

# 典型模糊控制器的解析表达式 及其系统化设计方法\*

李 宁 张乃尧

(清华大学自动化系 北京 100084)

**摘 要** 对两输入一输出的典型模糊控制器推导了其解析表达式, 并对输入变量各取 5 个模糊子集的情况进行分析。提出一种设计模糊控制器的系统化方法, 它能保证模糊控制器的性能在工作点附近等效于 PI 控制器, 而在远离工作点时明显优于 PI 控制器。仿真实验结果验证了该方法的有效性。

**关键词** 模糊控制, 结构分析, 系统化设计

**分类号** TP 273

## Analytical Expression and Systematic Design Method of Typical Fuzzy Controllers

Li Ning, Zhang Naiyao

(Tsinghua University)

**Abstract** The structure analysis and systematic design method of the typical two- input one- output fuzzy controllers are presented. The output expression of the fuzzy controller with five fuzzy sets for each input variables are given. Then a systematic design method based on the existing PI/PD controllers is proposed. The simulation of a nonlinear system shows that the fuzzy controller produced by this method gives the same performance as that of the PI/PD controllers near the equilibrium state and does much better in the large range.

**Key words** fuzzy control, structure analysis, systematic design

### 1 引 言

由于模糊控制的数学机理非常复杂, 并且缺少系统化的分析和设计方法, 因此限制了模糊控制的推广应用。Siler<sup>[1]</sup>, Ying<sup>[2]</sup>和 Buckley<sup>[3]</sup>等从数学上探索了模糊控制的本质, Ying 对模糊控制器的分析结构和极限结构进行了综合研究<sup>[4]</sup>, 提出一种模糊控制器的设计方法<sup>[5]</sup>。

作者从 1996 年起开始这方面研究。文献[6]用统一的形式总结了典型模糊控制器结构分析的主要研究成果; [7]对采用 4 种不同推理方法的典型模糊控制器推导了其解析表达式, 证明采用 Sum - Product 推理方法时模糊控制器的解析式最为简洁。

本文继续这一研究方向, 在输入变量各取 5 个模糊子集且隶属函数不均匀分布时, 给出了典型模糊控制器的输出表达式; 在此基础上提出一种模糊控制的系统化设计方法。

### 2 典型模糊控制器的解析表达式

典型模糊控制系统的结构如图 1 所示。其中, FC 代表模糊控制器, P 代表被控对象;  $s_r$  为参考输入,  $e_t$  为误差,  $u_t$  为控制变量,  $y_t$  为输出;  $e^*$ ,  $r^*$ ,  $\Delta u^*$  为归一量,  $G_e$ ,  $G_r$ ,  $C_u$  为比例因子。

本文所研究的典型模糊控制器, 对其设计参数做如下规定:

1) 输入变量  $e^*$ ,  $r^*$  均采用三角形、全交迭、不均匀分布、关于纵轴对称的隶属函数, 如图 2 所示; 输出变量  $\Delta u^*$  采用均匀分布的单点隶属函数, 如图 3 所示。

\* 国家自然科学基金项目 (69774015)

