应用LMI设计鲁棒严格正实传递函数*

张侃健　冯纯伯　费树岷
(东南大学自动化研究所　南京　210096)

摘　要　讨论稳定的实区间多项式族是否存在一个实多项式使之严格正实化问题。通过线性矩阵不等式(LMI)给出了存在此多项式的充要条件,并利用Matlab中的LMI软件包求解满足条件的不变多项式。具体算例说明了该算法的有效性。

关键词　区间多项式,正实性,线性矩阵不等式(LMI)
分类号　TP 273

Construct Robust Strict Positive Real Function Using LMI

Zhang Kanjian, Feng Chunbo, Fei Shumin
(Southeast University)

Abstract　The problem of whether there exists a real polynomial such that the division of any element, which is in a stable Kharitonov set, by the polynomial is strict positive real functions is discussed. Necessary and sufficient conditions of the existence are given via LMIs, and the polynomial is obtained by using LMI toolbox of Matlab. An example is given to show the effectiveness of the proposed approach.

Key words　interval polynomials, positive realness, linear matrix inequality (LMI)

1　引　　言

正实性是网络理论中的一个重要概念,在研究自适应控制、系统辨识、鲁棒控制等问题时,常常涉及区间传递函数族的鲁棒严格正实问题。现有的这方面成果已经很多,例如,文献[1]研究了区间有理函数严格正实性的有限检验问题;[2]研究了低阶系统鲁棒严格正实镇定问题,指出低阶多项式($n \le 3$) $a(s)$ 和 $b(s)$ 的凸组合保持Hurwitz特性是存在固定多项式 $c(s)$,使 $a(s)/c(s)$, $b(s)/c(s)$ 都是严格正实的充要条件。但仍存在如下基本问题:

对于一个 n 阶首一的稳定区间多项式族 Ω,是否存在同阶不变的首一多项式 $L(s)$,使对 Ω 中任意的多项式 $A(s)$, $A(s)/L(s)$ 都是严格正实的?

文献[3]在自适应问题的基础上研究了区间多项式的严格正实化问题,并提出了上述问题。文中证明了在 $n \le 4$ 时结论是成立的,并认为该命题对任意 n 均可能成立。但对 $n > 4$ 的情况,并未给出肯定的答复,仅仅指出此时存在适当大的正整数 m,使 $A(s)(s+1)^m/L(s)$ 为严格正实的。这里 $L(s)$ 的阶次为 $n+m$。

本文利用线性矩阵不等式及Matlab中的LMI软件包,对任意阶稳定的区间多项式族计算满足条件的 $L(s)$。文中记 n 阶首一的稳定区间多项式集为

$$\Omega = \{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 \mid a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i],\ i = 0, 1, \cdots, n-1\} \tag{1}$$

其中 $\overline{a}_i$, $\underline{a}_i$ 分别表示 a_i 的上、下界,并记其4个顶点多项式分别为

$$A_1(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{1i}s^i = s^n + \cdots + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_0 \tag{2a}$$

$$A_2(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i}s^i = s^n + \cdots + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_1 s + \overline{a}_0 \tag{2b}$$

$$A_3(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{3i}s^i = s^n + \cdots + \overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_1 s + \underline{a}_0 \tag{2c}$$

$$A_4(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{4i}s^i =$$

* 国家攀登计划基金项目(970211017)
1999-03-15收稿,1999-06-09修回

$$s^n + \cdots + \overline{a}_2 s^2 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_0 \tag{2d}$$

2 基本概念

定义 1 对线性连续系统 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, 如果在开左半复平面 $(\mathrm{Re}(s) < 0)$ 上解析, 且对于 $\omega \in [0, \infty]$, $G(\mathrm{j}\omega) + G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega) \geq 0$, 则称 $G(s)$ 是正实的; 称 $G(s)$ 是严格正实的, 如果在闭左半复平面 $(\mathrm{Re}(s) < 0)$ 上解析, 且 $\omega \in [0, \infty)$, $G(\mathrm{j}\omega) + G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega) > 0$; 称 $G(s)$ 是扩展严格正实的, 如果 $G(s)$ 严格正实且 $G(\mathrm{j}\infty) + G^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\infty) > 0$。

