

一类混沌系统的非线性反馈控制*

刘 锋 穆肇骊 蔡远利 邱祖廉
(西安交通大学自动控制工程系 710049)

摘 要 基于微分动力学的不稳定流形定理, 针对二维离散混沌动力系统, 用不稳定流形的函数逼近系统。采取微扰控制方式, 得出非线性反馈控制规律, 稳定双曲平衡点。与 OGY 方法相比, 增大了控制收敛区域, 减少了迭代次数, 并以 Henon 映射为例验证了所提出方法的有效性。

关键词 混沌, 非线性控制, 不稳定流形

分类号 TP 27

Nonlinear Feedback Controlling of the Chaotic System

Liu Feng, Mu Zhaoli, Cai Yuanli, Qiu Zulian
(Xi'an Jiaotong University)

Abstract A method of controlling chaos is presented using ideals of unstable manifold theory, and nonlinear feedback control rules are given analytically. This approach extends the basin of attraction of the target point, and it is capable of stabilizing chaotic systems with weak control actions. The main difference from OGY method is the use of nonlinear approximation for stable manifold of the target point and the chaotic system. An example for the Henon map is given to demonstrate the effectiveness of the method.

Key words chaos, nonlinear control, unstable manifold

1 引 言

混沌作为非线性动态系统所特有的一种运动形式, 极其复杂而又普遍存在。为了利用有益混沌和抑制不利混沌, 人们对混沌的控制展开了深入研究, 并提出不少有效的方法^[1-9]。其中著名的有 Ott, Grebogi 和 Yorke 等人提出的参数微调方法^[7,8] (简称 OGY 方法)。由于 OGY 方法的线性化误差, 导致控制效果不够理想, 迭代次数较多。为此, 文献[4, 5, 8]分别对 OGY 方法的控制规律进行改进, 增强了系统的稳定性。

本文的主要目的是扩大 OGY 方法的控制收敛区域, 并且改进控制规律。应用微分动力学理论中的不稳定流形定理, 采用非线性分析方法, 微调参数稳定混沌系统中的双曲平衡点。具体过程是在被控目标点的某个邻域内, 用不稳定流形的多项式函数近似表示稳定流形和系统, 从而得出非线性反馈控制

规律。当系统进入被控目标点的邻域后, 在目标点的不稳定流形方向上根据控制规律微调参数, 从而稳定被控目标点。最后以 Henon 映射为例验证了本文方法的有效性。

2 问题描述

考虑一类单参数离散二维非线性迭代映射

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu) \quad (1)$$

其中, $x = x(x, y) \in R^2$, $\mu \in R$ 为可调的控制参数。对于连续时间系统, 可通过 Poincare 截面或频闪方法获得迭代映射。假设在 $\mu = \mu_0$ 时系统是混沌的, 不稳定平衡点 $x = x_f |_{\mu=\mu_0}$ 为鞍点, 且嵌入在混沌吸引子中。我们的目标是稳定这个鞍型平衡点。

OGY 方法基于混沌吸引子有极其稠密的不稳定周期轨道(平衡点), 对其某一参数进行微调, 从而达到对某个特定的不稳定周期轨道(平衡点)的稳定控制。当系统进入目标点的一个邻域 $|x - x_f| < r$ 时, 如果 $|\Delta\mu| < \delta\mu_{\max}$, 则取 $\delta\mu = \Delta\mu$; 否则, 取 $\delta\mu = 0$ 。其中

* 1998-10-05 收稿

$$\Delta\mu = \frac{\lambda}{f_u \partial f / \partial \mu} f_u(x_n - x_f(\mu_0))$$

这样可使系统稳定。由于收敛控制区域很小,故迭代次数较多。

鉴于被控目标点为鞍点,在鞍点的局部邻域内,稳定流形上的点会自动趋近平衡点,不稳定流形上的点会远离平衡点。因此可沿稳定流形方向扩大收敛控制区域,将OGY方法的圆域扩大为一矩形区域,如图1所示。

