关联动态时滞系统的分散镇定*

陈国定　俞　立
(浙江工业大学信息工程学院　杭州　310032)

摘　要　针对一类关联时滞系统,通过建立一个凸优化问题,提出一种具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制器的设计方法。数值例子表明了该方法的有效性。

关键词　关联系统,滞后,分散镇定
分类号　TP 13

Decentralized Stabilization of Interconnected Dynamical Time-delay Systems

Chen Guoding, Yu Li
(Zhejiang University of Technology)

Abstract　The decentralized stabilization problem for a class of interconnected time-delay systems is considered. Based on the LMI approach, the problem of designing a decentralized stabilizing state feedback controller with small feedback gains is formulated as a convex optimization, which can be solved by the existing convex optimization techniques

Key words　interconnected systems, delay, decentralized stabilization

1 引　　言

关联动态时滞系统的分散镇定问题已为众多学者所研究[1-4]。最近,文献[4]对一类关联时滞系统,导出了该系统能用分散线性定常状态反馈控制律镇定的一个充分条件,进而证明了该条件等价于一组子系统级上带参数的代数Riccati矩阵方程正定解的存在性,若这样的正定解存在,则可用这组正定解矩阵构造所需的分散稳定化控制律。

该文的优点在于可降低以往文献[1-3]中由于事先假定了控制器的结构而引进的保守性,但也存在以下不足:

1) 所涉及的Riccati方程含有参数ϵ,通常需要通过不断减小ϵ来反复检验相应的Riccati方程正定解矩阵的存在性,即使该方法最终能取得成功,往往也可能耗费相当的时间;

2) 算法对正定矩阵Q的选取并没有给出具体方法,而Q的不同选取直接关系到问题的可解性;

3) 在分散控制律的设计中,人们希望设计的是具有较小增益参数的分散稳定化控制律,但如何得到这样的控制律,该文并没有给出一个指导性的方法。

本文针对这些问题,给出了有效的解决方法。

2　问题描述与准备知识

考虑由以下N个子系统组成的关联系统

$$\Sigma_i:\ \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(t-d)$$

$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{1}$$

其中,$x_i(t) \in R^{n_i}$和$u_i(t) \in R^{m_i}$分别是子系统Σ_i的状态向量和控制输入向量,A_i, B_i和A_{ij}是具有适当维数的实常数矩阵,d表示关联项中的滞后常数。假定每个子系统的状态可以直接测量得到,且(A_i, B_i)是完全能控的。

本文研究的问题是:设计一个分散状态反馈控

* 国家自然科学基金项目(69974036)和浙江省自然科学基金项目(698066)
1998-06-18收稿,1998-12-28修回

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

制律

$$u_i(t) = -K_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2}$$

其中 $K_i \in R^{m_i \times n_i}$ 是分散增益矩阵, 使得闭环关联系统

$$\dot{x}_i(t) = (A_i - B_i K_i) + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(t - d)$$
$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{3}$$

是稳定的。满足这样要求的控制律(2) 称为系统(1) 的分散稳定化状态反馈控制律。

文献[4] 给出了关联时滞系统(1) 存在分散稳定化状态反馈控制律的一个充分条件, 这就是如下引理:

引理 1　若对所有的 $i = 1, 2, \cdots, N$, 存在矩阵 $K_i \in R^{m_i \times n_i}$ 和对称正定矩阵 $R_i, P_i \in R^{n_i \times n_i}$, 使得

$$P_i(A_i - B_i K_i) + (A_i - B_i K_i)' P_i + P_i\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij} R_j^{-1} A_{ij}'\right) P_i + \sum_{j=1}^{N} \delta(A_{ji}) R_i < 0 \tag{4}$$

成立, 则关联系统(1) 可用分散状态反馈控制律(2) 镇定, 且具有矩阵 K_i 作为局部反馈增益矩阵的控制律 (2) 就是系统(1) 的一个分散稳定化控制律。(4) 式中的 $\delta(\cdot)$ 是一个二值函数, 若 $A_{ij} = 0$, 则定义 $\delta(A_{ij}) = 0$, 否则定义 $\delta(A_{ij}) = 1$。

