;\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\bar{x},\lambda,\mu)}{\partial x_{Ri}}=\\ -2\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{S:k,i\in S}\Big(v_R(S)-\sum\limits_{j:j\in S}x_{Rj}\Big)+\mu=0,\\ \sum\limits_{i=1}^n x_{Ri}-v_R(N)=0.\end{cases} \tag{5}$$

化简式(4)得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\bar{x},\lambda,\mu)}{\partial x_{Li}}=\\ 2\Big[\sum\limits_{S:i\in S}x_L(S)+\sum\limits_{S:k,i\in S,k\in N,k\neq i}x_L(S)\Big]-\\ 2\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{S:k,i\in S}v_L(S)+\lambda=0,\\ \sum\limits_{i=1}^n x_{Li}-v_L(N)=0.\end{cases} \tag{6}$$

由排列组合理论可知,含局中人i的联盟的个数为2^{n-1},同时含有局中人i与$j\,(i\neq j)$的联盟个数为

2^{n-2}.

由式(6)有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\bar{x},\lambda,\mu)}{\partial x_{Li}}=\\(2^{n-1}+2^{n-1}n)x_{Li}+(2^{n-1}+2^{n-2}n)\displaystyle\sum_{j:j\in S,j\neq i}x_{Li}-\\2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)+\lambda=0,\\\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{Li}-v_L(N)=0.\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}2^{n-2}nx_{Li}+(2^{n-1}+2^{n-2}n)v_L(N)-\\2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)+\lambda=0,\\\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{Li}-v_L(N)=0.\end{cases}\tag{7}$$

求解式(7)得

$$x_{Li}=\frac{2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)-(2^{n-1}+2^{n-2}n)v_L(N)-\lambda}{2^{n-2}n}.\tag{8}$$

再结合$\sum_{i=1}^{n}x_{Li}=v_L(N)$,有

$$\lambda=\frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)}{n}-\frac{[2^{n-1}n+(n^2+n)2^{n-2}]v_L(N)}{n}.$$

将λ的值代入式(8)可得

$$x_{Li}=\frac{2^{n-3}nv_L(N)+n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)}{n^22^{n-3}}-\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)}{n^22^{n-3}}.\tag{9}$$

同理,求解式(5)得

$$x_{Ri}=\frac{2^{n-3}nv_R(N)+n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_R(S)}{n^22^{n-3}}-\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_R(S)}{n^22^{n-3}}.\tag{10}$$

令

$$a_{Li}(v)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_L(S),$$

$$a_{Ri}(v)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{S:k,i\in S}v_R(S),$$

则式(9)和(10)转化为

$$\begin{aligned}x_{Li}&=\frac{v_L(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{Li}(v)-\sum_{i=1}^{n}a_{Li}(v)\Big),\\x_{Ri}&=\frac{v_R(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{Ri}(v)-\sum_{i=1}^{n}a_{Ri}(v)\Big).\end{aligned}\tag{11}$$

因此,清晰联盟区间值合作博弈的解为$\bar{x}=[x_{Li},x_{Ri}](i=1,2,\ldots,n)$,其中$x_{Li}$和$x_{Ri}$由式(11)可得. 下面分析清晰联盟区间值合作博弈的性质.

定理1 对于清晰联盟区间值合作博弈$\bar{x}\in\bar{G}^N$,模型(3)总存在唯一的解,且该解满足以下性质.

1) 有效性. 对于任意的清晰联盟区间值合作博弈$\bar{v}\in\bar{G}^N$,都有$\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i=\bar{v}(N)$.

2) 可加性. 对于任意两个清晰联盟区间值合作博弈$\bar{v}_1$、$\bar{v}_2\in\bar{G}^N$且$\bar{v}_1+\bar{v}_2\in\bar{G}^N$,满足$\bar{x}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{x}(\bar{v}_1)+\bar{x}(\bar{v}_2)$.

