

多参数线性时滞系统的稳定性准则*

曹登庆

张克跃

(西南交通大学应用力学与工程系 成都 610031) (西南交通大学峨眉分校)

摘要 针对带有多参数扰动的线性时滞系统, 利用二次型加积分项的 Lyapunov 泛函, 导出了系统鲁棒稳定的时滞无关准则。由于准则给出的扰动界关于参数空间的原点可以是非对称的, 充分利用了不确定性的结构特点, 因此在很大程度上扩大了稳定参数域。

关键词 不确定参数, 时滞系统, 鲁棒稳定性, Lyapunov 泛函

分类号 O 317

Stability Criteria for Linear Time- delay Systems with Multiple Uncertain Parameters

Cao Dengqing, Zhang Keyue

(Southwest Jiaotong University)

Abstract A stability robustness criterion is derived for linear time- delay systems with multiple uncertain parameters using a quadratic Lyapunov functional with an integral term. The robust stability bounds obtained are not necessarily symmetric with respect to the origin in the parameter space, and can significantly enlarge the stability region for the uncertain parameters

Key words uncertain parameters, time- delay systems, robust stability, Lyapunov functional

1 引言

不确定时滞系统的稳定性准则大致可分为两类: 1) 时滞独立准则, 不包含时滞的任何信息^[1-3]; 2) 与滞后量的大小有关的时滞依赖准则^[4-6]。时滞依赖准则由于计及了时滞信息量, 往往具有较低的保守性, 尤其是滞后量相对较小的情况。当滞后量较大时, 时滞依赖准则不适用, 而时滞独立准则却可以给出较好的代数判据。

关于不确定线性时滞系统的稳定性, 除少数采用频域方法、微分不等式方法外, 大都采用 Lyapunov 方法进行研究。不确定性可划分为非结构扰动和结构扰动两类。对于结构扰动, 由于所得扰动界依赖于参数矢量的模或各参数的绝对值^[2,3], 因此关于参数空间的原点是对称的。事实上, 实际系统的不确定参数关于原点是而非对称的, 因而这样的处理有较大的局限性。

本文应用二次型加积分项的 Lyapunov 泛函, 导出了多参数线性时滞系统鲁棒稳定性的时滞独立准则。所得扰动界关于参数空间的原点可以是非对称的, 使之更切合于工程实际问题。

2 系统描述与数学引理

研究由微分差分方程描述的不确定线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - \tau) \\ x_0(\theta) = \Phi\theta, \quad -h \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, $x \in R^n$ 是系统在时刻 t 的状态矢量; $A, D \in R^{n \times n}$ 是常数矩阵; $\Delta A(t), \Delta D(t) \in R^{n \times n}$ 是时变的不确定矩阵; $\Phi \in R^n$ 是给定的连续矢量初值函数; $\tau > 0$ 是系统的滞后时间。设系统(1)中的不确定项具有如下结构

$$\begin{cases} \Delta A(t) = \sum_{i=1}^m r_i(t)A_i \\ \Delta D(t) = \sum_{i=1}^m r_i(t)D_i \end{cases} \quad (2)$$

* 西南交通大学科学基金项目

1998 - 05 - 18 收稿, 1999 - 01 - 18 修回



这里, $A_i, D_i \in R^{n \times n} (i = 1, 2, \dots, m)$ 均为给定的常数矩阵, $r_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$ 是不确定的时变参数; 以 $\lambda(G) (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示 $n \times n$ 矩阵 G 的特征值, 以 $\lambda_M(G), \lambda_m(G)$ 分别表示对称矩阵的最大特征值和最小特征值.

