第 16 卷 第 4 期　　控 制 与 决 策　　2001 年 7 月
Vol. 16 No. 4　　CONTROL AND DECISION　　July 2001

文章编号: 1001-0920(2001)04-0510-03

不可微系统的可靠性优化设计问题

赵中奇[1], 潘德惠[2]
(1.沈阳大学 工商管理学院,辽宁 沈阳 110041; 2 东北大学 工商管理学院,辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 给出! 类不可微串并联系统可靠性优化设计问题的数值算法,该算法简单、实用,收敛速度快。最后讨论了不可微系统的最小成本问题。
关键词: 不可微系统; 可靠性; 优化设计
中图分类号: TP 273　　文献标识码: A

Optimun Design of Reliability on Nondifferential Systems

ZHAO Zhong-qi[1], PAN De-hui[2]
(1. School of Business Administration, Shenyang University, Shenyang 110041, China;
2. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: A kind of numerical method for optimum design of nondifferential system reliability is presented. The proposed method is simple and useful. The minimal cost problem is also discussed.
Key words: nondifferential systems; reliability; optimum design

1　引　　言

在工程和管理领域中,许多问题可描述为在系统达到特定的可靠性指标的条件下,要求构成系统的基本单元最少,或构成系统的成本最小。这是一类不可微系统的优化设计问题。

设系统由 n 个子系统串联而成,每个子系统由若干个基本单元并联而成, q_i 是子系统 i 的基本单元的失效率, x_i 是子系统 i 的基本单元的个数, R_0 是系统的可靠性指标。则不可微系统的优化设计问题为

$$\mathrm{INP}_1: \min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{s.t.} \prod_{i=1}^{n}(1-q_i^{x_i}) \geq R_0$$

$$x_i \geq 1 \text{ 为整数}, i \in N_n$$

其中, $R_0, q_i \in (0,1)$, $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$。

关于问题 INP_1,有如下的理论结果。

2　基本定理

定 理 1　设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $q_\gamma^{x_\gamma} = \max_{i \in N_n}\{q_i^{x_i}\}$, $x_\gamma = \min_{i \in N_n}\{x_i\}$,则

$$G(x_1, \cdots, x_\gamma + 1, \cdots, x_n) = \max_{i \in N_n}\{G(x_1, \cdots, x_i + 1, \cdots, x_n)\}$$

其中　$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-q_i^{x_i})$$

证明　因为

收稿日期: 2000-02-24; 修回日期: 2000-06-22
作者简介: 赵中奇(1957—),男,辽宁沈阳人,副教授,博士,从事控制科学与控制工程等研究;潘德惠(1928—),男,辽宁沈阳人,教授,博士生导师,从事分布参数系统的模型辨识与最优控制等研究。

$$G(x_1,\cdots,x_\gamma+1,\cdots,x_n)=$$
$$(1-q_\gamma^{x_\gamma+1})\prod_{i\neq\gamma}^{n}(1-q_i^{x_i})=$$
$$\frac{1-q_\gamma^{x_\gamma+1}}{1-q_\gamma^{x_\gamma}}G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

所以只需证明当 $q_\gamma^{x_\gamma}\geq q_i^{x_i}, x_\gamma\leq x_i$ 时, 有 $G(x_1,\cdots,x_\gamma+1,\cdots,x_n)\geq G(x_1,\cdots,x_i+1,\cdots,x_n)$ 即可。而这等价于证明

$$\frac{1-q_\gamma^{x_\gamma+1}}{1-q_\gamma^{x_\gamma}}\geq\frac{1-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}} \tag{1}$$

为此, 令 $f(y)=\dfrac{1-y^{x_\gamma+1}}{1-y^{x_\gamma}}-\dfrac{1-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}}$, 则不难验证 $f(y)$ 是 $(0,1)$ 上的严格增函数。因为

$$f(q_i^{x_i/x_\gamma})=\frac{1}{1-q_i^{x_i}}[q_i^{x_i+1}-q_i^{(x_\gamma+1)/x_\gamma}] \tag{2}$$

而当 $x_\gamma\leq x_i$ 时, 有 $(x_\gamma+1)/x_\gamma\geq(x_i+1)/x_i$, 从而有 $q_i^{(x_i+1)/x_i}\geq q_i^{(x_r+1)/x_\gamma}$, 亦即 $q_i^{x_i+1}\geq q_i^{(x_\gamma+1)x_i/x_\gamma}$, 故由式(2) 知 $f(q_i^{x_i/x_\gamma})\geq 0$。又由 $f(y)$ 的增加性知, 当 $y\geq q_i^{x_i/x_\gamma}$ 时, 有 $f(y)\geq f(q^{x_i/x_\gamma})\geq 0$。现取 $y=q_\gamma$, 则由 $q_\gamma^{x_\gamma}\geq q_i^{x_i}$ 知 $q_\gamma\geq q_i^{x_i/x_\gamma}$, 故

$$y(q_\gamma)=\frac{1-q_\gamma^{x_\gamma+1}}{1-q_\gamma^{x_\gamma}}-\frac{1-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}}\geq 0$$