1999- 01- 25 收稿, 1999- 05- 05 修回

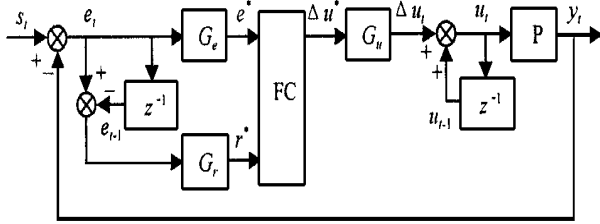


图1 典型模糊控制系统结构

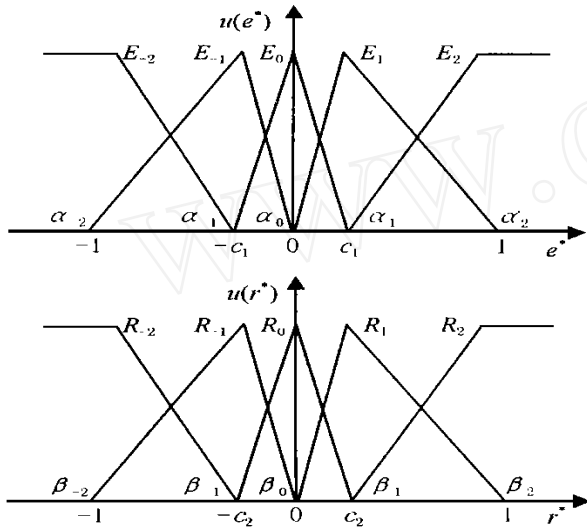


图2 三角形全交迭、不均匀分布的隶属函数  
\$J = 2, N = 5\$

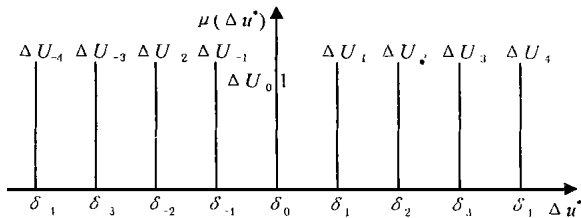


图3 均匀分布的单点隶属函数  
\$J = 2, N = 5, V = 1/4\$

设模糊控制器输入变量 \$e^\*, r^\*\$ 均取 \$N = 2J + 1\$ 个模糊数，其中一个为零，\$J\$ 个为正，\$J\$ 个为负，分别用 \$E\_i\$ 和 \$R\_j\$ 表示，\$i, j = -J, -J + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, J - 1, J\$，这些模糊数的中心分别为 \$\alpha\$ 和 \$\beta\_0\$。设输出变量 \$\Delta u^\*\$ 取 \$2N - 1 = 4J + 1\$ 个模糊数（为了满足线性控制规则），用 \$\Delta U\_k\$ 表示，\$k = -2J, -2J + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2J - 1, 2J\$。令 \$V = 1/2J\$，则 \$\Delta U\_k\$ 的中心为 \$\delta\_k = kV\$。

2) 采用线性模糊控制规则。共有 \$N^2\$ 条模糊控制规则，其一般形式为

If \$e^\*\$ is \$E\_i\$ and \$r^\*\$ is \$R\_j\$ Then \$\Delta u^\*\$ is \$\Delta U\_k\$  
线性控制规则是指 \$i, j, k\$ 之间有线性关系：\$k =

\$i + j\$。

3) 采用 Sum - Product 模糊推理方法，其中算子的定义如下：

Sum (有界和): \$x \oplus y = \min\{1, x + y\}\$

Product (算术积): \$x \times y = xy\$

4) 清晰化采用重心法。

定理 1 典型模糊控制器的解析结构是全局二维多值继电器与局部线性 PI 控制器之和，即

$$\Delta u^* = \Phi_E(i, j) + \Phi(i, j) \tag{1}$$

其中

$$\Phi_E(i, j) = \frac{i + j + 1}{N - 1} \tag{2}$$

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{N - 1} \times \left[ \frac{e^* - \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_i)}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} + \frac{r^* - \frac{1}{2}(\beta_{j+1} + \beta_j)}{\beta_{j+1} - \beta_j} \right] \tag{3}$$

证明参见文献 [7]。

由此可见，\$\Delta u^\*\$ 由两部分组成：一部分是取决于 \$i, j\$ 的全局二维多值继电器 \$\Phi\_E(i, j)\$；另一部分是局部的 PI 控制器 \$\Phi(i, j)\$，它取决于输入状态 \$(e^\*, r^\*)\$ 与其所在区域中心 \$\left[ \frac{1}{2}(\alpha + \alpha\_{i+1}), \frac{1}{2}(\beta\_j + \beta\_{j+1}) \right]\$ 的相对位置。仿照 PI 控制器的形式，有

$$\Phi(i, j) = K_i(e^*, r^*) \left[ e^* - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_{i+1}) \right] + K_p(e^*, r^*) \left[ r^* - \frac{1}{2}(\beta_j + \beta_{j+1}) \right] \tag{4}$$

其中放大倍数

$$K_i(e^*, r^*) = \frac{V}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$$

$$K_p(e^*, r^*) = \frac{V}{\beta_{j+1} - \beta_j}$$

$$V = 1/2J$$

显然，\$K\_i(e^\*, r^\*)\$ 和 \$K\_p(e^\*, r^\*)\$ 在区间 \$[\alpha, \alpha\_{i+1}]\$ 和 \$[\beta\_j, \beta\_{j+1}]\$ 上是常数，因此 \$\Phi(i, j)\$ 是局部的线性 PI 控制器。

对于最常用的输入变量各取 5 个模糊数的情况，即 \$N = 2J + 1 = 5\$，设 \$\alpha\_{-1} < e^\* < \alpha\_0, \beta\_{-1} < r^\* < \beta\_0\$，\$i, j = -1, 0, 1\$。\$\Delta u^\*\$ 的解析表达式比较简单，列于表 1。其中 \$c\_1\$ 和 \$c\_2\$ 分别代表 \$e^\*\$ 和 \$r^\*\$ 隶属函数中 \$E\_1\$ 和 \$R\_1\$ 的中心位置。

