第15卷第1期　　控 制 与 决 策　　2000年1月
Vol 15 No. 1　　CONTROL AND DECISION　　Jan. 2000

单机模糊加工时间下最迟开工时间调度问题*

王成尧　汪定伟
(东北大学信息科学与工程学院　沈阳　110005)

摘　要　研究单机模糊加工时间下确定最迟开工时间的调度问题。目标是在满足每个工作都以大于等于各自指定的隶属度属于完工集合的约束下，寻找工作的最大最迟开工时间。通过模糊数学知识对模型进行分析，对于特殊情况给出了问题的最优解，对于一般情况给出了一个最优解的必要条件。

关键词　模糊加工时间，最迟开工时间，隶属函数，调度
分类号　TP 273

Single Machine Ready Time Scheduling with Fuzzy Processing Time

Wang Chengyao, Wang Dingwei
(Northeastern University)

Abstract　A scheduling problem on the single machine with fuzzy processing time is studied. The objective is to obtain maximize the ready time of the scheme as late as possibility within the constraint that the grade of each jobs in the completion set is not less than a given value respectively. Through analyzing the model by applying fuzzy mathematics extension principles and the properties of jobs with fuzzy processing times, the optimal solutions of the problem are presented under some special cases, and a necessary condition of optimal solution is given under the general case.

Key words　fuzzy processing time, ready time, membership function, scheduling problems

1 引　言

70年代，模糊数学规划[1,2]引入调度领域，产生了调度领域的新分支——模糊调度。在生产中，由于各种因素的影响，使得工作特别是新工作的加工时间变成一个模糊的量。人们根据以往的经验，对工作的加工时间进行估计，一般都给出一个范围。当工作的加工时间等于小于某一值时，工作是无法完工的；当工作的加工时间大于等于某一值时，工作是可以完工的。工作的加工时间就在这个范围内变化。对于这样的工作集合，我们建立模糊加工时间的隶属函数。对工作 j 的一段加工时间 x ($x \in [a_j, b_j]$) 与工作 j 在这段时间下属于完工集合的程度(隶属度 $\alpha \in [0, 1]$) 之间，建立一种映射关系——隶属函数 $\mu_j(x)$，则 $\mu_j(x)$ 表示该工作 j 在加工时间 x 下属于完工集合的隶属度。在假设隶属函数是单调递增的条件下，建立隶属函数的反函数。根据模糊加法，可证明多个工作的隶属函数迭加所得的联合隶属函数仍是单调递增的，其联合隶属函数也存在着反函数[3,4]。

本文研究单机模糊加工时间的调度模型，在满足每个工作都以大于等于指定的隶属度属于完工集合的约束下，寻求工作的最大最迟开工时间。文中建立了模糊加工时间下最迟开工时间的调度模型，给出并证明了模型在特殊情况下的最优解和一般情况下最优解的必要条件。最后以一个具体实例加以说明。

* 国家自然科学基金项目(69684005)和灿坤电器实业股份有限公司项目
1998-10-30收稿，1999-01-12修回

2　模型描述

2.1　确定加工时间的调度模型

单机最大最迟开工时间调度模型是考虑n个工作要在一台机器上进行加工，每个工作都有一个指定的交货期和确定的加工时间。如果以当前时刻作为机台的开工时刻，则至少存在一个调度方案，使得加工的所有工作都不拖期。目标是寻找一个调度方案，在所有工作都不拖期的情况下，使得机台的开工时刻最晚。

该模型的意义是在保证所有工作都不拖期的情况下，最大化开工时刻就是最小化制造周期(makespan)。在增加工作准备时间的同时，减少产品的库存量，有利于提高经济效益。这种模型用于机台能力盈余的情况，例如注塑企业在冬季(订货淡季)即采用这样的生产策略。

模型的数学描述如下

$$\begin{cases} r = \max\{r_k \mid k = 1, 2, \cdots, n!\} \\ \text{s.t. } r_{i[k]} = d_{i[k]} - \sum_{j=1}^{i} p_{j[k]}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ \quad r_k = \min\{r_{i[k]}, i = 1, 2, \cdots, n\} \end{cases} \tag{1}$$

其中，r：所有调度方案的最迟开工时间；r_k：调度方案k的最迟开工时间；$r_{i[k]}$：调度方案k中排在第i位置的工作的最迟开工时间；$d_{i[k]}$和$p_{i[k]}$：调度方案k中排在第i位置的工作所指定的交货期和对应的加工时间。

