风险敏感性最优控制问题研究*

刘海龙　　苗 实　潘德惠
(沈阳大学工商管理学院　110044)　(东北大学工商管理学院)

摘　要　运用随机最优控制理论，研究了风险敏感性随机最优控制问题。给出了值函数和风险规避系数的定义，并通过对值函数进行非线性变换，证明了变换后的值函数满足带有风险规避系数的动态规划偏微分方程。

关键词　随机最优控制，风险敏感性，值函数，动态规划，效用函数
分类号　N 94

Optimal Control Problem for the Risk Sensitive

Liu Hailong　　Miao Shi, Pan Dehui
(Shenyang University)　(Notheastern University)

Abstract　The optimal control problem for the risk sensitive is studied by using the theory of stochastic optimal control. The definitions of value function and the coefficient of risk aversion are given, and the nonlinear transformation of value function is conducted. The transformed value function is proved to satisfy dynamic programming partial differential equation with the coefficient of risk aversion.

Key words　stochastic optimal control, risk sensitive, value function, dynamic programming, utility function

1 引　　言

在预期风险投资收益及其波动的方差相同的基础上，风险规避程度不同的投资者会做出不同的投资决策。风险敏感性是指随着风险规避程度变化而使投资策略改变的程度。目前主要从两方面研究风险敏感性：一是影响投资者风险敏感性因素[1,2]；二是在不同风险敏感性下的风险最优控制[3-5]。关于风险敏感性最优控制，大都只研究风险规避、风险中性和风险偏好不同情况的投资决策问题，尚未见有关风险规避程度连续变化时确定最优投资策略问题的报导。事实上，投资者的风险敏感性是变化的[2]，风险敏感性程度不同的投资者，其投资方向也明显不同。因此，研究风险敏感程度不同投资者的投资行为具有重要的现实意义。

本文研究风险规避程度连续变化时的随机最优控制问题，给出了值函数、效用函数和风险规避系数的定义，并对值函数进行非线性变换，这种变换恰好是效用函数的逆函数。最后证明了变换后的值函数满足带有风险规避系数的动态规划偏微分方程。

2　准备知识

考虑随机最优控制问题。受控对象用随机微分方程描述为

$$\begin{cases} dx(t) = \mu[x(t), u(t)]dt + \\ \qquad\qquad \sigma[x(t), u(t)]dw_t \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

目标泛函为

$$J(u) = EF[h(x(T))] \tag{2}$$

其中，$x(t)$ 是 K 维状态变量，$u(t)$ 是 K 维控制变量，$w_t(t \geq 0)$ 是概率空间 (Ω, B, P) 上的 K 维维纳过程，$B_t = \sigma(w_s)(s \leq t)$ 是由维纳过程 w_t 产生的 σ 域族，每个 σ 域 B_t 都是完备化的。

设 U 是 k 维欧氏空间 R_k 中的一个子集，$S(k)$ 表示 $K \times K$ 矩阵的全体集合，$\sigma(\cdot, \cdot): R^k \times U \to S(k)$，$\mu(\cdot, \cdot): R^k \times U \to R^k$，$h(\cdot): R^k \to R^1$ 为连续可微函数，$F(\cdot): R^1 \to R^1$ 为效用函数，E 表示期望，$x(t)$ 是随机微分方程(1) 的解，$x(T)$ 是状态在终端

* 1998-05-28 收稿，1998-10-09 修回

T 时刻的值。随机最优控制问题是寻求 $u^*(\cdot) \in U$，使得

$$J[u^*(\cdot)] = \sup_{u \in U} J[u(\cdot)]$$

$u^*(\cdot)$ 称为控制问题(1) 和(2) 的最优控制，相应于 $u^*(\cdot)$ 的随机微分方程(1) 的解 $x^*(t)$ 称为最优轨道。

定义1 设 $F(x): [0, +\infty] \to R$ 是二阶连续可微函数，且 $F'(x) > 0$，则称 $F(x)$ 为效用函数。

定义2 若 $F(x)$ 为效用函数，则称

$$H(x, t) = \sup_{u \in U} J(u) = \sup_{u \in U} \mathrm{E}F[h(x_t)] \tag{3}$$

为由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题的值函数。

由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题值函数存在的条件为:

A1: 对一切 $x, y \in R^k, u \in U$，函数 $\mu_i(x, u)$ 和 $\sigma_{ij}(x, u)\ (i, j = 1, 2, \cdots, k)$ 关于变量 x 满足条件

$$\begin{cases} |\mu_i(x, u) - \mu_i(y, u)| \le K|x - y| \\ |\sigma_{ij}(x, u) - \sigma_{ij}(y, u)| \le L|x - y| \end{cases} \tag{4}$$