### 3 模糊控制系统的一种系统化设计方法

对于本文所研究的典型模糊控制器, 当  $N = 5$  时(即模糊控制器输入变量  $e^*, r^*$  各取 5 个模糊数), 其设计参数只有 5 个: 比例因子  $G_e, G_r, G_u$  和输入隶属函数的可调参数  $c_1, c_2$ , 便于实际应用。当控制器输出为  $\Delta u^*$  时, 为 PI 型; 当输出为  $u^*$  时, 为 PD 型。其输出表达式类似。在平衡位置 ( $e^*, r^* = 0$ ) 附近, PI 型典型模糊控制器等效于一个线性 PI 控制器, 其参数对应关系为

$$K_p = \frac{G_e G_u}{4c_2}, \quad K_i = \frac{G_e G_u}{4c_1} \quad (5)$$

对于 PD 型控制器, 则有

$$K_p = \frac{G_e G_u}{4c_1}, \quad K_d = \frac{G_r G_u}{4c_2} \quad (6)$$

利用这种对应关系, 可得出一种简单的模糊控制系统的系统化设计方法, 其主要步骤如下:

Step 1: 对一般的非线性被控对象模型, 将其在平衡点附近线性化, 对线性化模型设计 PI/PD 控制器; 也可在平衡点附近利用工程整定法直接确定 PI/PD 控制器参数。

Step 2: 根据  $e, r, u$  的变化范围, 初步确定比例因子  $G_e, G_r, G_u$  的值。

Step 3: 根据已有的 PI/PD 控制器参数, 求出  $c_1$  和  $c_2$ 。

Step 4: 根据仿真或实验结果调整各参数, 主要是调整  $c_1$  和  $c_2$ 。

用这种方法设计出的模糊控制器, 既能在平衡位置附近等效于线性 PI/PD 控制器, 又能适应非线性的大范围工作区域, 可以发挥模糊控制工作范围宽、鲁棒性强等优势。

### 4 仿真实验

给定的非线性对象如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - 0.1x_2 + \sin x_1 \cos x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

控制要求是使系统从任一初始状态  $x_0 = [x_{10} \ x_{20}]^T$  回到平衡点(原点), 控制量限制为  $u \in [-10 \ 10]$ 。在平衡点(0, 0)附近, 有  $\sin x_1 \approx x_1, \cos x_2 \approx 1, -x_1^3$  项可忽略。则原系统可近似线性化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 0.1x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

对此线性系统采用形如  $K_p + K_d s$  的 PD 控制器, 参数整定为  $K_p = 250, K_d = 20$ 。按上述方法得到模糊控制器的参数为:  $G_e = 10, G_r = 0.8, G_u = |u_{\max}| = 10, c_1 = c_2 = 0.1$ 。仿真实验中采样时间为 0.02s, 仿真时间 10s, 定义指标函数为  $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} e_i^2 dt$ 。

表 1  $N = 5$  时典型模糊控制器输出  $\Delta u^*$  的解析式

$j$	- 2	- 1, 0	1
- 2	$-1 + \frac{e^* + 1}{4(1 - c_1)} + \frac{r^* + 1}{4(1 - c_2)}$	$-\frac{1}{2} + \frac{e^*}{4c_1} + \frac{r^* + 1}{4(1 - c_2)}$	$\frac{e^* - 1}{4(1 - c_1)} + \frac{r^* + 1}{4(1 - c_2)}$
$i$ - 1, 0	$-\frac{1}{2} + \frac{e^* + 1}{4(1 - c_1)} + \frac{r^*}{4c_2}$	$\frac{e^*}{4c_1} + \frac{r^*}{4c_2}$	$\frac{1}{2} + \frac{e^* - 1}{4(1 - c_1)} + \frac{r^*}{4c_2}$
1	$\frac{e^* + 1}{4(1 - c_1)} + \frac{r^* - 1}{4(1 - c_2)}$	$\frac{1}{2} + \frac{e^*}{4c_1} + \frac{r^* - 1}{4(1 - c_2)}$	$1 + \frac{e^* - 1}{4(1 - c_1)} + \frac{r^* - 1}{4(1 - c_2)}$

