第15卷 第1期　　控　制　与　决　策　　2000年1月
Vol 15 No. 1　　CONTROL AND DECISION　　Jan. 2000

上下层具有合作关系的两层决策问题研究*

向　丽　顾培亮
(天津大学系统工程研究所　300072)

摘　要　针对两层线性规划问题解的无效性，在决策者合作情形下，利用双准则线性规划的有关技术，提出事先不需求解问题而是采用次最优解作为参考点，直接在目标集中搜索有效满意解的方法。数值计算结果表明该方法是有效可行的。

关键词　决策分析，两层规划，次最优解，有效解
分类号　O 225

Study on Bilevel Programming with Cooperation

Xiang Li, Gu Peiliang
(Tianjin University)

Abstract　As the solution of BLP problem may not be Pareto-optimal, if the decision makers of the two levels are willing to find an efficient compromise solution, the method which can generate efficient solutions by making use of techniques of bicriteria programming is proposed. When the near-optimal solution of the BLP problem is used as the reference point for finding the efficient solution, the result can be easily found during the decision process. The simulation results show it is efficient.

Key words　decision making, bilevel programming, near-optimal solution, efficient solution

1　引　　言

两层规划(BLP)是一种具有两层递阶结构的系统优化问题，通常可作为具有多种组织结构的两层决策问题的数学模型[1]。这类问题包括一个上层决策者(UDM)和若干个下层决策者(LDM)，上、下层决策者的目标不一致，存在一定的冲突。进行决策时，UDM首先向下层宣布一个决策，LDM根据自身的利益对此做出合理的反应，UDM根据LDM的反应，对所宣布的决策进行修正，最终求得既使UDM满意，又使LDM均可接受的满意解。

两层决策问题有着广泛的应用背景，如资源分配、农田灌溉、区域规划等。线性两层规划是一类特殊的BLP问题，由于上下层的非合作性，其解有时不是有效解，即非Pareto最优解，决策者可在不减少其他决策者目标值的前提下，增加自身目标值。在具有层次关系的决策系统中，从经济角度考虑，这种非Pareto最优解是不被接受的。针对这种情况，在决策者表示愿意合作的前提下，本文充分利用双准则规划的有关技术，将线性BLP问题转化为简单的LP问题，进而求得有效的满意解。

2　具有合作关系的两层决策问题

在决策者之间允许合作且决策者愿意合作的条件下，Wen和Hsu[2]针对解的无效性，为寻求有效解而提出进行后优分析，得到基于决策者偏好的有效均衡解。但进行后优分析时，首先需要获得问题的最优解，并且由于问题本身的复杂性，后优分析的计算也较复杂[3,4]。本文提出的方法事先并不需要求解问题的最优解，而是以次最优解作为参考点，直接在目标集中搜索满意解。

2.1　有关定义及定理

双准则规划(BCP)是多准则规划(MCP)问题的一种特殊情形，它仅含有两个目标，一般描述如下

$$\max (F(x,y), f(x,y)) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\ Ax + By \le r \tag{2}$$

其中，$x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}, r \in R^m$；$A$ 为 $m \times n_1$ 矩阵，B

* 国家自然科学基金项目(79770060)
1998-09-03 收稿，1998-11-23 修回

为$m\times n_2$矩阵。有关定义和定理表述如下[5,6]:

定义1 称点x为BCP的可行点,若点$x\in S$,且$S=\{(x,y)\in R^{n_1+n_2}\mid Ax+By\le r\}$。

定义2 若可行点x^0满足$F(x)\ge F(x^0)$或$f(x)\ge f(x^0)$,则称其为BCP的有效解。

定理1 可行点x^0是有效解,当且仅当存在$\lambda\in(0,1)$,使得x^0为下列问题的最优解

$$\max\ \lambda f(x,y)+(1-\lambda)F(x,y) \tag{3}$$

$$\text{s.t.}\ Ax+By\le r \tag{4}$$

定理2 若点x^0在S约束域下是任一目标函数求极大化的唯一解,则称x^0为BCP的有效解。

定义3 设G_H和G_L分别为合作情形下UDM和LDM可接受的目标水平,即最小目标期望值,则称Γ为具有合作性BLP问题的目标函数,即有

$$\Gamma=\lambda(f-G_L)+(1-\lambda)(F-G_H)$$

此时,f,F分别为BLP问题的上、下层目标函数;$\lambda\in[0,1]$为实数,可看作权重系数;$f-G_L$和$F-G_H$分别为上、下层决策者的红利函数。显然,Γ是红利函数的线性组合。