3　分散稳定化控制器设计

对于系统(1), 本节通过建立一个凸优化问题来给出分散稳定化控制器的设计方法。为此, 首先提出如下定理:

定理 1　对于 $i = 1, 2, \cdots, N$, 存在矩阵 $K_i \in R^{m_i \times n_i}$ 和对称正定矩阵 $R_i, P_i \in R^{n_i \times n_i}$, 使得(4) 式成立, 当且仅当存在矩阵 $Y_i \in R^{m_i \times n_i}$ 和对称正定矩阵 $Q_i, S_i \in R^{n_i \times n_i}$, 使得对 $i = 1, 2, \cdots, N$, 有

$$\begin{bmatrix} A_i Q_i + Q_i A_i' - B_i Y_i - Y_i' B_i' + \sum_{j=1}^{N} \delta(A_{ji}) S_i & A_{i1} Q_1 & \cdots & A_{iN} Q_N \\ Q_1 A_{i1}' & -S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_N A_{iN}' & 0 & \cdots & -S_N \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

若以上条件成立, 则一个分散稳定化控制律的局部反馈增益矩阵为

$$K_i = Y_i Q_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{6}$$

证明　事实上, 对 $P_i > 0, R_i > 0$, (4) 式等价于

$$\begin{bmatrix} P_i(A_i - B_i K_i) + (A_i - B_i K_i)' P_i + \sum_{j=1}^{N} \delta(A_{ji}) R_i & P_i A_{i1} & \cdots & P_i A_{iN} \\ A_{i1}' P_i & -R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{iN}' P_i & 0 & \cdots & -R_N \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

对上式左边的矩阵分别左乘和右乘对称矩阵

$$\begin{bmatrix} P_i^{-1} & & & \\ & P_1^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_N^{-1} \end{bmatrix}$$

且记 $Q_i = P_i^{-1}, S_i = P_i^{-1} R_i P_i^{-1}, Y_i = K_i P_i^{-1}$, 即得(5) 式。

进一步, 若存在矩阵 $Y_i \in R^{m_i \times n_i}$ 和对称正定矩阵 $Q_i, S_i \in R^{n_i \times n_i}$, 使得(5) 式成立, 则由前半部分结论和引理 1 可知, 系统(1) 是分散能镇定的, 且从前半部分的推导可得所需结论。(证毕)

容易看出, 矩阵不等式(5) 关于矩阵变量 Q_i, S_i, Y_i 是线性的, 因此可应用MATLAB 的LMI软件求解该线性矩阵不等式, 进而根据定理1和(6) 式得到系统(1) 的一个分散稳定化控制律。尽管这种方法克服了文献[4] 有关分散能镇定问题的可解性依赖于出现在Riccati 方程中的参数人为选择的不足, 但仍不能保证所导出的分散稳定化控制律具有较小的反馈增益参数。为此, 必须进一步考虑使得反馈增益参数尽可能小的分散稳定化状态反馈控制律。

考虑

$$Y_i' Y_i < \alpha_i I, \quad Q_i^{-1} < \beta_i I \tag{8}$$

其中 $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$。由于 $K_i = Y_i Q_i^{-1}$, 于是

$$K_i' K_i = Q_i^{-1} Y_i' Y_i Q_i^{-1} < \alpha_i \beta_i^2 I$$

因此可通过使得 α_i, β_i 的极小化来保证分散稳定化控制律具有较小的反馈增益参数。

引理 2　1) $Y_i' Y_i < \alpha_i I$, 当且仅当

$$\begin{bmatrix} -\alpha_i I & Y_i' \\ Y_i & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

2) $Q_i^{-1} < \beta_i I$, 当且仅当

$$\begin{bmatrix} Q_i & I \\ I & \beta_i I \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

