

开环可重入生产系统的排队网络模型 及求解算法*

赵丽娜 郑应平

(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

摘要 将开环可重入生产系统的模型化成非线性矩阵方程可解的形式,在此基础上研究系统在随机调度策略下的不可约性。对缓冲区半无限系统的稳态分布求解表明,非线性矩阵方程理论是研究可重入生产系统稳态性能的有效方法。

关键词 可重入生产系统,非线性矩阵方程,多级排队网络

分类号 TP 271.74

Queueing Models of Open Re-entrant Lines and the Solutions

Zhao Lina, Zheng Yingping

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences)

Abstract Queueing network models of re-entrant lines are developed, and are converted to the canonical forms that are solvable by non-linear matrix equations. Irreducibility of such systems is studied. A system with semi-infinite buffer capacities is solved in terms of static distribution. Numerical results show that theories about non-linear matrix equations are effective for analyzing static performances of re-entrant lines.

Key words re-entrant lines, non-linear matrix equations, multiclass queueing networks

1 引言

可重入生产系统的研究始于 80 年代末,是随着半导体生产系统的发展而兴起的。与以往的制造系统不同,它具有很强的可重入性,即工件在加工过程中的不同阶段可能重复访问某些机器,使得可重入生产系统的研究比其他生产系统更为复杂。

对可重入生产系统的研究主要集中在以下几个方面:模型、稳定性、稳态性能、控制与调度策略。其中模型包括精确模型和近似模型。近似模型有布朗网络模型^[1]和流模型^[2]等。近似模型化繁为简,借助于大数定律和中心极限定理得到系统的极限状态。流模型在系统稳定性方面获得一些结果,并得到了两站系统稳定的充要条件。但由于近似模型很难分

析系统的稳态性能,难以比较各种控制与调度策略的优劣,因此,有些学者把目光转向精确模型,希望得到更多的结果。

可重入生产系统的近似模型研究得较多,而其排队网络模型的文献却很少。这是因为目前只有满足乘积形式解的排队网络可以得到统一形式的稳态解,而大部分多级排队网络(如可重入生产系统)并不满足乘积形式解的条件。

马尔可夫链是一类无记忆性的随机过程,具有重要的应用价值^[3]。通常假设制造系统中的加工时间服从负指数分布,这样可把系统化成马尔可夫链或嵌入马尔可夫链。本文以一个典型可重入生产系统为例,说明如何将一个可重入生产系统化成矩阵方程可解的马尔可夫链模型,并给出求解方法。

2 系统描述

考虑图 1 两加工站四道工序的系统。系统有两

* 国家自然科学基金项目(69635030)

1999-04-04 收稿,1999-07-19 修回

台机器 M_1 和 M_2 , 工件进入系统后的加工路径是: $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2$ 。为每一工步设置一缓冲区, 分别是 b_1, b_2, b_3, b_4 。工件来流是以 λ 为参数的泊松过程, 各步加工时间分别服从以 $\mu_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为参数的负指数分布。缓冲区的容量分别设为 c_1, c_2, c_3, c_4 。

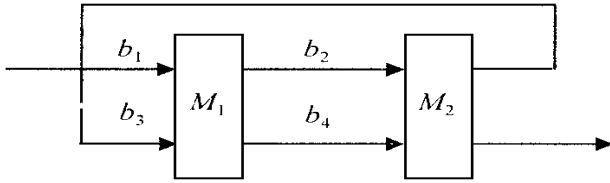


图1 典型可重入生产系统

系统状态集为 $J = \{(i, j, m, n) \mid i \leq c_1, j \leq c_2, m \leq c_3, n \leq c_4\}$, 其中 i, j, m, n 分别表示各采样时刻 b_1, b_2, b_3, b_4 中的工件数。状态空间可表示为 $(0, 1, \dots, c_1) \times (0, 1, \dots, c_2) \times (0, 1, \dots, c_3) \times (0, 1, \dots, c_4)$ 。状态以字典序排列, $p^{(i, j, m, n), (i', j', m', n')}$ 表示从状态 (i, j, m, n) 转移到状态 (i', j', m', n') 的概率, P 是系统状态一步转移概率矩阵, 行和为 1。

