

## 《基于指数保性能的比例-积分-时滞滑模观测器设计》附录

### 附录 A 定理 1 证明过程

#### 1. 定理 1 证明过程

设计 Lyapunov-Krasovskii 函数为:

$$\begin{aligned} V(e_x, e_{xt}) &= V_1(e_x, t) + V_2(e_{xt}, t) + V_3(e_{xt}, t) + V_4(e_{xt}, t) \\ V_1(e_x, t) &= e_x^T(t) P e_x(t), \\ V_2(e_{xt}, t) &= \int_{t-h}^t (s-t+h)^2 e^{-2\alpha(t-s)} w_1(s) ds, \\ V_3(e_{xt}, t) &= \int_{t-h}^t (s-t+h) e^{-2\alpha(t-s)} w_2(s) ds, \\ V_4(e_x, t) &= \int_0^t e^{-2\vartheta(t-s)} e_x^T(s) W e_x(s) ds. \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} w_1(s) &= \ddot{e}_y(s)^T r_k \ddot{e}_y(s), w_2(s) = \ddot{e}_y(s)^T q_k \ddot{e}_y(s), \\ P &= P^T > 0, W = W^T > 0, r_k = r_k^T > 0, q_k = q_k^T > 0. \end{aligned}$$

对  $V_1(e_x, t)$  关于时间  $t$  求导, 可得:

$$\dot{V}_1 + 2\alpha V_1 = 2e_x^T(t) P \dot{e}_x(t) + 2\alpha e_x^T(t) P e_x(t) \quad (17)$$

同理, 对  $V_2(e_x, t)$  求导, 可得:

$$\dot{V}_2 + 2\alpha V_2 = \sum_{k=0}^1 h^2 \ddot{e}_y(t)^T r_k \ddot{e}_y(t) - \int^t 2(s-t+h) e^{-2\alpha(t-s)} w_1(s) ds \quad (18)$$

根据引理 1 对上式第二项进行放缩, 可得:

$$\int_{t-h_k}^t 2(s-t+h) e^{-2\alpha(t-s)} w_1(s) ds \geq \frac{4}{h^2} e^{-2\alpha h} \delta^T(t) R \delta(t)$$

代入到式(18)中, 可得:

$$\dot{V}_2 + 2\alpha V_2 \leq h^2 \ddot{e}_y(t)^T r_k \ddot{e}_y(t) - \frac{4}{h^2} e^{-2\alpha h} \delta^T(t) R \delta(t) \quad (19)$$

同理, 可得:

$$\dot{V}_3 + 2\alpha V_3 \leq h \ddot{e}_y(t)^T q_k \ddot{e}_y(t) - h e^{-2\alpha h} \gamma^T(t) Q \gamma(t) \quad (20)$$

其中,

$$R = \text{diag}\{r_0, r_1\}, Q = \text{diag}\{q_0, q_1\}$$

类似地, 对  $V_4(e_x, t)$  求导并进行适当的放缩:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 + 2\alpha V_4 &= e_x^T(t) W e_x(t) + 2(\alpha - \vartheta) \int_0^t e^{-2\vartheta(t-s)} e_x^T(s) W e_x(s) ds \\ &\leq e_x^T(t) W e_x(t) + \frac{2(\alpha - \vartheta)}{\vartheta} \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} e_x^T(s) ds \times W \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} e_x(s) ds \end{aligned} \quad (21)$$

将式(17)、(19)、(20)、(21) 相加, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} + 2\alpha V \leq & e_x^T(t)(PA_c + A_c^T P + 2\alpha P + W)e_x(t) - 2e_x^T(t)PA_\gamma\gamma(t) - 2e_x^T(t)PA_\delta\delta(t) \\ & - 2e_x^T(t)PA_k \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)}e(s)ds - \gamma^T(t)Q\gamma(t) \cdot m_2 - 4\delta^T(t)R\delta(t)m_1 \\ & + h\eta^T(t)\bar{F}^T\Gamma\bar{F}\eta(t) + \frac{2(\alpha - \vartheta)}{\vartheta} \cdot \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)}e_x^T(s)dsW \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)}e_x(s)ds. \end{aligned}$$