由初等矩阵运算即可证得该引理。

容易看出矩阵不等式(9), (10) 关于变量(Y_i, α_i), (Q_i, β_i) 是仿射线性的。

由以上讨论, 建立一个凸优化问题

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\right)$$
$$\text{s.t.}\quad (5),(9),(10)$$

这是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,因此可应用MATLAB的LMI软件中的mincx命令来求解。若该问题有解,则此解提供了一个具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制律。

上述方法提供了一种设计具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制律的系统方法,克服了现有方法中靠盲目试凑参数来寻找具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制律的缺陷。

4 数值例子

考虑由文献[3-6]研究的关联时滞系统(1),其中

$$A_1=\begin{bmatrix}-2&0\\-2&-1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&-4&-1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}-1&-2\\3&6\\1&2\end{bmatrix},\quad A_{23}=\begin{bmatrix}-1&0\\3&0\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad A_{31}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$$

应用本文方法和用文献[4]方法得到的结果一并列于表1。

经比较可知:应用本文提出的方法所得到的分散稳定化控制器具有较小的反馈增益参数。

表1 本文方法和文献[4]方法的比较

方法	局部反馈增益矩阵
本文方法	$K_1=[0.053\,6\quad 2.395\,4]$
	$K_2=\begin{bmatrix}0.605\,5&0.131\,0&0.605\,5\\1.211\,1&0.261\,9&1.211\,1\end{bmatrix}$
	$K_3=\begin{bmatrix}0.652\,3&0.255\,7\\0.252\,7&0.119\,2\end{bmatrix}$
文献[4]方法,选择	$K_1=[1.586\,9\quad 0.842\,1]$
$R_1=5I_2, R_2=2I_3, R_3=5I_2, Q_1=Q_3=0.25I_2, Q_2=0.25I_3, \epsilon=0.25$	$K_2=\begin{bmatrix}1.278\,1&1.056\,2&0.735\,1\\-0.012\,5&1.569\,4&2.692\,4\end{bmatrix}$
	$K_3=\begin{bmatrix}2.583\,1&0.373\,6\\0.373\,6&1.704\,3\end{bmatrix}$

参 考 文 献

1 Lee T N, Radovic U L. Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time system with delay in interconnections. IEEE Trans on Autom Contr, 1988, 33(8): 757-761

2 Hu Z. Decentralized stabilization of large-scale interconnected systems with delays. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39(1): 180-182

3 Trinh H, Aldeen M. A comment on "Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays." IEEE Trans on Autom Contr, 1995, 40(5): 914-916

4 俞立,陈国定. 一类关联时滞系统的分散稳定化控制器设计. 控制与决策, 1997, 12(5): 559—564

5 Kwon W H, Pearson A E. A note on feedback stabilization of a differential-difference system. IEEE Trans on Autom Contr, 1977, 22(3): 468-470

6 Furukawa T, Shimemura E. Stabilizability conditions by memoryless feedback for linear systems with time-delay. Int J Control, 1983, 37(3): 353-365

作 者 简 介

陈国定 男,1962年生。1990年在浙江大学获硕士学位,现为浙江工业大学副教授。主要研究方向为不确定的鲁棒控制理论与应用,工业过程计算机控制等。

俞 立 男,1961年生。1991年获浙江大学博士学位,现为浙江工业大学信息工程学院副院长,教授。主要研究方向为不确定系统的鲁棒控制,H_∞控制,大系统的分散控制等。

(上接第91页)

作 者 简 介

曾建平 男,1966年生。1992年在华北工学院自控系获工学硕士学位,现为北京航空航天大学博士生。研究领域为鲁棒控制,H_∞控制理论,线性系统。

程 鹏 男,1938年生。1962年毕业于北京大学数学力学系,现为北京航空航天大学自动控制系教授,博士生导师。研究领域为线性系统理论,多变量系统理论,鲁棒控制和运动稳定性。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net