如果系统存在稳态分布, 则用 $X = \{X_0, X_1, \dots, X_i, \dots\}$ 表示, 其中 X_i 是 $1 \times (c_2 - 1)(c_3 - 1)(c_4 - 1)$ 的矢量。

由图1可见, b_1 和 b_3 同在 M_1 上接受加工, 而 M_1 同时只能加工一个工件。显然, 同一加工站前的不同缓冲区存在资源竞争问题, 对此采用调度策略来决定各缓冲区的优先级。若采用随机调度(RS)策略, 当 b_1 和 b_3 同时有工件时, 则加工 b_1 和 b_3 的概率分别为 0.5 。 b_2 和 b_4 的情况类似。

3 系统建模

首先假定除第一个缓冲区外, 其他缓冲区容量都有限, $c_i = H - 1, i = 2, 3, 4, c_1 = \infty$ 。这种情况称为缓冲区半无限。同时假设采用RS调度策略。在这些假设下, 系统状态是无限维的。不失一般性, 可设 $\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$ 。由于工件来流是泊松流, 加工时间服从负指数分布, 故可推得微小时间 Δt 内系统状态转移概率为

$$p^{(i, j, m, n), (i+1, j, m, n)}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$p^{(i, j, 0, n), (i-1, j+1, 0, n)} \Big|_{i>0, j<H-1}(\Delta t) = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t)$$

当 b_1 和 b_3 同时有工件时, 加工 b_1 和 b_3 的概率分别为 0.5 , 所以

$$p^{(i, j, m, n), (i-1, j+1, m, n)} \Big|_{i>0, m>0, j<H-1}(\Delta t) = 0.5 \mu_1 \Delta t + o(\Delta t)$$

当 b_4 已满时, 为避免发生阻塞, 不能加工 b_3 , 只能加工 b_1 。

$$p^{(i, j, m, H-1), (i-1, j+1, m, H-1)} \Big|_{i>0, j<H-1}(\Delta t) = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t)$$

其他转移概率依此类推。从而得到一步状态转移阵 P 。

在本系统中, 某时刻某事件是否发生只与系统当前状态和系统所采用的调度策略有关, 而与系统以前的状态无关。所以这样的随机过程具有马尔可夫性。

如果用传统方法表达 P , 形式杂乱, 且几乎无法将其完全写出。用通常的方法求解其平稳状态向量几乎是不可能的。但若细心观察, 就会发现其有规律可循。将矩阵内的元素划成 $H \times H$ 的块, 有许多块是相同或相似的。设

$$\Lambda_1^0 = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_1 \end{bmatrix}_{H \times H}$$

$$\Lambda_1^1 = \begin{bmatrix} 0.5\mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0.5\mu_1 & \\ & & & \mu_1 \end{bmatrix}_{H \times H}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} \mu_2 & & & \\ & 0.5\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0.5\mu_2 \end{bmatrix}_{H \times H}$$

$$\Lambda_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}$$

$$\Lambda_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5\mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0.5\mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}$$

$$\Lambda_4^0 = \begin{bmatrix} * & & & \\ \mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H}$$

$$\Lambda_4^1 = \begin{bmatrix} * & & & \\ 0.5\mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0.5\mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H}$$

其中 * 是矩阵 P 的对角线元素, 保证 P 行和为 1。

继续这样的划分, 令

$$D_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_1^0 & & & \\ & \Lambda_1^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_1^1 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \Lambda_2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}$$

$$D_{34}^0 = \begin{bmatrix} \Lambda_4^0 & & & \\ \Lambda_3^1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}$$

$$D_{34}^1 = \begin{bmatrix} \Lambda_4^1 & & & \\ \Lambda_3^1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \Lambda_4^1 \\ & & & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}$$

$$D_{34}^{00} = \begin{bmatrix} \Lambda_4^0 & & & \\ \Lambda_3^0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}$$

$$D_{34}^{10} = \begin{bmatrix} \Lambda_4^1 & & & \\ \Lambda_3^0 & \ddots & & \\ & \ddots & \Lambda_4^1 & \\ & & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}$$

