基于LMI可行解的所有状态反馈H_∞控制器*

曾建平 程 鹏
(北京航空航天大学自动控制系 100083)

摘 要 在状态反馈H_∞控制器存在情况下,考虑基于线性矩阵不等式(LMI)可行解的H_∞控制器族的构造问题。状态反馈H_∞控制问题的可解性等价于一个LMI的可解性,基于该LMI的可行解可给出所有可能的H_∞状态反馈控制器,并且对这一LMI可解条件的任意可行解,均可给出一个H_∞控制器族。这一控制器族中含有丰富的自由参数,可用于满足其他设计要求。

关键词 H_∞控制,状态反馈,线性矩阵不等式,可行解
分类号 TP 13

All H_∞ Controllers via State Feedback Based on a Feasible Solution to LMI

Zeng Jianping, Cheng Peng
(Beijing University of Aeronautics & Astronautics)

Abstract With existence of H_∞ controllers via state feedback, the problem to construct set of those controllers is studied based on feasible solution to linear matrix inequality (LMI). The solvability of H_∞ control via state feedback is equivalent to that of an LMI, and all possible H_∞ controllers via state feedback then can be constructed based on feasible solutions to the LMI. Moreover, there exists a set of controllers for any feasible solution to the LMI. The set of controllers has much freedom, which can be applied to satisfy others design objections. A simple example shows the practicability of this approach.

Key words H_∞ control, state feedback, LMI, feasible solution

1 引 言

考虑广义被控对象

$$\Sigma_p:\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u\\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u\\ y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u\end{cases}\qquad(1)$$

其中,$x\in\mathbf{R}^{n_p}$, $z\in\mathbf{R}^{n_z}$, $y\in\mathbf{R}^{n_y}$, $w\in\mathbf{R}^{n_w}$, $u\in\mathbf{R}^{n_u}$分别表示广义对象的状态变量,控制输出信号,测量信号,外部输入信号和控制信号。广义被控对象Σ_p和状态反馈Σ_s: $u = Fx$构成闭环系统

$$\Sigma_{cl}:\begin{cases}\dot{x} = A_{cl}x + B_{cl}w\\ z = C_{cl}x + D_{cl}w\end{cases}\qquad(2)$$

其中,$A_{cl}:=A+B_2F$, $B_{cl}:=B_1$, $C_{cl}:=C_1+D_{12}F$, $D_{cl}:=D_{11}$。称Σ_s为H_∞控制器,如果对给定的标量$\gamma>0$, A_{cl}渐近稳定,且从w到z的传递函数$T_{zw}(s)$满足$\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$。

基于Ricatti方程解H_∞控制问题的优点之一,是当可解条件满足时,由Ricatti方程的稳定解(唯一)可以构造出所有可能的H_∞控制器[1,2]。基于LMI方法通常只能得到基于可行解的H_∞控制器的参数化表示,而难以由一个特解显式地构造出所有的H_∞控制器[3-5]。因此,基于可解条件的每一特解获得参数化的控制器族,对于满足其他设计要求来说是有意义的。

文献[3]的可解条件不便于构造控制器族;文

* 国家自然科学基金项目(69574013)和山西省青年基金项目(19991018)
1999-01-26 收稿, 1999-05-31 修回

献[4, 5]讨论输出反馈问题, 但未涉及状态反馈的特点; 文献[6]在D_{12}列满秩情形下, 给出了基于一个LMI可行解的所有状态反馈H_∞控制器, 但其可解条件较为复杂, 且这一假定并不总能满足。本文在一般情况下, 讨论基于任意一个可行解, 所有可能的状态反馈H_∞控制器的参数化问题。

2　准备知识

文中采用的记号说明如下: 约定各矩阵具有合适的维数, I表示合适维数的单位矩阵; $\overline{\sigma}(A)$表示A的最大奇异值; A'和A^+分别表示A的转置和Moore-Penrose逆; $\mathrm{Ker}(A)$和$\mathrm{Im}(A)$分别表示A的核空间和值域空间; $A^\perp$为具有如下特征的矩阵: $\mathrm{Kel}(A^\perp) = \mathrm{Im}(A)$, 且$A^\perp A^{\perp\prime} > 0$。

给定矩阵B, C和$Q = Q'$, 设$\mathrm{rank}(B) = n_b$, $\mathrm{rank}(C) = n_c$, 进行满秩分解: $B = B_L B_R$, $C = C_L C_R$。记

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\mathrm{gen}}(B, C, Q) := \{G: \exists\, (Z, L, R), \text{ 使得}\\
&G = B_R^+ K C_L^+ + Z - B_R^+ B_R Z C_L C_L^+\\
&K := -R^{-1} B_L' \Phi C_R' (C_R \Phi C_R')^{-1} +\\
&\qquad R^{-1} S^{1/2} L (C_R \Phi C_R')^{1/2}\\
&S := R - B_L' [\Phi - \Phi C_R' (C_R \Phi C_R')^{-1} C_R \Phi] B_L\\
&\Phi = (B_L R^{-1} B_L' - Q)^{-1} > 0\\
&\qquad R > 0,\ \|L\| < 1\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