表 2 PD 控制器和模糊控制器的性能比较

$x_0^T$	$J_1$ (PD 控制器)	$J_2$ (模糊控制器)	$\frac{J_2 - J_1}{J_1} \times 100\%$
(0.01, 0.01)	$1.8016 \times 10^{-4}$	$1.8016 \times 10^{-4}$	0.00%
(0.02, 0.02)	$7.2062 \times 10^{-4}$	$7.2062 \times 10^{-4}$	0.00%
(0.2, 0.2)	$1.4316 \times 10^{-1}$	$2.6157 \times 10^{-1}$	45.27%
(2.0, 2.0)	$7.4040 \times 10^1$	$6.0871 \times 10^1$	- 17.79%
(4.0, 4.0)	$5.4064 \times 10^2$	$3.2402 \times 10^2$	- 40.07%
(6.0, 6.0)	$1.8038 \times 10^3$	$1.2123 \times 10^3$	- 32.79%
(8.0, 8.0)	$3.8098 \times 10^3$	$3.1295 \times 10^3$	- 17.86%
(10.0, 10.0)	$6.3862 \times 10^3$	$6.1465 \times 10^3$	- 3.75%

对不同的初值  $x_0$ , 比较采用 PD 控制器和模糊控制器两种情况下的指标函数, 结果列于表 2。

从以上结果可以看出,  $x_0$  在平衡位置附近时, 模糊控制器与 PD 控制器的性能相似; 随着  $x_0$  远离平衡位置, 系统进入非线性区域后, 模糊控制器的性能明显优于 PD 控制器。

### 5 结 论

本文对两输入 ( $e, \Delta e$ ) 一输出 ( $\Delta u$ ) 的典型模糊控制器, 采用 Sum - Product 推理方法、线性控制规则以及重心法解模糊, 证明了典型模糊控制器的结构是由全局性的二维多值继电器与局部的线性 PI 控制器所组成; 对最常用的输入变量各取 5 个模糊数的情况推导了输出的解析表达式, 并提出一种简单的模糊控制器的系统化设计方法。仿真实验结果表明, 所提出的系统化设计方法非常简单, 设计参数少, 控制效果好, 便于实际应用。

### 参 考 文 献

- 1 Siler W, Ying H. Fuzzy control theory: The linear case Fuzzy Sets and System s, 1989, 33: 275\_ 290
- 2 Ying H, Siler W, Buckley J J. Fuzzy control theory: A

- nonlinear case Automatica, 1990, 26(3): 513\_ 520
- 3 Buckley J J, Ying H. Fuzzy controller theory: L in it theorems for linear fuzzy control rules Automatica, 1989, 25(3): 469\_ 472
- 4 Ying H. A nonlinear fuzzy controller w ith linear control rules is the sum of a global two- dimensional multilevel relay and a local nonlinear proportional- integral controller Automatica, 1993, 29(2): 499\_ 505
- 5 Ying H. Practical design of nonlinear fuzzy controllers w ith stability analysis for regulating processes w ith unknown mathematical models Automatica, 1994, 30(7): 1185\_ 1195
- 6 张乃尧. 典型模糊控制器的结构分析. 模糊系统与数学, 1997, 11(2): 10—21
- 7 李宁, 张乃尧. 采用不同模糊推理方法时典型模糊控制器的结构分析. 模糊系统与数学, 1998, 12(3): 85—92

### 作 者 简 介

李 宁 男, 1974 年生. 清华大学自动化系硕士生. 研究方向为模糊控制器的结构分析, 模糊自适应控制等。

张乃尧 男, 1946 年生. 1970 年毕业于清华大学电机系, 现为该校自动化系教授. 研究方向为模糊控制理论, 模糊神经网络等。

## 下 期 要 目

解析模糊控制理论: 模糊控制系统的结构和稳定性分析.....	丁永生 等
智能控制的新进展 (II) .....	李少远 等
广义分布参数扰动系统滑动模态控制 .....	杨建辉 刘永清
柔性臂振动系统角速度反馈控制的最优指数衰减率问题 .....	于景元 等
不确定系统的滚动时域 $H$ 控制设计 .....	耿晓军 席裕庚
一类非线性系统的间接自适应输出反馈模糊控制 .....	王 涛
RBF 神经网络的递阶遗传训练新方法 .....	郑丕谔 马艳华
广义模糊推理与广义模糊 RBF 神经网络.....	鲍 鸿 等
开环可重入生产系统的排队网络模型及求解算法 .....	赵丽娜 郑应平
多传感器多目标检测中的数据关联 .....	朱 嘉 等
一种动态多目标决策模型及其应用 .....	戴文战
一类提取模糊规则的新方法及其在干燥建模中的应用 .....	吴 涛 许晓鸣
循环神经网络建模在非线形预测控制中的应用 .....	古 勇 等
考虑有界噪声的摄像机内部参数标定方法 .....	岳占峰 王书宁
典型工业过程的无超调预测控制设计 .....	孙明玮 等