引理 1 线性系统 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 稳定且是扩展严格正实的, 当且仅当存在一正定矩阵 X, 使得如下LMI成立。

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}X + XA & C^{\mathrm{T}} - XB \\ C - B^{\mathrm{T}}X & -(D + D^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

这就是扩展严格正实引理[4]。若上述小于号为小于等于号则是正实引理, 现有文献对此讨论得较多[5,6]。

引理 2 设 Ω 为 n 阶稳定的区间多项式族, 则存在 $L(s)$ 使任意 $A(s) \in \Omega$, $A(s)/L(s)$ 严格正实的充要条件是 $A_i(s)/L(s)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 是严格正实的。其中 Ω, $A_i(s)$ 如上节所述。

上述引理在许多文献中均有讨论, 它们仅是文献[5]结论中的特例。

3 问题描述与计算方法

本文对任意阶的稳定区间多项式族 Ω, 计算是否存在同阶不变的首一多项式 $L(s)$, 使得对任意 $A(s) \in \Omega$, $A(s)/L(s)$ 是严格正实的。对此, 我们利用Matlab中的LMI软件包来完成计算。由严格正实性的定义易知, 区间多项式族 Ω 稳定是 $L(s)$ 存在的必要条件。一个周知的结论是 $A(s)/L(s)$ 严格正实与 $L(s)/A(s)$ 严格正实是等价的, 从而根据引理2, 仅需计算 $L(s) = s^n + l_{n-1}s^{n-1} + \cdots + l_0$, 使 $L(s)/A_i(s)$ 是严格正实的。

为便于计算, 需将系统转化到时域中。这里对 $L(s)/A_i(s)$ 采用如下实现

$$\begin{cases} \dot{x} = P_i x + Bu = \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_{i0} & -a_{i1} & \cdots & -a_{in-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = (l - p_i)x + u \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$l = [l_0 \quad l_1 \quad \cdots \quad l_{n-1}]$$

$$p_i = [a_{i0} \quad a_{i1} \quad \cdots \quad a_{i(n-1)}]$$

根据引理1, 上述系统是严格正实的, 当且仅当存在正定矩阵 X_i 使得如下LMI成立。

$$\begin{bmatrix} P_i^{\mathrm{T}}X_i + X_iP_i & (l - p_i)^{\mathrm{T}} - X_iB \\ l - p_i - B^{\mathrm{T}}X_i & -2 \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

于是存在 $L(s)$ 满足上述条件, 当且仅当存在矩阵 X 和 l 满足下列不等式。

$$\begin{bmatrix} P_i^{\mathrm{T}}X_i + X_iP_i & (l - p_i)^{\mathrm{T}} - X_iB \\ l - p_i - B^{\mathrm{T}}X_i & -2 \end{bmatrix} < 0$$

$$X_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{6}$$

以上不等式是关于变量 X 和 l 的线性矩阵不等式, 由这些不等式构成的集合是凸集, 从而可通过Matlab中的LMI软件包来求解。若解 (X, l) 不存在, 则原命题无法成立; 否则, 相应的 $L(s)$ 即为所求解。

4 算 例

考虑形如第1节的6阶稳定区间多项式族 Ω, 其中

$$[\underline{a}_5 \quad \underline{a}_4 \quad \underline{a}_3 \quad \underline{a}_2 \quad \underline{a}_1 \quad \underline{a}_0] =$$
$$[12.103 \quad 98.918 \quad 294.84$$
$$694.59 \quad 1\,123.7 \quad 80.769]$$
$$[\overline{a}_5 \quad \overline{a}_4 \quad \overline{a}_3 \quad \overline{a}_2 \quad \overline{a}_1 \quad \overline{a}_0] =$$
$$[14.624 \quad 100.90 \quad 1\,065.4$$
$$947.15 \quad 1\,276.9 \quad 565.38]$$

根据上节中的算法和Matlab中的LMI软件包, 可求得

$$l = [49.087 \quad 552.01 \quad 1\,559.8$$
$$4\,742.0 \quad 2\,718.0 \quad 1\,253.2]$$