3) 对称性. 对于任意的清晰联盟区间值合作博弈$\bar{v}\in\bar{G}^N$,若i、$j\in N(i\neq j)$为任意两个地位相同的局中人,则有$\bar{x}_i=\bar{x}_j$.

4) 匿名性. 对于任意的清晰联盟区间值合作博弈$\bar{v}\in\bar{g}^N$和集合N上的任意排列σ,有$\bar{x}_{\sigma(i)}(\bar{v}^\sigma)=\bar{x}_i(\bar{v}),i=1,2,\ldots,n$. 其中$\bar{v}^\sigma$的定义为:对$\forall S\subseteq N$,$\bar{v}^\sigma(S)=\bar{v}(\sigma^{-1}(S))$.

证明 该解的表达式已由式(11)给出,故显然是存在且唯一的.

1) 有效性. 由约束条件可知该解满足有效性.

2) 可加性. 由x_{Li}的表达式可得

$$\begin{aligned}&x_{Li}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\\&\frac{v_{1L}(N)+v_{2L}(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(n(a_{Li}(v_1)+\\&a_{Li}(v_2))-\sum_{i=1}^{n}(a_{Li}(v_1)+a_{Li}(v_2))\Big)=\\&\frac{v_{1L}(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{Li}(v_1)-\sum_{i=1}^{n}a_{Li}(v_1)\Big)+\\&\frac{v_{2L}(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{Li}(v_2)-\sum_{i=1}^{n}a_{Li}(v_2)\Big)=\\&x_{Li}(\bar{v}_1)+x_{Li}(\bar{v}_2).\end{aligned}$$

类似地,可证明$x_{Ri}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=x_{Ri}(\bar{v}_1)+x_{Ri}(\bar{v}_2)$. 由定义1中的式(1),可得对于任意的局中人

i都有$\bar{x}_i(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{x}_i(\bar{v}_1)+\bar{x}_i(\bar{v}_2)$,即$\bar{x}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{x}(\bar{v}_1)+\bar{x}(\bar{v}_2)$. 至此,可加性得证.

3) 对称性. 由式(11)可知

$$x_{Li}=\frac{v_L(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{Li}(v)-\sum_{i=1}^n a_{Li}(v)\Big),$$

$$x_{Ri}=\frac{v_R(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{Ri}(v)-\sum_{i=1}^n a_{Ri}(v)\Big).$$

其中

$$a_{Li}(v)=\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)=\sum_{k=1}^n\Big[\sum_{S:k,i,j\in S}v_L(S)+\sum_{S:k,i\in S,j\notin S}v_L(S)\Big],$$

$$a_{Lj}(v)=\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,j\in S}v_L(S)=\sum_{k=1}^n\Big[\sum_{S:k,i,j\in S}v_L(S)+\sum_{S:k,j\in S,i\notin S}v_L(S)\Big].$$

因i和j地位相等,即对于任意的$S\subseteq N\setminus\{i,j\}$,都有$\bar{v}(S\bigcup i)=\bar{v}(S\bigcup j)$,因此$\sum\limits_{S:k,i\in S,j\notin S}v_L(S)=\sum\limits_{S:k,j\in S,i\notin S}v_L(S)$,由此证得$a_{Li}(v)=a_{Lj}(v)$,同理可证$a_{Ri}(v)=a_{Rj}(v)$,从而由$\bar{x}_i$的表达式易看出$\bar{x}_i=\bar{x}_j$,故对称性得证.

