具有最优动态性能的鲁棒镇定控制器设计*

刘 翔 孙优贤
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 针对SISO线性离散系统, 利用线性规划方法设计具有指定最优动态性能的鲁棒稳定控制器。当线性离散模型的零、极点已知时, 将最优动态性能指标在指定输入信号下直接转化为线性规划问题, 从而解出最优响应输出序列。最优动态性能指标与鲁棒稳定性的统一使该控制器的设计方法具备了工业应用条件。仿真实例验证了结果的正确性。

关键词 鲁棒性, 线性规划, 超调及负超调, 调节时间, 衰减率
分类号 TP 13

Robust Stabilizing Controller Design for Optimal Dynamic Performance Indexes

Liu Xiang, Sun Youxian
(Zhejiang University)

Abstract Using linear programming, an approach of designing a robust stabiling controller which enjoys specific optimal dynamic performance indexes simultaneously is developed for SISO linear discrete-time systems. When the zeros and poles of a linear discrete-time system are known previously, the optimal dynamic performances for a given input signal are converted to a linear programming problem directly and the optimal output sequece is obtained by its solution. Also, the unity of optimal dynamic performances and the robust stability makes it possible that this design method is suitable for real-life application. The correctness of conclusions is verified by a simulation example.

Key words robustness, linear programming, overshoot and undershoot, settling time, decreasing rate

1 引　　言

与H_∞理论研究能量有界信号不同, l_1理论研究幅值有界信号。当需要优化系统对于给定输入信号(阶跃输入, 正弦输入等) 的动态响应时, 使用l_1理论更加合理而有效。l_1-优化控制首先由Vidyasagar[1]提出; 其后, Dahleh和Pearson[2-4]利用无穷维对偶线性规划方法系统地解决了这一问题。Deodhare和Vidyasagar[5]用该方法设计了无超调控制器以及超调有界控制器, 并给出了基本的l_1范数极小化问题及其对偶问题的无穷维线性规划的标准形式[6]。Young和Dahleh[7]指出, 对于l_1优化问题, 关键是给出问题的上、下界, 以便给出精度已知的任意有限维近似解。

本文试尝解决两个问题: 首先, 采用有限维线性规划设计满足动态时域指标的最优控制器。时域指标包括指定的调节时间及衰减率约束下的最小超调及最小负超调, 这些指标反映了系统动态性能的本质特征。其次, 为证明这种直接针对最优时域指标设计的控制器具有工程应用价值, 得出了该控制器同时是鲁棒稳定控制器的结论。本文选择文献[8]中一个混合器的模型进行仿真实验, 得到了满意的结果。

2 最优动态性能的实现

闭环系统调节时间N的含义为

$$y(k) = u(k), \quad k = N, N+1, \cdots \tag{1}$$

或等价为

* 国家自然科学基金项目(69635010)
1998-06-02收稿, 1999-09-21修回

$$e(k)=0,\quad k=N,N+1,\cdots \tag{2}$$

其中N 为正整数。闭环系统阶跃响应的负超调v的含义为$\{v: v=\min y(k), y(k)<0, k>0\}$; 衰减率的含义为: 当$k\geq N_1$($N_1$为正整数,$N_1<N$)时,有

$$|e(k)|\leq a^{k-N_1}\max|e(k)|,\quad a\in(0,1) \tag{3}$$

控制器$\hat{c}$的设计目标是: 1) 使闭环系统稳定; 2) 渐近跟踪阶跃输入信号; 3) 确保指定的调节时间; 4) 确保指定的衰减率; 5) 使超调量最小; 6) 使负超调量的绝对值最小。

设$\hat{P}=\hat{n}/\hat{d}$是对象$\hat{P}$的一个稳定分解,这里$\hat{n}$, $\hat{d}\in l_1$且互质。为了简化分析,假定$\hat{n}$有m个不同的实零点$z_1,z_2,\cdots,z_m$位于单位圆内或其边界上($z_i\neq 1$, $i=1,2,\cdots,m$),$\hat{d}$有n个不同的实零点$t_1,t_2,\cdots,t_n$位于单位圆内或其边界上。为使误差$\hat{e}$的稳态值为零,在$\hat{d}$中添加一零点$t_{n+1}=1$,即设$\tilde{d}=\hat{d}(1-z)$,且选择$\hat{s},\hat{h}\in l_1$,满足互质分解

$$\hat{s}\hat{n}+\hat{h}\tilde{d}=1 \tag{4}$$

的解。采用Youla参数化方法,所有镇定控制器的集合为

$$\hat{c}=(\hat{s}+\hat{q}\tilde{d})/(\hat{h}-\hat{q}\hat{n}),\quad \hat{q}\in l_1 \tag{5}$$