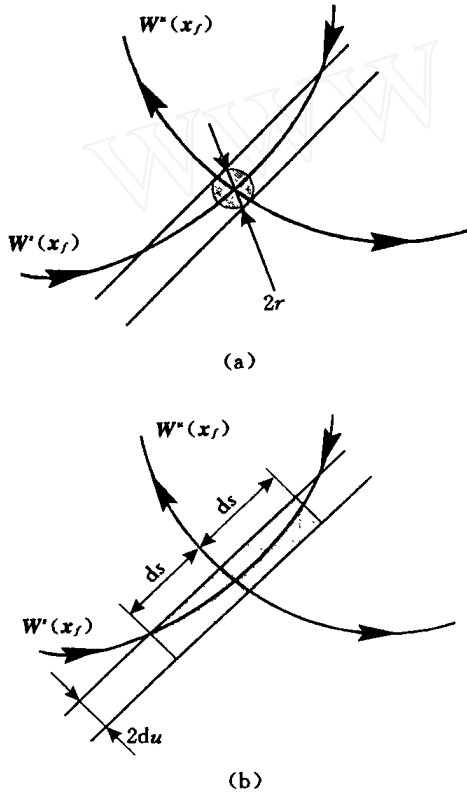


图1 控制的收敛区域
(a) OGY方法的控制收敛区域
(b) 本文方法的控制收敛区域

3 控制思想及控制规律的推导

3.1 不稳定流形定理概述

考虑如下形式的离散动力系统

$$x_{i+1} = f(x_i) \tag{2}$$

其中, $x_i \in R^n$, f 为可微映射。设系统的平衡点为原点, $A = \partial f / \partial x_i |_{x=0}$, 则在原点系统可表示为

$$x_{i+1} = f(x_i) = Ax_i + Q(x_i) \tag{3}$$

显然, $Q(x_i)$ 满足 $Q(0) = Q'(0) = 0$ 。针对系统(3)简要描述不稳定流形定理^[10,11], 它是本文提出的控制方法的理论基础。

假设系统的原点 0 为双曲平衡点, 矩阵 A 中实部绝对值大于 1 的特征值所对应的特征向量张成的空间 E_u 为不稳定子空间, 实部绝对值小于 1 的特征值所对应的特征向量张成的空间 E_s 为稳定子空间。矩阵 A 中没有实部为零的特征值, 也没有实部绝对值为 1 的特征值。根据不稳定流形定理得出: 在系统的双曲平衡态 0 的某个邻域内, 存在一个稳定不变流形 $W^s(x_f)$ 和稳定子空间 E_s 相切, 存在一个不稳定不变流形 $W^u(x_f)$ 和不稳定子空间 E_u 相切, 且存在连续映射 $g: E_u \rightarrow E_s$ 满足 $x_s = g(x_u)$, 其中 $x_u \in E_u$, $x_s \in E_s$ 。

3.2 控制规律的推导

设 Df 为映射 $F(x_n, \mu)$ 在平衡点 x_f 处的雅可比矩阵, λ_u 和 λ_s 分别为 Df 的不稳定和稳定特征值, 满足 $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$, 相应的特征向量分别为 e_u 和 e_s , 它们分别表示平衡点 x_f 的不稳定流形和稳定流形的方向, 令 $T \triangleq (e_u \ e_s)$ 。设 f_u 和 f_s 为行向量, 且满足 $f_u e_u = f_s e_s = 1, f_u e_s = f_s e_u = 0$ 。引入新变量 $u_n \triangleq f_u(x_n - x_f(\mu_0)), s_n \triangleq f_s(x_n - x_f(\mu_0))$ 。取 $c \triangleq \mu - \mu_0$ 为控制参数, 在新的坐标系 (u, s) 下, 原系统(1)可写成

$$u_{n+1} = \lambda_u u_n + u_c c + U(u_n, s_n, c) \tag{4a}$$

$$s_{n+1} = \lambda_s s_n + s_c c + S(u_n, s_n, c) \tag{4b}$$

其中, $U(u_n, s_n, c)$ 和 $S(u_n, s_n, c)$ 分别为 u_n, s_n 和 c 的非线性连续函数(不包含它们的线性项和常数项); u_c 和 s_c 分别为 c 的线性项系数, 且满足

$$(u_c \ s_c)^T = (f_u \ f_s)^T \frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{x=x_f} \tag{5}$$

在映射 F 的作用下, 不稳定流形上的点沿 e_u 方向远离平衡点 x_f , 稳定流形上的点沿 e_s 方向趋向平衡点 x_f 。由 3.1 节知, 在坐标系 (u, s) 的平衡点 $(0, 0)$ 的某一邻域内, s_n 可表示为 u_n 的一个连续函数, 即 $s_n = g(u_n)$ 。在坐标系 (u, s) 下, 控制参数 c 将随 u_n (即系统在不稳定流形方向 e_u 上对平衡点 x_f 的偏移量) 而变化, 形成反馈控制序列 c_n , 故可将 c_n 表示为 u_n 的函数, 即 $c_n = h(u_n)$ 。