4) 匿名性. 对于任意的$\sigma,\bar{v}^\sigma\in\bar{G}^N$,根据式(11)可得

$$x_{L\sigma(i)}(\overline{v}^\sigma)=\frac{v_L^\sigma(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{L\sigma(i)}(v^\sigma)-\sum_{i=1}^n a_{Li}(v^\sigma)\Big).$$

因对于任意的$S\subseteq N$都有$\bar{v}^\sigma(S)=\bar{v}(\sigma^{-1}(S))$,故

$$a_{L\sigma(i)}(v^\sigma)=\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,\sigma(i)\in S}v_L^\sigma(S)=\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,\sigma(i)\in S}v_L(\sigma^{-1}(S))=\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)=a_{Li}(v),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{Li}(v^\sigma)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,i\in S}v_L^\sigma(S)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,i\in S}v_L(\sigma^{-1}(S))=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\sum_{S:k,i\in S}v_L(S)=\sum_{i=1}^n a_{Li}(v).$$

因此

$$x_{L\sigma(i)}(\overline{v}^\sigma)=\frac{v_L^\sigma(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{L\sigma(i)}(v^\sigma)-\sum_{i=1}^n a_{Li}(v^\sigma)\Big)=\frac{v_L(N)}{n}+\frac{1}{2^{n-3}n^2}\Big(na_{Li}(v)-\sum_{i=1}^n a_{Li}(v)\Big)=x_{Li}(\bar{v}).$$

同理可得$x_{R\sigma(i)}(\overline{v}^\sigma)=x_{Ri}(\bar{v})$,所以有$x_{\sigma(i)}(\overline{v}^\sigma)=x_i(\bar{v}),i=1,2,\ldots,n$,匿名性得证. □

4 无限模糊联盟区间值合作博弈求解模型

当联盟为模糊集时,模糊联盟$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)\in[0,1]^n$是一个$n$维向量,其中$\tau_i\in[0,1]$表示局中人$i(i=1,2,\ldots,n)$的参与率,$v(\boldsymbol{\tau})$为模糊联盟合作博弈的特征函数值. 记模糊联盟合作博弈的集合为FG^N. Sakawa等[13]定义模糊联盟合作博弈的联盟超出值$\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{x})=v(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x\tau}$,并给出无限模糊联盟个人超出值的定义,即

$$\widetilde{w}(i,\boldsymbol{x})=\int_0^1\tau_i\widetilde{e}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\int_0^1\tau_i(v(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau},$$

其中$\int_0^1\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\int_0^1\ldots\int_0^1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\ldots\mathrm{d}\tau_n$.

设无限模糊联盟合作博弈的特征函数值为区间值$\bar{v}(\boldsymbol{\tau})=[v_L(\boldsymbol{\tau}),v_R(\boldsymbol{\tau})]$,记无限模糊联盟区间值合作博弈的集合为$\mathrm{F\bar{G}}^N$,根据区间值距离公式,拓展文献[13]无限模糊联盟个人超出值的定义,给出无限模糊联盟区间值合作博弈的个人超出值的定义如下.

定义7　对任意的无限模糊联盟区间值合作博弈$\bar{v}\in\mathrm{F\bar{G}}^N$,局中人$i$的个人超出值为

$$\widetilde{w}(i,\overline{\boldsymbol{x}})=\int_0^1\tau_i[(v_L(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x}_L\boldsymbol{\tau})^2+(v_R(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x}_R\boldsymbol{\tau})^2]\mathrm{d}\boldsymbol{\tau},$$

其中$\int_0^1\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\int_0^1\ldots\int_0^1\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\ldots\mathrm{d}\tau_n$.

同样,使所有局中人的个人超出值之和最小,即有

$$\min\ \sum_{i=1}^n\widetilde{w}(i,\bar{x}).$$

考虑支付向量$\bar{x}$需满足集体有效性,再由定义7可得

$$\begin{aligned}&\min\ \sum_{i=1}^n\int_0^1\tau_i[(v_L(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x}_L\boldsymbol{\tau})^2+(v_R(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x}_R\boldsymbol{\tau})^2]\mathrm{d}\boldsymbol{\tau};\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n x_{Li}=v_L(N),\ \sum_{i=1}^n x_{Ri}=v_R(N).\end{aligned}\tag{12}$$

式(12)的最优解$\bar{x}_j=[x_{Lj},x_{Rj}](j=1,2,\ldots,n)$为无限模糊联盟区间值合作博弈的解,即为局中人满

意的分配方案. 为求解式(12), 构造如下拉格朗日函数:

$$L(\bar{x},\lambda,\mu)=\\ \sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i[(v_L(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x}_L\boldsymbol{\tau})^2+(v_R(\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{x}_R\boldsymbol{\tau})^2]\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\\ \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{Li}-v_L(N)\Big)+\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{Ri}-v_R(N)\Big),$$

其中λ和μ为拉格朗日乘子.