其中，$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)^\tau$，$\sigma = (\sigma_{ij})_{k \times k}$，$K, L$ 为正数。

A2: 对任意 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)^\tau$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)^\tau \in R^k$，$u \in U$，存在正常数 α，使得不等式

$$\sum_{i,j=1}^{k} \sigma_{ij}(x, u)\theta_i\theta_j \ge \alpha|\theta|^2 \tag{5}$$

成立。

定理1[6] 假设由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题满足条件A1 和A2，则该随机控制问题存在唯一值函数 $H(x, t)$，且值函数满足动态规划偏微分方程

$$\begin{cases} H_t = \sup_{u \in U}\left\{\langle \mu, \nabla H\rangle + \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(MD_x^2H)\right\} \\ H(x, T) = F[h(x)] \end{cases} \tag{6}$$

其中，$M = \sigma\sigma^\tau$ 是正定矩阵，D_x^2H 是Hessian 阵，∇ 为梯度算符，$\nabla H = (H_{x_1}, H_{x_2}, \cdots, H_{x_k})^\tau$，$\langle\cdot, \cdot\rangle$ 表示点乘，$\mathrm{tr}(\cdot)$ 为迹算符，下标 $t, x_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 表示对相应变量的偏导数。

3 主要结果

因为在相同的预期和环境下，风险规避程度不同的投资者，其投资策略是不同的。为此，将经济学家提出的风险规避系数概念引入证券投资决策问题，研究风险敏感性随机最优控制问题，并得到两个重要结论。

定义3 若 $F(x) \in C^2(0, \infty)$ 为效用函数，$F''(x) < 0$，则称

$$r(x) = |F''(x)| / F'(x) \tag{7}$$

为风险规避系数[7]。

风险规避系数 $r(x)$ 直接反映了投资者的风险规避程度，即投资者越厌恶风险，则 $r(x)$ 越大，反之，$r(x)$ 越小。

以下给出风险规避程度不同的投资者的值函数所满足的动态规划偏微分方程。

定理2 假设由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题满足条件A1 和A2，对其值函数 $H(x, t)$ 做变换 $V = F^{-1}(H)$，则变换后的值函数 V 满足如下动态规划偏微分方程

$$\begin{cases} V_t = \max_{u \in U}\left\{\langle \mu, \nabla V\rangle + \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(MD_x^2V) - \right. \\ \qquad \left.\dfrac{1}{2}r(V)\mathrm{tr}[M(\nabla V)(\nabla V)^\tau]\right\} \\ V(x, T) = h(x) \end{cases} \tag{8}$$

证明 由定理1 知，值函数 $H(x, t)$ 满足方程(6)，不难证明 $V(x, T) = h(x)$，而 $V = F^{-1}(H)$，所以

$$H = F(V), \quad H_t = F'(V)V_t$$

$$H_{x_ix_j} = F''(V)V_{x_i}V_{x_j} + F'(V)V_{x_ix_j}$$

$$H_{x_i} = F'(V)V_{x_i}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, k$$

$$\nabla H = (H_{x_1}, H_{x_2}, \cdots, H_{x_k})^\tau =$$

$$(F'(V)V_{x_1}, F'(V)V_{x_2}, \cdots, F'(V)V_{x_k})^\tau =$$

$$F'(V)\Delta V$$

$$D_x^2H = \begin{bmatrix} H_{x_1x_1} & H_{x_1x_2} & \cdots & H_{x_1x_k} \\ H_{x_2x_1} & H_{x_2x_2} & \cdots & H_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{x_kx_1} & H_{x_kx_2} & \cdots & H_{x_kx_k} \end{bmatrix} =$$

$$F''(V)(\nabla V)(\nabla V)^\tau + F'(V)D_x^2(V)$$

分别将 H_t，∇H 和 D_x^2H 代入方程(6)，得

$$F'(V)V_t =$$

$$\max_{u \in U}\left\{\langle \mu, \nabla VF'(V)\rangle + \right.$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[F'(V)MD_x^2V +$$

$$\left. MF''(V)(\nabla V)(\nabla V)^\tau]\right\} =$$

$$\max_{u \in U}\left\{\langle \mu, \nabla V\rangle F'(V) + \right.$$

$$\frac{1}{2}F'(V)\mathrm{tr}(MD_x^2V) +$$

$$\frac{1}{2}F''(V)\,\mathrm{tr}[M(\nabla V)(\nabla V)^{\tau}]\Big\}$$

两端除以 $F'(V)$, 再由风险规避系数 $r(V)$ 的定义即得方程(8)。(证毕)