这便证明了式(1), 从而定理得证。

定理 2　设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 假定 $x_\gamma>x_i$, 若 $q_\gamma\leq\alpha_\gamma$, 则 $G(x_1,\cdots,x_\gamma+1,\cdots,x_n)\geq G(x_1,\cdots,x_i+1,\cdots,x_n)$; 反之, 若 $q_\gamma\geq\alpha_\gamma$, 则 $G(x_1,\cdots,x_\gamma+1,\cdots,x_n)\leq G(x_1,\cdots,x_i+1,\cdots,x_n)$。其中

$$\alpha_\gamma=[1-\frac{q_\gamma^{x_\gamma}}{1-q_i^{x_i}}(1-q_i^{x_i+1})]^{\frac{1}{x_\gamma+1}} \tag{3}$$

证明　设 $q_\gamma\leq\alpha_\gamma$, 则有

$$q_\gamma^{x_\gamma+1}\leq 1-\frac{1-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}}(1-q_\gamma^{x_\gamma})$$

从而有

$$\frac{1-q_\gamma^{x_\gamma+1}}{1-q_\gamma^{x_\gamma}}\geq\frac{1-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}}$$

由定理 1 的证明过程知

$$G(x_1,\cdots,x_\gamma+1,\cdots,x_n)\geq G(x_1,\cdots,x_i+1,\cdots,x_n)$$

定理的另一部分同理可证。

定理 3　设 $X^1,X^2,\cdots,X^m,\cdots$ 是满足定理 1 和定理 2 条件的序列, 记 $X^k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)$, $X^0=(1,1,\cdots,1)$ 是给定的初始点, 则有如下结论:

1) $\lim\limits_{k\to\infty}G(x^k)=1$;

2) 对任意的 X^k 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k=n+k$;

3) 对任意的 k, 有

$$G(x^k)=\max\{G(Y)\mid\sum_{i=1}^{n}y_i=n+k, y_i\text{ 为正整数}\}$$

4) 如果 X^m 是问题 INP_1 的最优解, 则目标函数值为 $n+m$。

证明　根据问题 INP_1 的特殊结构, 可知 X^0 为最优初始点。由定理 1 和定理 2 知, X^{k+1} 是在 X^k 的某个分量上加 1 而得的, 从而有 $X^{k+1}>X^k$。据此有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^k=\infty, i\in N_n$, 因此有结论 1) 成立。定理 1 和定理 2 保证了每次迭代相对于前一次结果是最优的, 因此结论 3) 成立。结论 2) 和结论 4) 则是显然的。(证毕)

3　INP_1 优化设计

INP_1 优化设计的程序步骤为: 给定初始点

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(1,1,\cdots,1)$$

1) 如果 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-q_i^{x_i})\geq R_0$, 则算法结束, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是最优解; 否则转 2)。

2) 求 $\gamma=\min\{j\mid q_j^{x_j}=\max\limits_{i\in N_n}\{q_i^{x_i}\}\}$

3) 如果 $x_\gamma=\min\limits_{i\in N_n}\{x_i\}$, 则令 $x_\gamma=x_\gamma+1$, 转 1); 否则转 4)。

4) 记

$$I=\{i\mid x_i<x_\gamma, i\in N_n\}$$

$$\alpha_\gamma=\left[1-\frac{1-q_\gamma^{x_\gamma}}{1-q_i^{x_i}}(1-q_i^{x_i+1})\right]^{\frac{1}{x_\gamma+1}},\quad i\in I$$

5) 对任意的 $i\in I$, 如果 $q_\gamma\leq\alpha_\gamma$, 则令 $x_\gamma=x_\gamma+1$, 转 1); 否则必有某一个 $i_0\in I$, 使 $q_\gamma>\alpha_0^\gamma$, 记 $\gamma=i_0$, 转 6)。

6) 如果

$$\gamma=\min\{j\mid q_j^{x_j}=\max_{i\in I}\{q_i^{x_i}\}\},\quad x_\gamma=\min_{i\in I}\{x_i\}$$