对$L(\bar{x},\lambda,\mu)$分别关于变量x_{Lj}、$x_{Rj}(j=1,2,\ldots,n)$和λ、μ求偏导数, 并令其等于零, 可得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}},\lambda,\mu)}{\partial x_{Lj}}=\\ 2x_{Lj}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i\tau_j^2\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{p\neq j}x_{Lj}\int_0^1\tau_i\tau_j\tau_p\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}-\\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_L(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\lambda=0,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_{Lj}-v_L(N)=0;\end{cases}\tag{13}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\bar{x},\lambda,\mu)}{\partial x_{Rj}}=\\ 2x_{Rj}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i\tau_j^2\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{p\neq j}x_{Rj}\int_0^1\tau_i\tau_j\tau_p\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}-\\ 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_R(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\mu=0,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_{Rj}-v_R(N)=0.\end{cases}\tag{14}$$

由式(13)得

$$\begin{cases}x_{Li}=\\ \dfrac{24\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_L(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}-(3n+2)v_L(N)-12\lambda}{n},\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{Li}-v_L(N)=0.\end{cases}\tag{15}$$

因此, 解式(15)得

$$\lambda=\frac{2\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_L(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{n}-\frac{(n+1)v_L(N)}{4}.$$

将λ代入式(15), 可得

$$x_{Li}=\frac{v_L(N)}{n}-\frac{24}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_L(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\\ \frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_L(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}.$$

同理, 解式(14)有

$$x_{Ri}=\frac{v_R(N)}{n}-\frac{24}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_R(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\\ \frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_R(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}.$$

令

$$a_{Lj}^*(v)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i\tau_j v_L(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau},$$

$$a_{Rj}^*(v)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i\tau_j v_R(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau},$$

则

$$x_{Lj}=\frac{v_L(N)}{n}+\frac{24}{n^2}\Big[na_{Lj}^*(v)-\sum_{j=1}^{n}a_{Lj}^*(v)\Big],$$

$$x_{Rj}=\frac{v_R(N)}{n}+\frac{24}{n^2}\Big[na_{Rj}^*(v)-\sum_{j=1}^{n}a_{Rj}^*(v)\Big].\tag{16}$$

由此得无限模糊联盟区间值合作博弈的解为$\bar{x}_j=[x_{Lj},x_{Rj}]$, $j=1,2,\ldots,n$, 其上下限由式(16)可得. 下面定理分析了无限模糊联盟区间值合作博弈的性质.

定理2 对于任意的无限模糊联盟区间值合作博弈$\mathrm{F}\bar{\mathrm{G}}^N$, 模型(12)的解满足存在唯一性、有效性、可加性和匿名性.

证明 与定理1相同, 存在唯一性、有效性分别由解的表达式及约束条件易得, 下面证明可加性和匿名性.

1) 可加性. 设$\bar{v}_1,\bar{v}_2\in\mathrm{F}\bar{\mathrm{G}}^N$, 由式(16)可知

$$x_{Lj}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\\ \frac{(v_1+v_2)_L(N)}{n}-\\ \frac{24}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i(v_1+v_2)_L(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\\ \frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i(v_1+v_2)_L(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\\ \frac{v_{1L}(N)}{n}-\frac{24}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_{1L}(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\\ \frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_{1L}(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\frac{v_{2L}(N)}{n}-\\ \frac{24}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_{2L}(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}+\\ \frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\tau_i v_{2L}(\boldsymbol{\tau})\tau_j\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\\ x_{Lj}(\bar{v}_1)+x_{Lj}(\bar{v}_2).$$

同理可证$x_{Rj}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=x_{Rj}(\bar{v}_1)+x_{Rj}(\bar{v}_2)$, 故对于

任意的局中人$j, \bar{x}_j(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{x}_j(\bar{v}_1)+\bar{x}_j(\bar{v}_2)$,因此,$\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{v}_1)+\bar{\boldsymbol{x}}(\bar{v}_2)$,可加性得证.