再设

$$A_0 = \Lambda, \quad A_1 = \begin{bmatrix} D_{34}^0 & & & \\ D_2 & D_{34}^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & D_2 & D_{34}^1 \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & D_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} D_{34}^{00} & & & \\ D_2 & D_{34}^{10} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & D_2 & D_{34}^{10} \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3}$$

于是状态转移阵 P 可写成

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & & \\ A_2 & A_1 & A_0 & \\ & A_2 & A_1 & A_0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1)$$

A_1 中含有 $H^3 \times H^3$ 个元素, 其对角元素为

$$\text{diag} \left\{ \underbrace{1 - \mu_1 - \lambda, 1 - \mu_1 - \mu_4 - \lambda, \dots}_{H \text{ 个}}, \right. \\ \underbrace{1 - 0.5\mu_3 - 0.5\mu_1 - \lambda, 1 - 0.5\mu_3 - 0.5\mu_1 - \mu_4 - \lambda, \dots, 1 - \mu_1 - \mu_4 - \lambda}_{H \text{ 个}}, \\ \underbrace{\dots, 1 - \mu_1 - \mu_2 - \lambda, 1 - \mu_1 - 0.5\mu_2 - 0.5\mu_4 - \lambda, \dots}_{\text{重复前 } H^2 \text{ 个元素, 从第 } H^2 \text{ 个元素开始的 } H \text{ 个元素}}, \\ \underbrace{1 - 0.5\mu_1 - \mu_2 - 0.5\mu_3 - \lambda, 1 - 0.5\mu_1 - 0.5\mu_2 - 0.5\mu_3 - 0.5\mu_4 - \lambda, \dots}_{H \text{ 个}}, \\ \underbrace{\dots, 1 - 0.5\mu_1 - 0.5\mu_3 - \lambda, 1 - 0.5\mu_1 - 0.5\mu_3 - \mu_4 - \lambda, \dots, 1 - \mu_1 - \mu_4 - \lambda}_{\text{重复前 } H \text{ 个元素, 从第 } (2H^2 - H + 1) \text{ 个元素开始的 } H \text{ 个元素}}, \\ \left. \underbrace{\dots}_{\text{重复前 } H^2 \text{ 个元素}} \right\}$$

保证 P 行和为 1。

至此, 系统的状态转移阵 (1) 已具有 QBD 型马尔可夫链的标准形式, 可利用矩阵几何解的理论对其分析求解。

当 P 是正常返时, 系统稳态分布满足 $X_i = X_0 * R^i$ 。其中 R 是方程

$$R = A_0 + RA_1 + R^2A_2 \quad (2)$$

的最小非负解^[4]。

其他分布情形也可类似化成 QBD 型、M/G/1 型或 G/M/1 型马氏链。

4 系统分析

在求解矩阵方程 (2) 时, 经常假设状态转移阵是不可约的。现在考察系统是否可约, 为此有以下定理:

定理 1 缓冲区容量半无限的可重入生产系统

在RS策略作用下,状态转移阵(1)是不可约的。

证明 如果所有状态之间都是相通的,则系统是不可约的^[3]。只要证明各状态之间是可达的即可。

由 (i, j, m, n) 到 $(0, 0, 0, 0)$ 的转移概率显然大于 0。考虑从 $(0, 0, 0, 0)$ 开始的转化,看其能否转移到 (i, j, m, n) 。