当加工时间确定时，该调度问题存在最优解，即以交货期递增的顺序(EDD)得到的调度方案是最优的。

2.2　模糊加工时间的模型描述

当加工时间模糊时，用机会约束规划模型描述如下：对于一个模糊加工时间的工作集合，每个工作客户都赋予一个指定的交货期，目标是在保证每个工作都以大于等于指定的隶属度属于完工集合的约束下，使得机器的开工时间最晚。其数学模型为

$$\begin{cases} r = \max\{r_k, k = 1, 2, \cdots, n!\} \\ \text{s.t. } \mu_{[i,k]}(d_{i[k]} - r_{i[k]}) \geq \alpha_{i[k]}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ \quad r_k = \min\{r_{i[k]}, \quad i = 1, 2, \cdots, n\} \end{cases} \tag{2}$$

其中，$\alpha_{i[k]}$：调度方案k中排在第i位置的工作所指定的隶属度；$\mu_{i[k]}(x)$：调度方案k中排在第i位置的工作所给出的隶属函数；$\mu_{[i,k]}(x)$：调度方案k中前i个工作相迭加的联合隶属函数；$\mu^{-1}_{[i,k]}(\alpha_{i[k]})$：调度方案$k$中前$i$个工作相迭加的联合隶属函数在隶属度$\alpha_{i[k]}$下所对应的加工时间；$\mu^{-1}_{i[k]}(\alpha_{i[k]})$：调度方案$k$中第$i$位置的工作给出的隶属函数隶属度$\alpha_{i[k]}$下所对应的加工时间。

根据模糊加法[6]和联合隶属函数是单调递增的[3]，对(2)式求解，得

$$r_{i[k]} \leq d_{i[k]} - \sum_{j=1}^{i} \mu^{-1}_{j[k]}(\alpha_{i[k]}) \tag{3}$$

显然，(3)式取等号时$r_{i[k]}$最大，对应的最小的r_k最大，因此最大的r由上式取等号时求得。于是原模型的数学表达式可化为

$$\begin{cases} r = \max\{r_k, k = 1, 2, \cdots, n!\} \\ \text{s.t. } r_{i[k]} = d_{i[k]} - \sum_{j=1}^{i} \mu^{-1}_{j[k]}(\alpha_{i[k]}) \\ \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ \quad r_k = \min\{r_{i[k]}, i = 1, 2, \cdots, n\} \end{cases} \tag{4}$$

定义1　在调度方案k中，取得$r_k = r_{i[k]}$的方程称为该调度方案的约束方程，其对应的工作称为该调度方案的约束工作。约束工作对应的最迟开工时间就是该调度方案的最迟开工时间。

定义2(γ和σ调度方案)　两个调度方案除相邻工作i和j排列不同外，其余工作的排列顺序均相同。在σ调度方案中，工作i和工作j分别排在N和$N+1$位置上；在γ调度方案中，工作i和工作j分别排在$N+1$和N位置上。其中$N = 1, 2, \cdots, n-1$。

3　模型求解

求解模型，可以寻找每个调度方案的约束方程，然后对所有调度方案进行比较，求得最迟开工时间。这样的计算量很大($n \times n!$)，对于小规模的工作集合，可用这种方法求得其最优解；对于大规模的工作集合，则该方法一般是不可行的。

下面针对一些特殊情况，给出优序定理和一个一般情况下的优序必要条件，以减少求解方程的个数。

3.1　相同交货期和相同隶属度

每个工作i要求属于完工集合的隶属度α都相同，并且每个工作所对应的指定交货期d也相同。在这种情况下，对于任一调度方案k，都有$r_{1[k]} \geq r_{2[k]} \geq \cdots \geq r_{n[k]}$；对于每个调度方案，其约束方程都是最后一个方程。无论怎样排列，n个工作的联合隶属函数都相同，并且交货期和隶属度也相同，则每个调度方案的最小开工时间都是相同的。即

$$r = d - \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}(\alpha) \tag{5}$$