引理1[4]　设B, C和$Q = Q'$已知, 记$\mathcal{L}(G) := \{G \in \mathbf{R}^{n_u \times n_p}: BGC + (BGC)' + Q < 0\}$, 则如下陈述等价:

1) $\mathcal{L}(G) \neq \varnothing$;

2) $B^\perp Q B^{\perp\prime} < 0$, 且$C^{\prime\perp} Q C^{\prime\perp\prime} < 0$。

若条件2)满足, 则有$\mathcal{L}(G) \equiv \mathcal{L}_{\mathrm{gen}}(B, C, Q)$。

定理1　下列陈述等价:

1) Σ_s为H_∞控制器;

2) $\overline{\sigma}(D_{11}) < \gamma$, 且存在$Y = Y' > 0$, 使得

$$
\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp\prime} \times
\begin{bmatrix} AY + YA' + B_1 B_1' & YC_1' + B_1 D_{11}' \\ C_1 Y + D_{11} B_1' & D_{11} D_{11}' - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0
\tag{4}
$$

在H_∞控制器存在情形下, 所有H_∞控制器为

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(F) = \{F \in \mathbf{R}^{n_u \times n_p}: \exists\, Z \in \mathbf{R}^{n_u \times n_p}\\
&L \in \mathbf{R}^{n_b \times n_c},\ R \in \mathbf{R}^{n_b \times n_b}, \text{ 使得}\\
&F = (B_R^+ K + Z - B_R^+ B_R Z) X^{-1}\\
&\qquad R > 0,\ \|L\| < 1\\
&K = -R^{-1} B_L' \begin{bmatrix} I \\ \phi_{12}' \phi_{11}^{-1} \end{bmatrix} + R^{-1} S^{1/2} L \phi_{11}^{1/2}\\
&S := R - B_L' \Phi B_L\\
&\Phi = (B_L R^{-1} B_L' - Q)^{-1} > 0\}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中

$$
Y = \gamma X, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{12}' & \phi_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
\overline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_{22} - \phi_{12}' \phi_{11}^{-1} \phi_{12} \end{bmatrix}
$$

证明　由有界实引理[1], H_∞控制问题可解当且仅当

$$
BGC + (BGC)' + Q < 0 \tag{6}
$$

其中

$$
\left[\begin{array}{c|c} B & Q \\ G & C \end{array}\right] :=
\left[\begin{array}{c|cc} B_2 & AX + XA' + \gamma^{-1} B_1 B_1' & XC_1' + \gamma^{-1} B_1 D_{11}' \\ D_{12} & C_1 X + \gamma^{-1} D_{11} B_1' & \gamma^{-1} D_{11} D_{11}' - \gamma I \\ \hline FX & I & 0 \end{array}\right]
$$

则$C^{\prime\perp} Q C^{\prime\perp\prime} < 0 \Leftrightarrow \gamma^{-1} D_{11} D_{11}' - \gamma I < 0 \Leftrightarrow \overline{\sigma}(D_{11}) < \gamma$, 而$B^\perp Q B^{\perp\prime} < 0$即为(4)式, 故由引理1知1)和2)的等价性。最后, 可由(3)式推出(5)式。

3　所有状态反馈H_∞控制器构造

根据$B = [B_2'\ \ D_{12}']'$的列是否满秩分别进行讨论。

引理2　若B列满秩, 则(5)式中$\Phi > 0$, 当且仅当$R > 0$满足

$$
\begin{aligned}
R < B'B\,[&B'QB - B'QB^{\perp\prime} \times\\
&(B^\perp Q B^{\perp\prime})^{-1} B^\perp Q B]^{-1} B'B
\end{aligned}
\tag{7}
$$

证明　取$B_L = B$, $B_R = I$, 则$B^+ = (B'B)^{-1} B'$, $B^+ B = I$。由(5)式, $\Phi > 0 \Leftrightarrow \Phi^{-1} = BR^{-1}B' - Q > 0 \Rightarrow$

$$
\begin{bmatrix} B^+ \\ B^\perp \end{bmatrix} (BR^{-1}B' - Q)\,[B^{+\prime}\ \ B^{\perp\prime}] > 0 \tag{8}
$$

由Schur补引理, (8) $\Leftrightarrow R^{-1} > B^+ Q B^{+\prime} - B^+ Q B^{\perp\prime} (B^\perp Q B^{\perp\prime})^{-1} B^\perp Q B^{+\prime} \Leftrightarrow$ (7)。

定理2　当B列满秩时, 若Σ_s存在, 则所有可能的状态反馈H_∞控制器可表为

$$
F = R^{-1} (S^{1/2} L \phi_{11}^{1/2} - B_2' - D_{12}' \phi_{12}' \phi_{11}^{-1}) X^{-1} \tag{9}
$$