引理 1^[7] 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 和 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 分别是对称矩阵 X, Y 和 $Z = X + Y$ 的特征值, 则

$$\alpha_i + \beta_i \leq \gamma_i \leq \alpha_i + \beta_n, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

引理 2 设 $X_i \in R^{n \times n} (i = 1, 2, \dots, m)$ 是对称矩阵, 且

$$Z(t) = \sum_{i=1}^m r_i(t) X_i, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

则

$$\lambda_M(Z(t)) \leq \sum_{i=1}^m r_i(t) \mu_i, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \quad (4)$$

式中

$$\mu_i = \begin{cases} \lambda_M(X_i), & r_i(t) > 0 \\ \lambda_m(X_i), & r_i(t) < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

证明 根据引理 1, 对任意 $t \in [t_0, +\infty)$, 有

$$\lambda_j(Z(t)) = \lambda_j(r_1(t)X_1) + \lambda_M\left(\sum_{i=2}^m r_i(t)X_i\right) \leq \lambda_j(r_1(t)X_1) + \lambda_M\left(\sum_{i=1}^m r_i(t)X_i\right) = \lambda_M(r_1(t)X_1) \quad (6)$$

式中 $\lambda_j(r_i(t)X_i)$ 是矩阵 $r_i(t)X_i$ 的第 j 个特征值. 注意到 $\forall t \in [t_0, +\infty)$, 有

$$\lambda_j(r_i(t)X_i) = r_i(t)\lambda_j(X_i) \leq \begin{cases} r_i(t)\lambda_M(X_i), & r_i(t) > 0 \\ r_i(t)\lambda_m(X_i), & r_i(t) < 0 \end{cases}$$

可知

$$\lambda_M(r_i(t)X_i) \leq r_i(t)\mu_i, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

代入(6)式则不等式(4)成立. (证毕)

3 主要结果

假定系统(1)中矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的, 即对任意正定矩阵 Q , Lyapunov 矩阵方程

$$A^T P + PA = -Q \quad (7)$$

存在唯一的正定矩阵解 P . 定义矩阵

$$G = \begin{bmatrix} Q & -PD \\ -D^T P & Q \end{bmatrix}$$

$$P_i = \begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & PD_i \\ D_i^T P & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

定理 1 设矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的, 则不确定线性时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果

$$\sum_{i=1}^m r_i(t)\mu_i < \lambda_m(G), \quad \forall t \geq 0 \quad (9)$$

式中

$$\mu_i = \begin{cases} \lambda_M(P_i), & r_i(t) > 0 \\ \lambda_m(P_i), & r_i(t) < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

矩阵 G 和 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 由(8)式定义.

证明 取正定泛函

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Qx(s)ds \quad (11)$$

式中, P, Q 是矩阵方程(7)所确定的正定矩阵. 沿系统(1)的解微分 $V(x_t)$ 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= x^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) = \\ &= x^T(t)(A^T P + PA + Q)x(t) + 2x^T(t)PDx(t-\tau) + 2x^T(t) \times \\ & \quad P\Delta A(t)x(t) + 2x^T(t)P\Delta D(t)x(t-\tau) - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \end{aligned}$$

注意到 Lyapunov 矩阵方程(7)及参数式(2), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= -[x^T(t) \ x^T(t-\tau)] \begin{bmatrix} Q & -PD \\ -D^T P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} + \\ & \quad [x^T(t) \ x^T(t-\tau)] \sum_{i=1}^m r_i(t) \times \\ & \quad \begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & PD_i \\ D_i^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} = \\ & = -[x^T(t) \ x^T(t-\tau)] \left[G - \sum_{i=1}^m r_i(t)P_i \right] \times \\ & \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (12) \end{aligned}$$

由于 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是对称矩阵, 所以根据引理 2 和条件(9)得

$$\lambda_M\left(\sum_{i=1}^m r_i(t)P_i\right) \leq \sum_{i=1}^m r_i(t)\mu_i < \lambda_m(G)$$

即对任意 $t \geq 0$, 矩阵 $G - \sum_{i=1}^m r_i(t)P_i$ 正定, 从而由

(12) 式知 $\dot{V}(x_t)$ 负定, $V(x_t)$ 是系统 (1) 的一个 Lyapunov 泛函, 故定理的结论成立。(证毕)

定理 1 给出的稳定条件依赖于 Lyapunov 矩阵方程 (7) 中正定矩阵 Q 的选取。在实际应用中, 一般取 $Q = I$ (单位矩阵), 可以给出较高的扰动界。

4 数值算例

考虑不确定线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3+r_1 & 0 \\ r_1 & -2+r_1 \end{bmatrix} x(t) + \\ \begin{bmatrix} 0 & r_2 \\ r_2 & r_2 \end{bmatrix} x(t-\tau) \\ x(t) = [1 \ 1]^T, \quad t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (13)$$