3.2 不同交货期和相同隶属度

在这种情况下, 每个工作 i 都有一个确定的交货期 d_i, 对每个工作都要求以相同的隶属度 α 属于完工集合, 寻找最优的调度方案, 使得最迟开工时间最大。

定理 1　对于不同交货期和相同隶属度的 n 个工作, 按交货期由小到大的顺序进行排列, 得到的调度方案是一个最优调度方案。

证明　假设工作 i 和工作 j 的交货期关系为 $d_i \le d_j$。在 γ 和 σ 调度方案中, 除了工作 i 和工作 j 的排列不同外, 其余工作的排列顺序均相同, 因此这些工作所对应的最迟开工时间对应相等。比较工作 i 和工作 j 在 γ 和 σ 调度方案中所对应的最迟开工时间:

在 γ 调度方案中

$$r_{j[\gamma]} = d_j - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_{k[\gamma]}^{-1}(\alpha) - \mu_j^{-1}(\alpha) \tag{6}$$

$$r_{i[\gamma]} = d_i - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_{k[\gamma]}^{-1}(\alpha) - \mu_j^{-1}(\alpha) - \mu_i^{-1}(\alpha) \tag{7}$$

由于 $d_i \le d_j$, $\mu_i^{-1}(\alpha)$ 表示一段加工时间为非负数, 则有 $r_{i[\gamma]} \le r_{j[\gamma]}$。所以在 γ 调度方案中, 工作 i 可能是约束工作, 而工作 j 不可能是约束工作。

在 σ 调度方案中

$$r_{i[\sigma]} = d_i - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_{k[\sigma]}^{-1}(\alpha) - \mu_i^{-1}(\alpha) \tag{8}$$

$$r_{j[\sigma]} = d_j - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_{k[\sigma]}^{-1}(\alpha) - \mu_i^{-1}(\alpha) - \mu_j^{-1}(\alpha) \tag{9}$$

将以上二式与 $r_{i[\gamma]}$ 比较, 显然有 $r_{i[\gamma]} \le \min\{r_{i[\sigma]}, r_{j[\sigma]}\}$。由于其余工作所对应的最迟开工时间均相同, 所以从 γ 调度方案变换到 σ 调度方案只能加大最迟开工时间。重复这样的交换, 最后得到一个以交货期递增为顺序的最优调度方案。定理得证。

3.3 不同隶属度和相同交货期

这种情况是指在工作集合中所有的工作所对应的交货期都相同, 而每个工作所赋予属于完工集合的隶属度 α_i 不相同, 在每个工作都以大于等于各自指定的隶属度属于完工集合的约束下, 寻找最迟开工时间。

定理 2　在不同隶属度和相同交货期的情况下, 按指定的隶属度递减的顺序排列, 得到的调度方案是最优调度方案。

证明略。

3.4 不同隶属度和不同交货期

对于一般情况, 通常不易直接找到最优调度方案, 但对下面的特殊情况, 可判断出该调度方案是最优调度方案。

定理 3　在工作要求的交货期和隶属度不同的情况下, 如果按交货期递增顺序所得到的调度方案与按隶属度递减顺序所得到的调度方案相同, 则该调度方案是一个最优调度方案。

证明　对于一个工作集合, 按上述方法排列得到一个 η 调度方案。该调度方案中任意两个工作 i 和 j, 不妨设工作 i 排在工作 j 之前, 工作 i 排在第 N 位置, 工作 j 排在第 M 位置 $(N < M)$。则有 $d_i \le d_j$, $\alpha_i \ge \alpha_j$。交换工作 i 和 j 的位置, 得到一个新的调度方案, 记为 ξ。由于这两个调度方案只是交换了工作 i 和 j 的位置, 所以对于排在 N 位置以前的工作和排在 M 位置以后的工作, 其最迟开工时间是相同的。比较两个调度方案中从 N 位置到 M 位置之间工作的最迟开工时间:

在 ξ 调度方案中, 考虑 N 位置到 $M-1$ 位置上的任一工作 h, 由于 $d_h \le d_i$, $\alpha_h \ge \alpha_i$, 并且它所对应的联合隶属函数只是工作 i 所对应的联合隶属函数的一部分, 所以其最迟开工时间应大于工作 i 的最迟开工时间。因此在这些工作中, 只有工作 i 可能是约束工作, 而其他工作不可能是约束工作。工作 i 所对应的最迟开工时间为

$$r_{M[\xi]} = d_i - \sum_{k=1}^{M-1} \mu_{k[\xi]}^{-1}(\alpha_i) - \mu_i^{-1}(\alpha_i) \tag{10}$$