应用控制器(5)及等式$\hat{u}=u_0/(1-z)$(u_0为非零实常数),得到

$$\hat{e}=(\hat{h}-\hat{q}\hat{n})\hat{d}u_0,\quad \hat{q}\in l_1 \tag{6}$$

而

$$\hat{e}=\sum_{i=1}^{\infty}e_i z^i \tag{7}$$

这里误差序列$\{e_i\}_{i=0}^{\infty}\in l_1$,因为$\hat{e}$是稳定且有理的。

受调节时间和衰减率约束的超调量和负超调量极小化问题由如下插值问题描述。

$$\begin{cases}\min\max\limits_i|e_i|\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i=0}^{\infty}e_i z_j^i=\hat{u}(z_j),\quad j=1,2,\cdots,m\\ \sum\limits_{i=0}^{\infty}e_i t_j^i=0,\quad j=1,2,\cdots,n\\ e_i=0,\quad i\geq N\\ |e_i|\leq a^{i-N_1}\max|e_i|\\ N>i\geq N_1,\quad a\in(0,1)\end{cases} \tag{8}$$

约定所有的$\hat{u}(z_j)$不全为零,否则优化问题的唯一最优解为$\hat{e}=0$。令

$$x_N=\max_i|e_i| \tag{9}$$

且

$$e_i=x_i,\quad i=0,1,\cdots,N-1 \tag{10}$$

则优化问题(8)等价为有限维线性规划问题

$$\begin{cases}\min x_N\\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i=0}^{N-1}x_i z_j^i=\hat{u}(z_j),\quad j=1,2,\cdots,m\\ \sum\limits_{i=0}^{N-1}x_i t_j^i=0,\quad j=1,2,\cdots,n\\ x_i-x_N\leq 0,\quad i=0,1,\cdots,N_1-1\\ -x_i-x_N\leq 0,\quad i=0,1,\cdots,N_1-1\\ x_i-a^{i-N_1}x_N\leq 0,\quad i=N_1,\cdots,N-1\\ -x_i-a^{i-N_1}x_N\leq 0,\quad i=N_1,\cdots,N-1\\ -x_N\leq 0,\quad a\in(0,1)\end{cases} \tag{11}$$

引理1[9] 设混合约束优化问题

$$\begin{cases}\min f(x),\quad x\in E^n\\ \text{s.t.}\ g_j(x)\leq 0,\quad j=1,2,\cdots,m\\ h_r(x)=0,\quad r=1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{12}$$

是一个凸规划,x^*是可行点。若Kuhn-Tucker条件在x^*处成立,即存在一组实数μ_j^*, v_r^*,使得

$$\begin{cases}\nabla f(x^*)+\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j^*\nabla g_j(x^*)+\\ \sum\limits_{r=1}^{l}v_r^*\nabla h_r(x^*)=0\\ \mu_j^* g_j(x^*)=0,\ \mu_j^*\geq 0,\ j=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{13}$$

成立,则x^*是问题(12)的全局极小点。

引理2[9] 若(12)中所有的不等式约束与等式约束为线性函数且相容,则满足(13)的Kuhn-Tucker条件的Lagrange乘子μ_j^*, v_r^*一定存在。

定理1 若线性规划问题(11)满足条件$N\geq m+n$,则问题的最优解x_N^*一定存在,且是有限正实数。

证明 因为线性规划是凸规划,由引理1和引理2知,问题(11)的最优解存在的条件是其所有约束相容。由假定,t_i, z_j($i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$)相异且不全为零,其等式约束的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & z_1 & \cdots & z_1^{N-1}\\ & & \vdots & \\ 1 & z_m & \cdots & z_m^{N-1}\\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^{N-1}\\ & & \vdots & \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{N-1}\end{bmatrix}$$

行满秩。因此所有等式约束相容, 当且仅当 $N \geq m + n$。

注意到不等式约束中的变量 $x_N \geq 0$, 且与所有等式约束无关, 因此不等式约束与等式约束是相容的, 而所有不等式约束均是变量 x_i 的上、下界约束也相容, 所以问题的所有约束均相容。又等式约束的解是有限实数, 因此其上界 $x_N \geq 0$ 也是有限正实数。(证毕)

由于Kuhn - Tucker条件是凸规划问题的最优充要条件, 因此, 可利用(13) 式的 K - T 条件解线性规划问题(11), 也可直接利用Matlab 优化软件包解之。