则令 $x_\gamma=x_\gamma+1$, 转 1); 否则以 $I-\{i_0\}$ 代替 I, 转 5)。

4　算例的对比分析

文献[1] 提出的问题可表述为如下的不可微系统的优化设计问题

$$\min\sum_{i=1}^{5}x_i$$

$$\text{s.t.}[1-(1-0.96)^{x_1}][1-(1-0.93)^{x_2}]\times$$
$$[1-(1-0.95)^{x_3}]\times[1-(1-0.80)^{x_4}]\times$$
$$[1-(1-0.75)^{x_5}]\geq 0.98$$
$$x_1,x_2,\cdots,x_5\geq 1\text{ 为整数}$$

表 1　算法的迭代过程

步骤	变量					$G(x)$
	$p_1(x_1)$	$p_2(x_2)$	$p_3(x_3)$	$p_4(x_4)$	$p_5(x_5)$	
x^0	1 0.96	1 0.93	1 0.85	1 0.80	1 0.75	0.455
x^1	1 0.96	1 0.93	1 0.85	1 0.80	2 0.937	0.569
x^2	1 0.96	1 0.93	1 0.85	2 0.96	2 0.937	0.683
x^3	1 0.96	1 0.93	2 0.977	2 0.96	2 0.937	0.785
x^4	1 0.96	2 0.995	2 0.977	2 0.96	2 0.937	0.839
x^5	1 0.96	2 0.995	2 0.977	2 0.96	3 0.984	0.882
x^6	2 0.998	2 0.995	2 0.977	2 0.96	3 0.984	0.918
x^7	2 0.998	2 0.995	2 0.977	3 0.992	3 0.984	0.947
x^8	2 0.998	2 0.995	3 0.997	3 0.992	3 0.984	0.966
x^9	2 0.998	2 0.995	3 0.997	3 0.992	4 0.996	0.978
x^{10}	2 0.998	2 0.995	3 0.997	4 0.998	4 0.996	0.984 > 0.98

记

$$p_1(x_1) = 1 - (1 - 0.96)^{x_1}$$
$$p_2(x_2) = 1 - (1 - 0.93)^{x_2}$$
$$p_3(x_3) = 1 - (1 - 0.85)^{x_3}$$
$$p_4(x_4) = 1 - (1 - 0.80)^{x_4}$$
$$p_5(x_5) = 1 - (1 - 0.75)^{x_5}$$

则算法中步骤2) 的$\gamma = \min\{j \mid q_j^{x_j} = \max_{i\in N_n}\{q_i^{x_i}\}\}$ 变为 $\gamma = \min\{j \mid p_j(x_j) = \min_{i\in N_n}\{p_i(x_i)\}\}$。算法的迭代过程如表 1 所示。

该算法共迭代 10 次, 即达到了收敛要求, 比文献[1]的方法减少了8次迭代, 效率提高了44.44%。特别是当串联系统的个数n较大时, 算法的优越性则更显著, 因而更有实用价值。

5　关于成本问题的推断

不可微系统可靠性优化设计问题非常复杂, 由于其特殊结构, 一些有效的数值算法已不再适用。当问题更加复杂时, 解法也更困难。如考虑成本问题, 即假设系统基本单元i的成本为C_i, 要求系统在满足特定的可靠性指标R_0的情况下, 系统的构成成本为最小。这一问题可描述为

$$\mathrm{INP}_2: \min \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$
$$\text{s.t.} \prod_{i=1}^{n}(1 - q_i^{x_i}) \geq R_0$$
$$x_i \geq 1 \text{ 为整数}, i \in N_n$$

显然, 问题INP_1的算法以及应用微分原理推导出的方法都不适用于此问题的求解, 但根据 INP_1 解法的论证过程, 可对问题 INP_2 做出如下推断:

1) 根据问题的特殊结构, INP_2 的初始最优点为 $X^0 = (1, 1, \cdots, 1)$。

2) 使系统可靠性增加最快的点, 与 INP_1 的条件相同, 但这样的点并不是 INP_2 的最优点, INP_2 的最优点应是单位成本可靠性增加最大的点。据此, INP_1 算法中步骤 2) 的 γ 应改为

$$\gamma = \min\left\{j \mid q_j^{x_j} = \max_{i\in N_n}\left[\frac{C_j}{C_i} q_i^{x_i}\right]\right\} \tag{4}$$

3) 同理, 将 INP_1 中步骤 4) 的 α_γ 改为

$$\alpha_\gamma = \left[1 - \frac{1 - q_\gamma^{x_\gamma}}{1 - q_i^{x_i}}(1 - q_i^{x_i+1})\frac{C_\gamma}{C_i}\right]^{\frac{1}{x_\gamma+1}} \tag{5}$$

以上只是对INP_2解法的猜测, 其中1) 是显而易见的, 而 3) 是可以严格证明的。我们期待着对 2) 的证明, 以完善这一算法。

参考文献:

[1] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 北京科学出版社, 1985.