在 η 调度方案中, 排在 N 位置到 M 位置上工作的最迟开工时间都大于工作 i 在 ξ 调度方案的最迟开工时间, 因此 η 调度方案的最迟开工时间一定大于等于 ξ 调度方案的最迟开工时间。由于工作 i 和 j 是 η 调度方案中的任意两个工作, 所以此调度方案是一个最优调度方案。定理得证。

如果按上述方法得到的调度方案不相同, 则一般无法直接得到最优解, 但可通过下面的最优解必要条件定理来减少可能的优序排列数目。

定理 4　对于两个相邻工作 i 和 j, 如果存在 $d_i \le d_j$, $\alpha_i \ge \alpha_j$, 则工作 j 应先于工作 i 进行加工。

证明略。

一般情况下, 对于小规模问题, 结合上述定理并运用隐枚举法, 可在较短的计算时间内求得问题的最优解。对于大规模问题, 可运用遗传算法、禁忌搜索等智能化算法或带有规则的启发式算法, 求解问

题的近优解或可接受解。

4 计算举例

某车间欲加工4种革新产品a, b, c, d, 根据以往的加工经验估计其加工时间分别在闭区间[6, 8], [6, 7], [6, 9], [7, 8]上模糊变化, 并且闭区间上的隶属函数都是线形的。则工作a, b, c, d的隶属函数分别为

$$\mu_a(x) = \begin{cases} 0, & x < 6 \\ \dfrac{x-6}{2}, & 6 \le x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$$

$$\mu_b(x) = \begin{cases} 0, & x < 6 \\ \dfrac{x-6}{1}, & 6 \le x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 0, & x < 6 \\ \dfrac{x-6}{3}, & 6 \le x \le 9 \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$

$$\mu_d(x) = \begin{cases} 0, & x < 7 \\ \dfrac{x-7}{1}, & 7 \le x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$$

1) 若已知工作a, b, c, d的交货期分别为45, 42, 46, 40, 且要求所有工作属于完工集合的隶属度都大于等于0.5。目标是寻求最优的调度方案, 使得最迟开工时间最大。

解 根据定理1, 得到最优调度方案的顺序为d, b, a, c, 最迟开工时间为 $r = 17.5$。

2) 若要求工作a, b, c, d分别以0.5, 0.6, 0.7, 0.8的隶属度属于完工集合, 并且所有工作的交货期都是40。目标是寻求最优的调度方案, 使得最迟开工时间最大。

解 根据定理2, 得到最优调度方案的顺序为d, c, b, a, 最迟开工时间为 $r = 11.5$。

3) 若要求工作a, b, c, d分别以0.5, 0.6, 0.7, 0.8的隶属度属于完工集合, 并且它们的交货期分别为45, 42, 46, 40。目标是寻求最优的调度方案, 使得最迟开工时间最大。

解 若直接运用枚举法, 要求解 $4! = 24$ 个排列, 但根据定理4, 可判断出最优的调度方案只能是以下3种排列: d, b, c, a; d, b, a, c 和 d, c, b, a。分别计算3个排列的最迟开工时间, 得到第1和第3排列可以是最优的调度方案, 对应的最迟开工时间为 $r = 16.5$。

5 结 语

本文研究单机模糊加工时间下关于最迟开工时间的调度模型问题, 给出了模型的数学表达式, 对于几种特殊情况给出求解最优解的定理, 对于一般情况给出一个最优解的必要条件定理, 并对这些定理进行了证明。最后通过一个实际例子, 对定理的应用做了解释。

参 考 文 献

1 Zimmermann H J. Description and optimization of fuzzy systems. Int J General Systems, 1976, (2): 209—215

2 Tanaka H, Okuda T, Asai K. On fuzzy mathematical programming. J of Cybernetic, 1974, 3(1): 37_46

3 王成尧, 汪定伟. 模糊加工时间单机调度问题. 见: 1996中国控制与决策学术年会论文集. 沈阳: 东北大学出版社, 1996. 763_769

4 王成尧, 高麟, 汪定伟. 模糊加工时间单机E/T调度问题的GA算法. 控制与决策, 1998, 13(增): 418—422

5 方述诚, 汪定伟. 模糊数学与模糊优化. 北京: 科学出版社. 1997

作 者 简 介

王成尧 男, 1969年生。东北大学信息科学与工程学院博士生。研究方向为模糊优化, 智能优化, 生产计划与调度理论。

汪定伟 男, 1948年生。东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师。研究方向为生产计划与调度理论, 建模与决策, 智能优化方法。