定义4 设(x_λ,y_λ)为具有合作关系BLP问题的合作系数值,则其特征函数V为两层决策者目标函数值之和,即

$$V=F(x_\lambda,y_\lambda)+f(x_\lambda,y_\lambda)$$

显然,V表示合作后赢得的总效益值。

由此,具有合作关系的BLP问题便转化为赢得的总效益如何在合作者之间的分配问题。显然,作为一个理性合作者,并不希望所得的效益低于加盟前所得的效益。

定义5 决策者间的边际效益即是联盟成员间的红利转换。这里,红利值等于每个决策者原收益与合作后相应目标值之差,即由于合作关系而产生的额外支付。

定义6 如果边际收益存在,那么每个决策者的红利为$p=(F-G_H+f-G_L)/2$。

定义7 称满足$V=z_1+z_2$,且$z_1\ge G_H$,$z_2\ge G_L$的矢量$z(z=(z_1,z_2))$为具有合作关系BLP问题的分配。其中z_i表示第$i(i=1,2)$联盟成员的赢得效益。

注1 上述概念仅在收益用同一单位度量时才有意义。

当BLP问题的最优解有效时,采纳最优解比合作解对决策者有益。在这种情况下,由于BLP问题结构的非对称性,只有假定使UDM得到的满意度比LDM重要得多时,合作解才认为是可以采纳的。当BLP问题的最优解无效时,有两种方法可以找到具有合作性有效解:

方法1 如果收益用货币表示,但边际收益不存在,那么具有合作性有效解可由下式得到。

$$\max\ \lambda(f-G_L)+(1-\lambda)(F-G_H)\equiv$$
$$\lambda f+(1-\lambda)F \tag{5}$$
$$\text{s.t.}\ Ax+By\le r \tag{6}$$
$$F\ge G_H \tag{7}$$
$$f\ge G_L \tag{8}$$

其中$\lambda\in[0,1]$。如果λ已给定,在上述约束下使Γ极大化的解是(x,y),那么分配则为$(F(x,y),f(x,y))$。

引理1 设$S^0=\{(x,y)\mid Ax+By\le r,F\ge G_H,f\ge G_L\}$,如果由式(5)—(8)组成的问题是非退化的,则在S^0中使(F,f)极大化的有效解在S中也是有效解。

证明 设$(\overline{x},\overline{y})$是$S^0$中使$(F,f)$极大化的有效点,则有

$$F(\overline{x},\overline{y})\ge G_H,\quad f(\overline{x},\overline{y})\ge G_L$$

假设$(\overline{x},\overline{y})$不是$S$中使$(F,f)$极大化的有效点,那么存在点$(\hat{x},\hat{y})\in S$,使方程$F(\hat{x},\hat{y})\ge F(\overline{x},\overline{y})$或$f(\hat{x},\hat{y})\ge f(\overline{x},\overline{y})$成立,这蕴涵着$F(\hat{x},\hat{y})\ge G_H$和$f(\hat{x},\hat{y})\ge G_L$。由$S^0$的定义,则有$(\hat{x},\hat{y})\in S^0$。这与$(\overline{x},\overline{y})\in S^0$的有效性相矛盾,故命题成立。

方法2 如果收益用货币表示,边际收益存在,那么由下列参数规划可得到合作有效解。

$$\max\ \lambda(f-G_L)+(1-\lambda)(F-G_H)\equiv$$
$$\lambda f+(1-\lambda)F \tag{9}$$
$$\text{s.t.}\ Ax+By\le r \tag{10}$$

在这种情况下,分配为(G_H+p,G_L+p)。同时,有下述引理:

引理2 若参数规划非退化,由于边际收益的存在,仅存在唯一有效分配当且仅当λ为0.5时。

证明 令$p=(F-G_H+f-G_L)/2$,边际收益存在,分配形式为(G_H+p,G_L+p)。假设有两个有效解存在,此时$\lambda=0.5$和$\lambda=\overline{\lambda}$,相应的有效解分别为$(x_{0.5},y_{0.5})$和$(x_{\overline{\lambda}},y_{\overline{\lambda}})$。然而,$F(x_{0.5},y_{0.5})+f(x_{0.5},y_{0.5})\ge F(x_{\overline{\lambda}},y_{\overline{\lambda}})+f(x_{\overline{\lambda}},y_{\overline{\lambda}})$,于是$p_{0.5}\ge p_{\overline{\lambda}}$。这与$(x_{\overline{\lambda}},y_{\overline{\lambda}})$的有效性相矛盾,故命题成立。