2) 匿名性. 对于任意的排列$\sigma, \bar{v}^\sigma \in \mathrm{F\bar{G}}^N$,由式(16)可得

$$x_{L\sigma(j)}(\bar{v}^\sigma)=\frac{v_L^\sigma(N)}{n}+\frac{24}{n^2}\Big[na^*_{L\sigma(j)}(v^\sigma)-\sum_{j=1}^n a^*_{Lj}(v^\sigma)\Big].$$

对于任意的σ和$\boldsymbol{\tau}$,都有$\bar{v}^\sigma(\boldsymbol{\tau})=\bar{v}(\sigma^{-1}(\boldsymbol{\tau}))$,故

$$a^*_{L\sigma(j)}(v^\sigma)=\sum_{i=1}^n\int_0^1\tau_i\tau_{\sigma(j)}v_L^\sigma(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\sum_{i=1}^n\int_0^1\tau_i\tau_{\sigma(j)}v_L(\sigma^{-1}(\boldsymbol{\tau}))\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\sum_{i=1}^n\int_0^1\tau_i\tau_{\sigma(j)}v_L(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=a^*_{Lj}(v),$$

$$\sum_{j=1}^n a^*_{L\sigma(j)}(v^\sigma)=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\int_0^1\tau_i\tau_j v_L^\sigma(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\int_0^1\tau_i\tau_j v_L(\sigma^{-1}(\boldsymbol{\tau}))\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\int_0^1\tau_i\tau_j v_L(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\sum_{j=1}^n a^*_{Lj}(v).$$

由此可证$x_{L\sigma(j)}(\bar{v}^\sigma)=x_{Lj}(\bar{v})$. 同理$x_{R\sigma(j)}(\bar{v}^\sigma)=x_{Rj}(\bar{v})$,即对于任意的局中人,都有$\bar{x}_{\sigma(j)}(\bar{v}^\sigma)=\bar{x}_j(\bar{v})$,至此,匿名性得证. □

5　数值实例与分析

假设3家工厂拟组建联盟合作生产某品牌食品,即局中人1、局中人2和局中人3,由于受市场环境等诸多因素影响,厂家无法准确预知自己的收益,只能估计出大致的范围,即收益用闭区间表示(单位:万元). 若上述3家企业单独经营,则收益分别为$\bar{v}(1)=[3,4], \bar{v}(2)=[5,6], \bar{v}((3)=[7,8]$. 若企业整合资源组成联盟则可提高收益,已知各工厂联盟后的收益分别为$\bar{v}(1,2)=[9,11], \bar{v}(1,3)=[14,16], \bar{v}(2,3)=[20,25], \bar{v}(1,2,3)=[24,30]$. 当各局中人完全参与合作时,组成的联盟为清晰联盟,由式(11)可得

$$x_{L1}=3.56,\ x_{L2}=8.22,\ x_{L3}=12.22,$$
$$x_{R1}=4.22,\ x_{R2}=10.89,\ x_{R3}=14.89.$$