3　最优动态性能与鲁棒稳定性

为研究鲁棒稳定性, 规定不确定系统

$$\hat{P}_\epsilon = \hat{P}\hat{\Delta} \tag{14}$$

$$\hat{\Delta} = (1 + \hat{\Delta}_1)/(1 + \hat{\Delta}_2) \tag{15}$$

其中, $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ 是严格正则的 l_∞ - 稳定摄动。

引理3(小增益定理)　设M 是线性时不变系统且 Δ 是严格正则的 l_∞ - 摄动, 则当 $\|M\|_1 \leq 1$ 时, 闭环系统对于所有的 $\|\hat{\Delta}_1 \quad \hat{\Delta}_2\|_{l_\infty\text{- ind}} < 1$, l_∞ 稳定, 其中 $\|\hat{\Delta}\|_{l_\infty\text{- ind}} = \sup\limits_{x \neq 0}(\|\hat{\Delta}x\|_\infty / \|x\|_\infty)$。并令

$$\hat{e}_1 = (h - \hat{q}n)\tilde{d}, \quad \hat{q} \in l_1 \tag{16}$$

定理2　若系统$\hat{P}$ 的摄动满足(14), (15) 式, 且 $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ 是严格正则的 l_∞ - 稳定摄动, 控制器 $\hat{c}$ 满足(5) 式。则当 $\left\|\begin{matrix} 1 - \hat{e}_1 \\ \hat{e}_1 \end{matrix}\right\|_1 \leq 1$ 时, 闭环系统对于所有的 $\|\hat{\Delta}_1 \quad \hat{\Delta}_2\|_{l_\infty\text{- ind}} < 1$, l_∞ 稳定。

证明　对于摄动系统$\hat{P}_\epsilon$, 应用(4), (5) 控制器, 闭环系统的回复矩阵

$$\begin{aligned} \hat{D} &= (\hat{s} + \hat{q}\hat{\tilde{d}})\hat{n}(1 + \hat{\Delta}_1) + \\ &\quad (\hat{h} - \hat{q}\hat{n})\hat{\tilde{d}}(1 + \hat{\Delta}_2) = \\ &\quad 1 + [\hat{\Delta}_1 \quad \hat{\Delta}_2]\begin{bmatrix} (\hat{s} + \hat{q}\hat{\tilde{d}})\hat{n} \\ (\hat{h} - \hat{q}\hat{n})\hat{\tilde{d}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

由(4) 式, 有 $(\hat{s} + \hat{q}\hat{\tilde{d}})\hat{n} = 1 - (\hat{h} - \hat{q}\hat{n})\hat{\tilde{d}}$, 再由(16) 式得

$$\hat{D} = 1 + [\hat{\Delta}_1 \quad \hat{\Delta}_2]\begin{bmatrix} 1 - \hat{e}_1 \\ \hat{e}_1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

而

$$\left\|[\hat{\Delta}_1 \quad \hat{\Delta}_2]\begin{bmatrix} 1 - \hat{e}_1 \\ \hat{e}_1 \end{bmatrix}\right\|_{l_\infty\text{- ind}} \leq \|[\hat{\Delta}_1 \quad \hat{\Delta}_2]\|_{l_\infty\text{- ind}} \left\|\begin{bmatrix} 1 - \hat{e}_1 \\ \hat{e}_1 \end{bmatrix}\right\|_1$$

应用引理 3 即得定理结论。(证毕)

定理 3　具有最优动态性能的闭环系统也是 l_∞ 鲁棒稳定的。

证明略。

需要说明的是, 对于时不变的摄动 l_∞ 稳定的系统一定是 l_2 稳定的, 反之则不成立。

4　例子及仿真

造纸过程中一个混合器的模型[8] 为

$$G(s) = \frac{0.21}{(1.84s + 1)(0.83s + 1)}$$

设计指标是跟踪一个单位阶跃输入(温度), 调节时间 $t_s < 0.6$min, 使得超调量和负超调的绝对值最小。选择采样周期 $t = 0.1$min, 考虑零阶保持器, 离散化模型为

$$G(z) = \frac{0.686 \times 10^{-3}(0.88 + z)z}{(1 - 0.866z)(1 - 0.95z)}$$

离散化模型有两个单位圆内的零点, 无单位圆内的极点。取$N = 5$, 按(11) 式构成如下线性规划问题

$$\begin{cases} \min x_5 \\ \text{s.t.} \quad \sum\limits_{i=0}^{4} x_i(-0.88)^i = 0.5319 \\ \quad x_0 = 1 \\ \quad x_i - x_5 \leq 0, \quad i = 0, 1, \cdots, 4 \\ \quad -x_i - x_5 \leq 0, \quad i = 0, 1, \cdots, 4 \\ \quad -x_5 \leq 0, \quad i = 0, 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