其中, $S = R - D_{12}' (\phi_{22} - \phi_{12}' \phi_{11}^{-1} \phi_{12}) D_{12}$, $\|L\| < 1$, $R > 0$满足(7)式。

由定理1及引理2可证, 略。

若B 列不满秩, 令 $\mathrm{rank}(D_{12}) = n_d < n_u$, 则存在$T$ 使得[7]

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} & 0 \\ D_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中, $D_0 \in \mathbf{R}^{n_z \times n_d}$ 列满秩, $B_{22} \in \mathbf{R}^{n_p \times k}$ 列满秩, 且 $k = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(D_{12}) = n_b - n_d$。不失一般性, 可设

$$B = \begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} & 0 \\ D_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_L = \begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} \\ D_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_R = \left[\begin{array}{cc|c} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{array}\right]$$

引理 3　若Σ_s 存在, 则有$B_L^{\perp} Q B_L^{\perp\prime} < 0$。

证明　因为 Σ_s 存在, 则 $B_L(B_R G)C + (B_L(B_R G)C)' + Q < 0$ 可解。由引理 1, 有$B_L^{\perp} Q B_L^{\perp\prime} < 0$。

引理4　若B 列不满秩, 则(5) 式中$\Phi > 0$, 当且仅当$R > 0$ 满足

$$R < B_L' B_L [B_L' Q B_L - B_L' Q B_L^{\perp\prime} \times (B_L^{\perp} Q B_L^{\perp\prime})^{-1} B_L^{\perp} Q B_L]^{-1} B_L' B_L \tag{11}$$

与引理 2 证明类似, 并注意引理 3 易证, 略。

定理3　当B 列不满秩时, 若Σ_s存在, 则所有可能的状态反馈H_∞ 控制器可表为

$$F = \begin{bmatrix} K \\ Z_2 \end{bmatrix} X^{-1} \tag{12}$$

其中

$$K = -R^{-1} B_L' \begin{bmatrix} I \\ \Phi_{12}' \Phi_{11}^{-1} \end{bmatrix} + R^{-1} S^{1/2} L \Phi_{11}^{1/2}$$

$$S = R - B_L' \bar{\Phi} B_L, \quad \| L \| < 1$$

$Z_2 \in \mathbf{R}^{(n_u - n_b) \times n_p}$ 任意, $R > 0$ 满足(11) 式。

证明与定理 2 证明类似, 略。

例 1　设广义对象为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \quad 0], \; D_{11} = 0, \; D_{12} = 1, \; \gamma = 1$$

$$X = \begin{bmatrix} 1.2505 & -0.7502 \\ -0.7502 & 0.6253 \end{bmatrix}$$

为LMI(4) 的一可行解。由定理 2, 其对应的H_∞ 控制器族为

$$F = \left(\frac{1}{R+1} L \Phi_{11}^{1/2} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} - \frac{1}{R} \Phi_{12}' \Phi_{11}^{-1} \right) \times \begin{bmatrix} 2.8593 & 3.4318 \\ 3.4318 & 5.7182 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}' & \Phi_{22}' \end{bmatrix}^{-1} = R^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] - \begin{bmatrix} -0.5003 & 1.8758 & 1.2505 \\ 1.8758 & -1.5003 & -0.7502 \\ 1.2505 & -0.7505 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$0 < R < 0.0583, \quad S = \frac{R^2}{R+1}$$

4　结　　语

LMI方法对广义对象的限制很少, 且有可靠的凸优化算法求解, 因此近年来被广泛用于求解各种控制问题。基于LMI的一个可行解难于构造出所有可能的控制器, 不利于期望利用H_∞控制族中的自由参数来满足其他设计要求。构造基于LMI任意一个可行解的所有可能的H_∞控制器的参数化表示, 是获得H_∞控制器族的一条重要途径。本文从一个较简单的状态反馈H_∞控制可解条件出发, 基于任意可行解构造了一个控制器族。该控制器族中含有丰富的自由参数, 可用来满足其他设计性能指标。

参 考 文 献

1　Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P *et al*. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. IEEE Trans on Autom Contr, 1989, 34(8): 831_847

2　Glover K, Doyle J. State-space formulas for all controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity. Syst Contr Lett, 1988, 11: 167_172

3　姜长生, 孙隆和, 吴庆宪, 等. 系统理论与鲁棒控制. 北京: 航天工业出版社, 1998

4　Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994, 30(8): 1307_1317

5　Gahinet P. Explict controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. Automatica, 1996, 32(7): 1007_1014

6　Skelton R E, Stoustrup J, Iwasaki T. The H_∞ control problem using static output feedback. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1994, 4: 449_455

7　Xin X, Guo L, Feng C B. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular H_∞ control problems based on LMI. Automatica, 1996, 32(11): 1581_1585

(下转第 94 页)