2.2 目标集和合作有效解

设H_{UB},H_{LB}分别为UDM的上、下界,其中$H_{UB}=\max F$,F为上层问题的目标函数。根据文献[7]算法得到的局部最优解作为H_{LB}的值。

一般说,两层决策者目标函数最优值之间并没

有必然的联系。当UDM 的上、下界已知时, 由线性BLP 问题最优解的定义[8, 9] 可知, 最优解一定存在于UDM 的上、下界之间。因此, 在原约束域中追加由UDM 提供的两个强约束条件, 再通过求解LDM 目标函数的极大、极小值, 可得LDM 的上、下界, 即

$$\max f \tag{11}$$
$$\text{s.t.}\ Ax + By \le r \tag{12}$$
$$F \le H_{UB} \tag{13}$$
$$F \ge H_{LB} \tag{14}$$
$$\min f \tag{15}$$
$$\text{s.t.}\ Ax + By \le r \tag{16}$$
$$F \le H_{UB} \tag{17}$$
$$F \ge H_{LB} \tag{18}$$

为了得到合作有效解, 需要寻找每个决策者的次最优解, 以其作为参考点进行搜索。次最优解通过上、下界的线性组合得到。对于UDM, 没有任何迹象表明最优解是靠近上界还是下界, 因而UDM 次最优解可由上、下界简单扩充获得, 即乘以任一在 0 和 1 之间的实数, 并根据UDM 下界的来源, 认为最优解在其下界附近是合理的。对于LDM, 同样没有充分理由证明最优解是否靠近其上(下) 界, 因此可假设其次最优解在上、下界的中间。于是有

$$G_H = \theta H_{LB} + (1-\theta) H_{UB} \tag{19}$$
$$G_L = L_{UB}/2 + L_{LB}/2 \tag{20}$$

其中 θ 为任意值且 $0 \le \theta \le 1$。

上式表示每个决策者的次最优解就是在合作情形下各个决策者的最小目标期望值。显然, 当 $\theta = 1$ 时, UDM 的最优解等于其下界。

3　算　　例

以下通过一个算例来说明本文提出的算法, 算例为

$$\max F = -2x + 11y$$

且 y 解

$$\max f = -x - 3y$$
$$\text{s.t.}\ x - 2y \le 4$$
$$2x - y \le 24$$
$$3x + 4y \le 96$$
$$x + 7y \le 126$$
$$-4x + 5y \le 65$$
$$x + 4y \ge 8$$
$$x \ge 0,\quad y \ge 0$$

在约束域 S 作用下, F 最大值为 179.04, 解 $(\hat{x}, \hat{y}) = (5.3, 17.24)$。由如上解法求得 $H_{UB} = 179.04$; 再由文献[7] 算法得到局部最优解为(0, 2), 局部最优值为22, 则 $H_{LB} = 22$。求解得 $L_{UB} = -6$, $L_{LB} = -59.65$。由式(19), (20), 两层决策者的目标集为 $G_H = \theta \times (22) + (1-\theta) \times (179.04)$, $G_L = (-6)/2 + (-59.65)/2$。当 $\theta = 0.55$ 时, $G_H = 92.67$。

当边际效益不存在时, 分两种情形进行讨论:

情形 1　设 $\lambda = 0$, 即强调分配给HLDM 的效益。由式(5)—(8) 得

$$\max F = -2x + 11y$$
$$\text{s.t.}\ (x, y) \in S$$
$$-2x + 11y \ge 92.67$$
$$-x - 3y \ge -32.83$$

解为(0, 10.94), 则分配效益为(120.34, −32.82)。

情形 2　设 $\lambda = 4/5$, 即HLDM 和LLDM 的红利权重分别为 1/5 和 4/5。此时, 由式(5)—(8) 得

$$\max \frac{1}{5}(-2x + 11y) + \frac{4}{5}(-x - 3y)$$
$$\text{s.t.}\ (x, y) \in S$$
$$-2x + 11y \ge 92.67$$
$$-x - 3y \ge -32.83$$

解为(0, 8.24), 则分配效益为(92.67, −25.26)。

当边际效益存在时, 由式(9), (10) 有

$$\max \frac{1}{2}(-2x + 11y) + \frac{1}{2}(-x - 3y)$$
$$\text{s.t.}\ (x, y) \in S$$