定理 2 表明, 风险规避程度不同的投资者投资策略不同, 因为动态规划偏微分方程(8) 的解依赖于风险规避系数 $r(V)$, 所以值函数 V 和最优投资策略 u 都受风险规避系数 $r(V)$ 的影响。通过求解动态规划偏微分方程(8) 的 Cauchy 问题, 可得到由方程(1) 和(2) 构成的随机最优控制问题的值函数 V, 进而得到基于值函数 V 的投资策略 u。由风险规避系数的定义知, $r(V)$ 与效用函数 F 有关, 风险规避程度越大, 效用函数曲线越弯曲。

下面针对具体的效用函数 $F(x) = -\exp\cdot(-\epsilon^{-1}x)$, 给出风险规避系数趋于无穷大时的一个结论。

定理 3　假设效用函数为 $F(x) = -\exp\cdot(-\epsilon^{-1}x)$, 且由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题满足条件 A1 和 A2, 做变换 $V = F^{-1}(H)$, 在当 $\epsilon \to 0$ 时, $r(V)M$ 一致收敛于函数矩阵 P, $D_x^2 V$ 一致有界的条件下, 值函数 V 的极限记为 V^0。则值函数 V^0 满足如下一阶动态规划偏微分方程

$$\begin{cases} V_t^0 = \max\limits_{u \in U}\Big\{\langle \mu, \nabla V^0 \rangle - \\ \qquad \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}[P(\nabla V^0)(\nabla V^0)^{\tau}]\Big\} \\ V^0(x, T) = h(x) \end{cases} \tag{9}$$

证明略

通过求解一阶动态规划偏微分方程(9) 的 Cauchy 问题, 可得到由方程(1) 和(2) 构成的随机最优控制问题。选取效用函数为 $F(x) = -\exp\cdot(-\epsilon^{-1}x)$, 当风险规避系数趋于无穷大时的值函数为 V_0, 基于值函数 V^0 的最优投资策略为 u^*。定理 3 表明: 极端厌恶风险投资者的值函数 V^0 满足一阶动态规划偏微分方程(9); 求解方程(9) 比求解方程(8) 容易, 而(9) 的解反映了一种极端而又普遍的情况, 即许多不愿承受任何风险而稳获收益的投资者都可参考方程(9) 的解确定投资策略。

4　结　　语

本文将经济学家提出的风险规避系数概念引入证券决策问题, 研究了风险敏感性随机最优控制问题, 并得到两个重要结论。该结论对于研究风险规避程度不同的投资者制定投资策略具有重要意义。通过求解带有风险规避系数的二阶动态规划偏微分方程(8), 以及当风险规避系数无限大时得到的一阶动态规划偏微分方程(9), 可以得到最优投资策略。有关偏微分方程(8) 和(9) 的解法将另文讨论。

参 考 文 献

1　Whitmore G A, Findly M C. Stochastic dominance: An approach to decision making under risk. Heath and Company, 1978. 36- 58

2　Elke U W, Richard A M. Perceived risk attitudes: Relating risk perception to risky choice. Management Science, 1997, 43(2): 123- 144

3　Whittle P. A risk sensitive maximum principle: The case of imperfect state information. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36: 793- 801

4　Barron E N, Jensen R. Total risk aversion, stochastic optimal control and differential games. Applied Mathematics and Optimization, 1989, 19: 313- 327

5　Fleming W H. Optimal investment models and risk sensitive stochastic control. Mathematical Finance, 1995, (1): 75- 88

6　王康宁. 最优控制的数学理论. 北京: 国防工业出版社, 1995. 177- 217

7　Keller L R. An empirical investigation of relative risk aversion. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15: 475- 482

作 者 简 介

刘海龙　男, 1959 年生。1995 年于东北大学工商管理学院获硕士学位, 现为沈阳大学副教授, 东北大学博士研究生。主要研究方向为经济控制理论, 金融工程。

苗　实　男, 1972 年生。1996 年于昆明工业大学获硕士学位, 现为东北大学博士研究生。主要研究方向为经济控制理论, 金融工程。

潘德惠　男, 1928 年生。现为东北大学教授, 博士生导师。主要研究方向为经济控制理论, 分布参数控制理论。