$p_{(0,0,0,0),(1,0,0,0)} = \lambda$ 由各步转移的独立性,有

$$p_{(0,0,0,0),(i,0,0,0)} |_{i>0} > \lambda^i > 0$$

因为 $c_1 =$, 所以

$$p_{(0,0,0,0),(i+j+m+n,0,0,0)} > 0$$

同理得

$$p_{(i+j+m+n,0,0,0),(i+j+m,n,0,0)} > \mu_1^n$$

$$p_{(i+j+m,n,0,0),(i+j,m,0,n)} > \mu_2^n$$

$$p_{(i+j,m,0,n),(i+j,m,0,0,n)} > \mu_3^n$$

$$p_{(i+j,m,0,0,n),(i+j,m,0,n)} > \mu_1^m$$

$$p_{(i+j,m,0,n),(i+j,0,m,n)} > (0.5\mu_2)^m$$

$$p_{(i+j,0,m,n),(i,j,m,n)} > (0.5\mu_1)^j$$

于是可得 $p_{(0,0,0,0),(i,j,m,n)} > 0$ 。即所有状态之间都是相通的,所以系统(1)是不可约的。(证毕)

定理2 具有无限缓冲区容量的可重入生产系统的状态转移阵是不可约的。

证明 设一中间状态 $(0, 0, 0, 0)$, 只要证明任意状态 (i, j, m, n) 与之相通即可。

由 (i, j, m, n) 向 $(0, 0, 0, 0)$ 的转化是显然的。为简单起见,下面只要概率存在,就表示为 $p > 0$ 因为

$$p_{(0,0,0,0),(i+j+m+n,0,0,0)} > 0$$

$$p_{(i+j+m+n,0,0,0),(i+j+m+n,0,0,0)} > 0$$

$$p_{(i+j+m+n,0,0,0),(i,j,m+n,0)} > 0$$

$$p_{(i,j,m+n,0),(i,j,m,n)} > 0$$

所以 $p_{(0,0,0,0),(i,j,m,n)} > 0$ 。

由于缓冲区容量无限,所以在任何调度策略下系统都是不可约的。(证毕)

可以证明,缓冲区半无限的系统在LBFS策略作用下状态集是可约的。在计算系统稳态性能时,将系统中可约状态去掉,会使计算大大简化。但如何找到全部的可约状态,尚须进一步研究。

对不可约状态转移阵P,通过对 A_i 阵的计算,可以分析系统的稳定条件和计算系统稳态分布。具体方法见文献[4,5]。

化成非线性矩阵方程可解的形式来计算系统稳态分布,需操作的矩阵由原来的无限维的P变成了 A_i 。对缓冲区容量半无限的情形, A_i 是有限的 H^{n-1} 维(n 为缓冲区个数)。

5 举 例

对图1所示两站四缓冲区系统,来流为泊松流,加工时间服从负指数分布。设参数为 $\lambda = 1/15, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 3.5/15, H = 3$ 。根据第3节的方法建模,可写出 B_0, A_0, A_1, A_2 的表达式。由定理1可知系统状态不可约,且通过检验知

$$A (= A_0 + A_1 + A_2)$$

也是不可约的。

若用传统的排队网络方法求稳态分布

$$\begin{cases} X * P = X \\ \sum_{i=0} X_i e = 1 \end{cases} \quad (3)$$

其中 e 为全1的列向量。由于P是无穷维的,难以求解;而将P写成矩阵方程可解的形式(如(1)式),则可按下述方法求解。

假设系统是稳定的,且存在稳态分布,先用如下数值解法求解矩阵R:若 $(I - A_1)$ 非奇异,由(2)得

$$R = (A_0 + R^2 A_2) (I - A_1)^{-1} \quad (4)$$

其中I为单位阵。从 $R = 0$ 开始迭代,直至误差小于 10^{-8} 为止(精度已足够),得到(1)的最小非负解R。(4)式的迭代计算量少于(2)式^[4]。此例中迭代157次,得到的R的谱半径为 $0.8353 < 1$ (表示为 $Sp(R) < 1$),这说明P存在不变测度。于是可进行下面的计算。

将(3)式展开可得

$$\begin{cases} X_0 B_0 + \sum_{i=1} X_i A_i = X_0 \\ \sum_{i=0} X_i e = 1 \end{cases}$$

由于 $X_i = X_0 * R^i (i > 0)$,此例中 X_0 为 H^3 维的矢量,代入上式得

$$\begin{cases} X_0 (B_0 + R A_2 - I) = 0 \\ \sum_{i=0} X_0 R^i e = 1 \end{cases}$$