其中,  $\eta(t) = \text{col}\{e_x(t), \delta(t), \gamma(t)\}$ ,  $\Gamma = \sum_{k=0}^1 (hr_k + q_k)$ ,  $\bar{F} = [F_c - F_\delta - F_\gamma]$ , 采用舒尔补引理<sup>[20]</sup>, 可得 $\dot{V} + 2\alpha V \leq 0$ 等价于 $Y \leq 0$ 。

$Y$ 是由以下元素组成的对称矩阵:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= PA_c + A_c^T P + 2\alpha P + W \\ Y_{12} &= -PA_\delta, Y_{13} = -PA_\gamma \\ Y_{14} &= -PA_k, Y_{15} = h^{\frac{1}{2}}F_c^T \\ Y_{22} &= -4R \cdot m_1, Y_{25} = -h^{\frac{1}{2}}F_\delta^T \\ Y_{33} &= -Q \cdot m_2, Y_{35} = -h^{\frac{1}{2}}F_\gamma^T \\ Y_{44} &= -\frac{2(\vartheta - \alpha)}{\vartheta}W, Y_{55} = -\Gamma^{-1} \end{aligned}$$

上述矩阵不等式并不是一个凸最优问题, 为了将上述双线性矩阵不等式(Bilinear Matrix Inequality, BMI)转换为线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality, LMI), 定义变换矩阵如下<sup>[19]</sup>:

$$\mathcal{T} = \text{diag}\{X, MX, X, X, I\}$$

其中,  $X = P^{-1}$ 。

对 $\Delta$ 进行如下合同变换, 可得:

$$\Omega = \mathcal{T}\Delta\mathcal{T}^T \leq 0$$

其中,  $\Omega$ 是由以下元素组成的对称矩阵:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= A_c X + X A_c^T + 2\alpha X + X^T W X \\ \Omega_{12} &= -A_\delta M X, \Omega_{13} = -A_\gamma X \\ \Omega_{14} &= -A_k X, \Omega_{15} = h^{\frac{1}{2}} X^T F_c^T \\ \Omega_{22} &= -4\Lambda_1 \cdot m_1, \Omega_{25} = -h^{\frac{1}{2}} X^T M^T F_\delta^T \\ \Omega_{33} &= -\Lambda_2 \cdot m_2, \Omega_{35} = -h^{\frac{1}{2}} X^T F_\gamma^T \\ \Omega_{44} &= -\frac{2(\vartheta - \alpha)}{\vartheta} X^T W X, \Omega_{55} = -\Gamma^{-1} \end{aligned}$$

其中,  $\Lambda_1 = X^T M^T R M X, \Lambda_2 = X^T Q X$ 。

将 $\Omega_{22}$ 、 $\Omega_{33}$ 、 $\Omega_{44}$ 中的二次型项以及 $\Omega_{55}$ 进行放缩, 可得:

$$\begin{cases} -X^T (M^T R M) X \leq -2X + (M^T R M)^{-1} \\ -X^T Q X \leq -2X + Q^{-1} \\ -X^T W X \leq -2X + W^{-1} \\ -\Gamma^{-1} \leq -\sum_{k=0}^1 (h^{-1} r_k^{-1} + q_k^{-1}). \end{cases}$$

其中,  $v_k = r_k^{-1}, z_k = q_k^{-1}, w_k = w_k^{-1}$

对应于 $V = R^{-1}, Z = Q^{-1}, W = W^{-1}$ , 通过给定滑模面增益, 观测器的增益应可由 LMI 解得, 引入新的矩阵 $U$ , 并加入如下约束条件 $MX = UM$ , 可得:

$$\begin{cases} A_c X = A_{c0} X - A_{c1} L M X \\ A_\delta M X = A_{\delta0} M X + A_{\delta1} L M X \\ F_c X = F_{c0} X - F_{c1} L M X \\ F_\delta M X = F_{\delta0} M X + F_{\delta1} L M X \\ A_k X = K_M \end{cases}$$

其中,  $LMX = \mathcal{K}M$ , 观测器增益 $L$ 以及参数 $A_k$ 可由 $\mathcal{K} = LU$ 以及 $K_M = A_k X$ 计算得到.

定理 1 得证。