故局中人1的收益为[3.56, 4.22],局中人2的收益为[8.22, 10.89],局中人3的收益为[12.22, 14.89],显然模型(3)所得的解使得3个厂家均获得了更高的收益,且该解是有效的. 当各局中人的参与率为[0, 1]之间的任意值时,联盟为无限模糊联盟. 利用Owen线性多维扩展[17]$v(\boldsymbol{\tau})=\sum\limits_{S\subseteq N}\prod\limits_{i\in S}\tau_i\prod\limits_{i\notin S}(1-\tau_i)v(S)$,得

$$v_L(\boldsymbol{\tau})=3\tau_1+5\tau_2+7\tau_3+4\tau_1\tau_3+\tau_1\tau_2+8\tau_2\tau_3-4\tau_1\tau_2\tau_3,$$
$$v_R(\boldsymbol{\tau})=4\tau_1+6\tau_2+8\tau_3+4\tau_1\tau_3+\tau_1\tau_2+11\tau_2\tau_3-4\tau_1\tau_2\tau_3.$$

分别将$v_L(\boldsymbol{\tau}), v_R(\boldsymbol{\tau})$代入$a^*_{Lj}(v)$和$a^*_{Rj}(v), j=1,2,3$,有

$$a^*_{L1}(v)=\sum_{i=1}^3\int_0^1\tau_i\tau_1 v_L(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\sum_{i=1}^3\int_0^1[\tau_i\tau_1(3\tau_1+5\tau_2+7\tau_3+4\tau_1\tau_3+\tau_1\tau_2+8\tau_2\tau_3-4\tau_1\tau_2\tau_3)]\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\frac{723}{72},$$

$$a^*_{R1}(v)=\sum_{i=1}^3\int_0^1\tau_i\tau_1 v_R(\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\sum_{i=1}^3\int_0^1[\tau_i\tau_1(4\tau_1+6\tau_2+8\tau_3+4\tau_1\tau_3+\tau_1\tau_2+11\tau_2\tau_3-4\tau_1\tau_2\tau_3)]\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\frac{893}{72}.$$

同理得

$$a^*_{L2}(v)=\frac{769}{72},\ a^*_{L3}(v)=\frac{794}{72},$$
$$a^*_{R2}(v)=\frac{946}{72},\ a^*_{R3}(v)=\frac{979}{72}.$$

从而由式(16)计算出

$$x_{L1}=3.67,\ x_{L2}=8.78,\ x_{L3}=11.55,$$
$$x_{R1}=4.85,\ x_{R2}=10.74,\ x_{R3}=14.41.$$

此时局中人1的收益为[3.67, 4.85],局中人2的收益为[8.78, 10.74],局中人3的收益为[11.55, 14.41].

6　结　论

本文利用区间值距离公式定义区间值合作博弈的个人超出值,基于个人超出值建立清晰联盟区间值合作博弈和无限模糊联盟区间值合作博弈的求解模型,并计算得出该模型的显式解析解. 进一步证明了解的存在性和唯一性、可加性、对称性和匿名性. 本文的模型具有以下优势: 1) 本文利用区间值距离代替区间减法,有效地避免了区间减法带来的区间合作博弈解的不确定性放大或为负值的问题; 2) 采用个人超出值求解区间值合作博弈,弥补了联盟超出值无法用于求解无限模糊联盟区间值合作博弈解的不足; 3) 个人超出值能够体现每个局中人对分配的

不满意程度,具有更好的实际价值. 针对局中人完全参与联盟或参与联盟的程度为模糊集的情形,本文得到的区间值合作博弈的解可以很好地解决联盟收益(成本)为区间值时的供应链或工程合作利益(成本)分摊等常见的实际问题. 如:不确定的运输网络分配问题,用该模型可以提出一种合理的运输分配. 此外,大型基础工程中经济利益的分配问题,如大型基础工程参与主体地方政府、项目法人和农户3个参与方之间的利益分配问题等等. 本文研究的基于个人超出值的区间值合作博弈的求解,是利用区间的距离代替区间减法运算,然而,不同的区间距离会导致区间合作博弈显式解不一样,能否找到更合适的区间距离以代替区间减法,使得解更便于计算或拥有更好的性质,同时,能否针对基于个人超出值的区间值合作博弈的求解模型,考虑集体有效性和个体合理性,建立更合理的求解模型,都是接下来需要进一步研究的问题.