解为(5.3, 17.24), 作为合作有效解。由定义 6, 每个决策者获得的红利为31.09, 则分配效益为(123.76, −1.74)。

原两层规划的解为(17.45, 10.91), 相应目标函数值即分配为(85.11, −50.18)。显然, 此解为非有效解, 因为上述三种情形的效益分配都优于原非合作时的分配。

4　结　　语

本文提出的方法不仅将两层规划问题转化为单层规划问题, 使问题简化, 而且事先并不需求解问题的最优解。算法简单明了, 便于计算机操作, 具有广泛的应用价值。文中同时给出了具有合作关系线性BLP 问题的有关定义及定理。对于两层非线性规划问题, 尚需做进一步研究。　(下转第 50 页)

5 结 论

理论分析和仿真实验表明, 本文提出的主动重构和容错控制方式能有效地实现对质量弹簧系统固有动态变化的重构控制和对弹簧断裂故障的容错控制。在重构和容错的情况下, 保证了系统的稳定性以及速度和位移的跟踪性能要求, 且重构和容错控制速度快。本文未考虑切换中的抖振和检测中的鲁棒性问题, 这将在以后的文章中做专题讨论。

参 考 文 献

1 Spiridon A Reveliotis, Mieczyslaw M Kolar. A framework for on-line learning of plant models and control policies for restructurable control. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1995, 25(11): 1502_ 1512

2 Robert F Stengel. Intelligent failure-tolerant control. IEEE Control Systems, 1991, 11(4): 14_ 23

3 Robert J Veillette. Reliable linear-quadratic state-feedback control. Automatica, 1995, 31(1): 137_ 143

4 Chang-Jun Seo, Byung Kook Kim. Design of robust reliable H^{∞} output feedback control for a class of uncertain linear systems with sensor failure. Int J of System Science, 1996, 27(10): 963_ 968

5 Jay Farrell, Torsten Berger, Brent Appleby. Using learning techniques to accommodate unanticipated faults. IEEE Control Systems, 1993, June: 16_ 24

6 Herbert E Rauch. Intelligent fault diagnosis and control reconfiguration. IEEE Control Systems, 1994, June: 26_ 32

7 周东华, 王庆林. 一种非线性系统容错控制的混合方法. 控制与决策, 1997, 12(2): 167—170

8 Kumpati S Narendra, Jeyendran Balakrishnan. Adaptive control using multiple models. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(2): 171_ 187

9 N Dhayagude, Zhiqiang Gao. Novel approach to reconfigurable control systems design. J Guidance, 1996, 119(4): 963_ 967

10 董选明. 鲁棒故障诊断及其在液压伺服系统中的应用研究. 北京航空航天大学博士学位论文, 1997

作 者 简 介

董选明 男, 1963年生。1997年于北京航空航天大学获工学博士学位, 现为中国科学院自动化研究所博士后。主要研究方向为复杂系统状态监测与故障诊断, 智能容错重构控制等。

谭 民 男, 1962年生。中国科学院自动化研究所研究员, 博士生导师。主要研究方向为机器人的可靠性, 复杂系统控制理论及应用等。

(上接第45页)

参 考 文 献

1 唐大宏, 陈珽. 多层决策问题算法的综述. 控制与决策, 1989, 4(1): 49—56

2 Wen U P, Hsu S T. Efficient solutions for the linear bi-level programming problem. European J of Operational Research, 1992, 62: 354_ 362

3 Bard J F. Technical note: Some properties of the bi-level programming problem. J of Optimization Theory and Applications, 1981, 68: 371_ 378

4 Wen U P, Hsu S T. Linear bi-level programming problems——A review. Operational Research Society, 1991, 42: 125_ 133

5 Steuer R E. Multiple criteria optimization: Theory, computation and application. New York: John Wiely & Sons, 1986

6 Zeleny M. Multiple criteria decision making. New York: McGraw-Hill, 1982

7 Bialas W F, Karwan M H. Two-level linear programming. Management Science, 1984, 30: 1044_ 1020

8 Bialas W F, Karwan M H. On two-level optimization. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27: 211_ 214

9 Wen U P, Hsu S T. A note on bi-level programming algorithm based on bi-criterion programming. Computer and Operations Research, 1989, 16: 79_ 83

作 者 简 介

向 丽 女, 1972年生。天津大学系统工程研究所博士生。主要研究方向为决策理论及方法, 可持续发展等。

顾培亮 男, 1935年生。天津大学系统工程研究所教授, 博士生导师。主要从事大系统理论, 系统决策理论及方法, 可持续发展等方面的研究。