当 $Sp(R) < 1$ 时,可写成

$$\begin{cases} X_0 (B_0 + R A_2 - I) = 0 \\ X_0 (I - R)^{-1} e = 1 \end{cases} \quad (5)$$

可以验证,此方程中 $(B_0 + R A_2)$ 是不可约的,且 $(B_0 + R A_2 - I)$ 不可逆。解此方程得唯一解 X_0 。排队网络研究中的一个重要指标是平均队长。本例中,用 L_1, L_2, L_3, L_4 分别表示4个缓冲区的平均队长,即

$$L_1 = \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{H-1} \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{n=0}^{H-1} i * X_k$$
$$L_2 = \sum_{j=0}^{H-1} \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{n=0}^{H-1} j * X_k$$

其中, x_k 是 X 中的元素, $k = i * H^3 + j * H^2 + m * H + n_0$, L_3 与 L_4 的表达式和 L_2 类似。

采用截断误差法, 当误差小于 10^{-8} 时停止迭代, 得到

$$L_1 = 3\ 520\ 2, \quad L_2 = 0\ 861\ 3$$

$$L_3 = 0\ 782\ 9, \quad L_4 = 0\ 538\ 8$$

所得结果表明系统确实稳定。

6 结 语

本文针对一简单可重入系统, 在除第一个缓冲区外, 其余缓冲区容量均有限的情况下, 推导了系统的排队网络模型, 并求出系统的稳态解。这表明用矩阵方程理论解决可重入生产线等多级排队网络是一个有价值的研究方向。当然, 其中还存在许多问题, 如缓冲区容量均为无限时的系统求解, 如何根据系统的参数判定系统的稳定条件等。随着研究的深入, 相信这些问题都会迎刃而解。

参 考 文 献

1 Lawrence M Wein. Optimal control of a two-station

Brownian network Mathematics of Operations Research, 1990, 15(2): 215- 242

2 Dai J G. On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks: A fluid approach via fluid limit models Annals of Applied Probability, 1995, 5: 49- 77

3 劳斯 SM 著, 何声武, 等译 随机过程 北京: 中国统计出版社, 1997

4 Marcel F Neuts Matrix - geometric solutions in stochastic models The Johns Hopkins University Press, 1981

5 Gail H R, Hantler S L. Matrix - geometric invariant measures for $G/M/1$ type Markov chains Communication In statistics—Stochastic Models, 1998, 14 (3): 537- 569

作 者 简 介

赵丽娜 女, 1973 年生。1997 年在哈尔滨工程大学获自动控制专业硕士学位, 博士研究生。研究方向为半导体生产系统的调度与优化及多级排队网络的性能分析。

郑应平 男, 1941 年生。中国科学院自动化研究所研究员, 博士生导师。研究领域为复杂系统, CMS, 优化, 博弈论。

(上接第 164 页)

4 结 语

本文结合模糊逻辑系统、自适应控制及最优控制技术, 提出一种非线性未知系统的输出反馈自适应控制方法。该方法的最大特点是不需要系统状态可测的假设条件。

参 考 文 献

1 Wang Lixin. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems IEEE Trans on Fuzzy System s, 1993, 1(1): 146- 155

2 B S Chen, C H Lee, Y C Chang H Tracking design of

uncertain nonlinear SISO system s: Adaptive fuzzy approach IEEE Trans on Fuzzy System s, 1996, 4(4): 32 - 43

3 H K Khalil Adaptive output feedback control of nonlinear system s represented by input- output models IEEE Trans on Automatic Control, 1996, (2): 177- 188

4 佟绍成 一类非线性系统间接自适应输出反馈模糊控制自动化学报, 1999, 25(4): 553- 559

作 者 简 介

王 涛 女, 1965 年生。1988 年毕业于东北师范大学数学系, 现为辽宁工学院讲师, 辽宁师范大学数学系硕士研究生。研究方向为模糊逻辑。