式中, $r_1 = r_1(t)$ 和 $r_2 = r_2(t)$ 是不确定参数, 常时滞 $\tau > 0$ 。与系统 (1) 比较, 有

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = D_1 = A_2 = 0$$

取 $Q = I$, 由矩阵方程 (7) 得到正定矩阵解 P , 容易求得 $\lambda_{\min}(G) = 1.0$, $\lambda_{\min}(P_1) = 1.36038$, $\lambda_{\min}(P_1) = 0$, $\lambda_{\min}(P_2) = 0.74944$, $\lambda_{\min}(P_2) = -0.74944$ 。由定理 1 得系统 (13) 渐近稳定的条件为

$$\begin{cases} 1.36038r_1(t) + 0.74944r_2(t) < 1 \\ r_1(t) > 0, r_2(t) > 0 \\ 1.36038r_1(t) - 0.74944r_2(t) < 1 \\ r_1(t) > 0, r_2(t) < 0 \\ 0.74944r_2(t) < 1, \quad r_1(t) < 0, r_2(t) > 0 \\ -0.74944r_2(t) < 1, \quad r_1(t) < 0, r_2(t) < 0 \end{cases} \quad (14)$$

而文献 [3] 中定理 1 给出的稳定条件仅为 $|r_1(t)| < 0.7038$, $|r_2(t)| < 0.7038$ 。

由条件 (14) 确定的稳定参数域示于图 1 中粗线所围区域, 而文献 [3] 的结果则由阴影部分表示。显见, 条件 (14) 所确定的区域是开的无界区域, 与文献 [3] 给出的扰动界相比, 明显地扩大了稳定参数域, 尽管它们是互不包含的。

算例表明, 由于导出的鲁棒稳定性准则充分利用了不确定性的结构特点, 其扰动界关于参数空间的原点可以是非对称的, 它不仅具有较低的保守性,

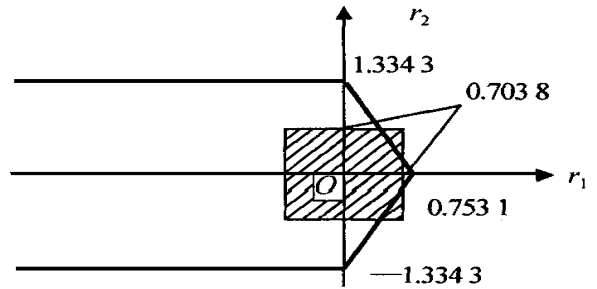


图 1 系统的稳定参数域

易于检验, 且在很大程度上扩大了稳定参数域, 克服了已有工作的局限性。

参考文献

- 1 Wu H S, Mizukami K. Robust stability criteria for dynamical systems including delayed perturbations. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40: 487- 489
- 2 Trinh H, A Ideen M. Stability robustness bounds for linear systems with delayed perturbations. IEE Proc Control Theory and Applications, 1995, 42: 345- 350
- 3 Luo J S, Van der Bosch P P J. Independent of delay stability criteria for uncertain linear state space models. Automatica, 1997, 33: 171- 179
- 4 Sun Y J, Hsieh J G, Yang H C. On the stability of uncertain systems with multiple time-varying delays. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42: 101- 105
- 5 Li X, Souza C E De. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42: 1144-1148
- 6 曹登庆, 张克跃. 不确定线性时滞系统的稳定性准则. 西南交通大学学报, 1997, 32: 16- 22
- 7 Hale J. Theory of functional differential equation. New York: Springer-Verlag, 1977

作者简介

曹登庆 男, 1958 年生, 1993 年在西南交通大学获博士学位, 现为西南交通大学应用力学与工程系教授, 主要研究方向为不确定系统的稳定性与控制, 结构振动控制, 大系统的稳定性与鲁棒控制。

张克跃 男, 1962 年生, 1989 年在西南交通大学获力学硕士学位, 现为西南交通大学峨眉分校副教授, 主要研究方向为不确定系统的稳定性与控制, 控制系统的鲁棒绝对稳定性。