此时 $L(s)$ 的特征值分别为 -34.138, -12.441, $-0.951\,32 \pm 2.847\,5\mathrm{i}$, $-0.302\,51 \pm 0.485\,64\mathrm{i}$, 即 $L(s)$ 是稳定的。相应的 X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ 的特征值分别为

3.23e+5, 2.28e+5, 5.60e+3
2.87e+1, 2.26e+6, 3.65e+6;
5.86e+3, 2.77e+1, 9.17e+4
2.42e+5, 4.94e+5, 2.50e+6;
1.48e+3, 2.38e+1, 6.83e+4
1.03e+6, 2.23e+6, 1.29e+7;
2.64e+2, 7.59, 4.29e+4

2. 05e + 6,　2. 48e + 6,　2. 17e + 7

即 X_i (i = 1, 2, 3, 4) 是正定的。由此验证了 $L(s)$ 即为满足条件的解。

本算例中, 稳定区间多项式族是通过Matlab 随机产生的。

5　结　　论

本文研究任意阶稳定的区间多项式族的正实化问题, 利用线性矩阵不等式给出计算满足条件的首一多项式的充分必要条件。借助于Matlab 中的LMI软件包, 可以方便地解此线性矩阵不等式, 由此即可获得满足条件的多项式。给出的算例说明了本文算法的有效性。

参 考 文 献

1　王龙, 黄琳. 区间有理函数严格正实性的有限检验. 科学通报, 1991, 36: 262—264

2　郁文生, 黄琳. 低阶系统鲁棒严格正实镇定的充分必要条件. 科学通报, 1998, 43: 2275—2279

3　Anderson B D, Dasgupta S, Khargonekar P *et al*. Robust strict positive realness: Characterization and construction. IEEE Trans on Circ Syst, 1990, 37: 869_875

4　郭雷, 忻欣, 冯纯伯. 线性对象的正实控制问题. 自动化学报, 1997, 23: 577—583

5　Haddad W M, Bernstein D S. Explict construction of quadratic Lyapunov function for the small gain, positivity, circle and Popov theorems and their application to robust stability- Part I: Continuous- time theory. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1993, 3: 313_324

6　Sun W, Khargonekar P, Shim D. Solution to the positive real control problem for linear time- invariant systems. IEEE Trans on Autom Contr, 1994, 39: 2034_2046

作 者 简 介

张侃健　男, 1972 年生。东南大学自动化研究所博士生。研究方向为非线性系统的鲁棒控制, 自适应控制和无源性分析等。

冯纯伯　男, 1928 年生。中科院院士, 东南大学自动化研究所教授, 博士生导师。研究方向为系统建模, 自适应、鲁棒及智能化控制理论及应用, 机器人控制等。

费树岷　男, 1961 年生。东南大学自动化研究所教授, 博士。研究方向为非线性控制系统设计与综合, 鲁棒控制, 自适应控制, 时滞系统的设计与综合等。

(上接第 85 页)

6　结　　论

本文在充分利用已知标称系统模型的基础上, 将CMAC 神经网络用于一类具有不确定性的MIMO 非线性系统的鲁棒自适应状态反馈线性化。所提出的控制器具有一个自适应反馈线性化控制律加一个鲁棒控制项的简单结构, 闭环系统的稳定性由李雅普诺夫稳定性理论得到保证。仿真结果表明该方法适合于上述非线性系统的实时自适应控制。

参 考 文 献

1　Yesildirek A, Lewis F L. Feedback linearization using neural networks. Automatica, 1995, 31(11): 1659-1664

2　Commuri S, Lewis F L. CMAC Neural networks for control of nonlinear dynamical systems: Structure, stability and passivity. Automatica, 1997, 33(4): 635-641

作 者 简 介

张友安　男, 1963 年生。烟台海军航空工程学院副教授, 博士。目前的研究领域为神经控制及其应用。

周绍磊　男, 1963 年生。烟台海军航空工程学院自动控制系副主任, 教授。目前的研究领域为神经控制及其应用。

崔平远　男, 1961 年生。哈尔滨工业大学教授, 博士生导师。目前的研究领域为神经网络动力学系统建模与控制。

杨　涤　男, 1937 年生。哈尔滨工业大学教授, 博士生导师。目前的研究领域为飞行器动力学系统建模与非线性控制。