解得 $x_0 = 1, x_1 = 0.5319$, 其余均为零。因此, 最优误差序列为

$$\hat{e}^* = 1 + 0.5319z$$

由最优误差序列 $\hat{e}^*$ 得到

$$\hat{c}^* = \frac{775.36(1 - 0.866z)(1 - 0.95z)}{(1 + 0.5319z)(1 - z)}$$

闭环系统的单位阶跃响应无超调和负超调, 调节时间 $t_s = 0.2$min。

现对系统鲁棒稳定性进行分析。由(6) 及(16) 式得 $\hat{e}_1^* = 1 - 0.4681z - 0.5319z^2$, 进一步得

$$\left\|\begin{matrix} 1 - \hat{e}_1^* \\ \hat{e}_1^* \end{matrix}\right\|_1 = \|\hat{e}_1^*\| = 2$$

由定理 2, 当不确定性满足 $\|\hat{\Delta}_1 \quad \hat{\Delta}_2\|_{l_\infty\text{- ind}} < 0.5$ 时, 闭环系统 l_∞ - 稳定。当 $G(s)$ 无摄动及其放大系数由 0.21 摄动为 $0.21(1 + 0.49) = 0.3129$ 时, 闭

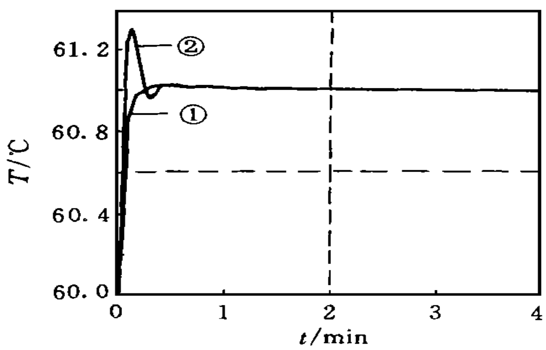

图1 混合器仿真曲线

环系统的单位阶跃响应分别由图1中曲线①、②所示。

注1 按一般文献的惯例, 本文中的 z - 变换为

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) z^{i}$$

按此定义, 一个线性离散时不变系统渐近稳定的条件是: 所有极点在单位圆外。

5 结 语

本文给出一种直接由最优时域指标设计最优控制器的实用线性规划设计方法。当时域指标包括调节时间时, 无穷维线性规划问题就转化为有限维线性规划问题, 且关于零、极点的插值条件可放松到单位圆的边界上。调节时间、衰减率以及超调量是重要的时域指标, 一般情况下都应包括在时域设计指标中。另外, 按本文给出的转化为标准线性规划问题的设计方法, 在设计过程中可省略 Youla 参数化过程, 使控制器设计得以简化。

本文同时得出了最优动态性能指标与鲁棒稳定性指标的一致关系, 从而为这种控制器的工业应用的可行性提供了理论依据。

参 考 文 献

1 M Vidyasagar. Optimal rejection of persisent bounded disturbances. IEEE Trans on Autom Contr, 1986, 31(4): 527- 534

2 M A Dahleh, J B Pearson. l_1 - optimal feedback controllers for MIMO discrete- time systems. IEEE Trans on Autom Contr, 1987, 32(4): 314- 322

3 M A Dahleh, J B Pearson. Minimization of a regulated response to a fixed input. IEEE Trans on Autom Contr, 1988, 33(10): 924- 930

4 I J Bobillo, M A Dahleh. Minimization of the maximum peak to peak gain: The general multiblock problem. IEEE Trans on Autom Contr, 1993, 38(10): 1459- 1482

5 G Deodhare, M Vidyasagar. l_1 - optimality of feedback control systems: The SISO discrete- time case. IEEE Trans on Autom Contr, 1990, 35(9): 1082- 1085

6 G Deodhare, M Vidyasagar. Control systems design via infinite linear programming. Int J Contr, 1992, 55(6): 1351- 1380

7 P M Young. Infinite- dimensional convex optimization in optimal and robust control theory. IEEE Trans on Autom Contr, 1997, 42(10): 1370- 1381

8 孙优贤. 造纸过程的建模与控制. 杭州: 浙江大学出版社, 1993

9 汪树玉. 优化原理、方法与工程应用. 杭州: 浙江大学出版社, 1993

作 者 简 介

刘 翔 男, 1964年生。浙江大学工业控制技术研究所讲师, 博士后。研究领域为计算机控制, 鲁棒控制及自适应控制。

孙优贤 男, 1932年生。浙江大学工业控制技术研究所教授, 中国工程院院士。研究领域为造纸过程的模型化及计算机控制, 鲁棒控制, 容错控制及工厂综合自动化。