参考文献(References)

[1] Alparslan Gök S Z, Branzei O, Branzei R, et al. Set valued solution concepts using interval-type payoffs for interval games[J]. Journal of Mathematical Economics, 2011, 47: 621-626.

[2] Branzei R, Alparslan Gök S Z, Branzei O. Cooperative games under interval uncertainty: On the convexity of the interval undominated cores[J]. European Journal of Operations Research, 2011, 19(4): 523-532.

[3] Han W, Sun H, Xu G J. A new approach of cooperative interval games: The interval core and Shapley value revisited[J]. Operations Research Letters, 2012, 40(6): 462-468.

[4] Branzei R, Dimitrov D, Tiji S. Convex fuzzy games and participation monotonic allocation schemes[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139(2): 267-281.

[5] 洪防璇, 李登峰. 基于满意度的区间型多目标合作对策求解模型[J]. 控制与决策, 2017, 32(4): 681-687.
(Hong F X, Li D F. Solution models for interval-valued multiobjective cooperative games based on satisfactory degree[J]. Control and Decision, 2017, 32(4): 681-687.)

[6] Hoa N V, Lupulescu V, O'Regan D. Solving interval-valued fractional initial value problems under Caputo gH-fractional different ability[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 309(15): 1-34.

[7] Meng F Y, Chen X H, Tan C Q. Cooperative fuzzy games with interval characteristic functions[J]. Operational Research, 2016, 16(1): 1-24.

[8] Li D F, Ye Y F. Interval-valued least square prenucleolus of interval-valued cooperative games and a simplified method[J]. International Journal of Operational Research, 2018, 18(1): 205-220.

[9] 李登峰, 刘家财. 基于最小平方距离的区间值合作博弈求解模型与方法[J]. 中国管理科学, 2016, 24(7): 135-142.
(Li D F, Liu J C. Models and method of interval-valued cooperative games based on least square distance[J]. Chinese Journal of Management Science, 2016, 24(7): 135-142.)

[10] Ruiz L M, Valenciano F, Zarzuelo J M. The least square prenucleolusand the least square nucleolus: Two values for TU games based on the excess vector[J]. International Journal of Game Theory, 1996, 25(1): 113-134.

[11] Wallmeier E. A procedure for computing the f-nucleolus of a cooperative game[C]. Selected Topics in Operations Research and Mathematical Economics. Berlin Heidelberg: Springer, 1984: 288-296.

[12] Hou D S, Sun P F, Xu G J, et al. Compromise for the complaint: An optimization approach to the ENSC value and the CIS value[J]. Journal of the Operational Research Society, 2018, 69(4): 571-579.

[13] Sakawa M, Nishizaki I. A lexicographical solution concept in an n-person cooperative fuzzy game[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61(3): 265-275.

[14] Molina E, Tejada J. The equalizer and the lexicographical solutions for cooperative fuzzy games: Characterization and properties[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 125(3): 369-387.

[15] Kong Q Q, Sun H, Xu G J, et al. The general prenucleolus of n-person cooperative fuzzy games[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 349(15): 23-41.

[16] Ruiz L M, Valenciano F, Zarzuelo J M. The family of least square values for transferable utility games[J]. Gamesand Economic Behavior, 1998, 24(1/2): 109-130.

[17] Owen G. Multilinear extensions of games[J]. Management Science, 1972, 18(5): 64-79.

作者简介

南江霞(1978−), 女, 教授, 博士生, 从事不确定博弈理论及其应用等研究, jiangxia1107@163.com;

李梦祺(1994−), 女, 硕士生, 从事不确定博弈理论及其应用的研究, E-mail: 1563588674@qq.com;

张茂军(1977−), 男, 教授, 博士, 从事博弈论及在金融领域的应用等研究 E-mail: zhang1977108@sina.com.

(责任编辑: 孙艺红)