在平衡点 x_f 的某一邻域内, 欲使系统稳定, 则要求控制序列 c_n 使得

$$u_{n+1} = k_u u_n, \quad |k_u| < 1 \tag{6a}$$

由于 c_n 的存在, s_n 的收敛性会受到影响, 故同时要求

$$s_{n+1} = k_s s_n, \quad |k_s| < 1 \tag{6b}$$

这里取

$$k_u = k_s = k, \quad |\lambda| < |k| < 1 \tag{7}$$

为了确定未知函数 $h(\bullet)$ 和 $g(\bullet)$, 将它们按自

变量的多项式级数形式展开, 即取

$$h(u_n) = h_1 u_n + h_2 u_n^2 + \dots \quad (8)$$

$$g(u_n) = g_1 u_n + g_2 u_n^2 + \dots \quad (9)$$

分别代入(6a)和(6b)式得

$$u_{n+1} k u_n = \lambda u_n + u_c h(u_n) + U(u_n, g(u_n), h(u_n)) \quad (10a)$$

$$s_{n+1} = k s_n + k g(u_n) = \lambda g(u_n) + s_c h(u_n) + S(u_n, g(u_n), h(u_n)) \quad (10b)$$

两边按 u_n 的不同幂次比较系数可得各阶系数

$$\begin{cases} h_1 = \frac{k - \lambda}{u_c} \\ h_2 = -\frac{(\hat{a} + g_1 \hat{a} + h_1 \hat{a})^2 U}{2u_c} \\ \vdots \end{cases} \quad (11a)$$

$$\begin{cases} g^1 = \frac{s_c h_1}{k - \lambda} \\ g^2 = \frac{2s_c h_2 + (\hat{a} + g_1 \hat{a} + h_1 \hat{a})^2 S}{2(k - \lambda)} \\ \vdots \end{cases} \quad (11b)$$

控制过程中, 用 $g(u_n)$ 和 $h(u_n)$ 的前两项来近似表示 c_n 和 s_n , 即

$$c_n = h(u_n) \quad h_1 u_n + h_2 u_n^2 \quad (12)$$

$$s_n = g(u_n) \quad g_1 u_n + g_2 u_n^2 \quad (13)$$

在坐标系 (u, s) 的平衡点附近, 给出 u 允许的最大偏移量 du , 取

$$ds = \min \{ \max \{ g(v) : g(v) > 0 \}, \max \{ -g(v) : g(v) < 0 \} \} \quad v \in [-du, du] \quad (14)$$

则在矩形区域 $\Pi_1: [-du, du] \quad [-ds, ds]$ 内, 由式(12)得到控制量

$$dc = h_1 du + h_2 du^2 \quad (15)$$

可使系统趋向平衡点。最大控制量

$$d_{Cmax} = \max \{ |h(v)| : v \in [-du, du] \} \quad (16)$$

将坐标系 (u, s) 的矩形区域 Π_1 , 通过坐标变换成坐标系 (x, y) 下的矩形区域 Π_2 (其 4 个顶点由 Π_1 的 4 个顶点变换得到)。如果 d_{Cmax} 超出参数 μ 允许的调节范围, 则减小 du , 直至 d_{Cmax} 在参数 μ 的调节范围之内。

3.3 与 OGY 方法的区别及联系

当 $U(u_n, s_n, c) = S(u_n, s_n, c) = 0$ 时, 方程 4(a) 和 4(b) 变成

$$u_{n+1} = \lambda u_n + u_c c \quad (17a)$$

$$s_{n+1} = \lambda s_n + s_c c \quad (17b)$$

经坐标变换 $(u_n \quad s_n)^T = T^{-1} \delta x_n$ 后得到

$$\begin{aligned} \delta x_{n+1} &= \left. \frac{\partial F(x_n, \mu)}{\partial x_n} \right|_{x=x_f, \mu=\mu_0} \delta x_n + \\ &\quad \left. \frac{\partial F(x_n, \mu)}{\partial \mu} \right|_{x=x_f, \mu=\mu_0} \delta \mu \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)即为原系统(1)在平衡点 x_f 处的线性化方程。当 $k = 0, h_2 = 0$ 时, 由式(15)得到 $dc = -(\lambda_c/u_c) du$, 变换到坐标系 (x, y) 下为

$$dc = -\frac{\lambda_c}{f_u \partial F / \partial \mu} f_u (x_n - x_f(\mu_0))$$

上式即为 OGY 方法的反馈控制量。

OGY 方法获得的是线性反馈控制规律, 本文方法为非线性反馈控制规律。由图 1 可明显看出: 在不稳定流形方向上允许偏移量相同的情况下, 本文的控制规律能有效应用的控制收敛区域比 OGY 方法应用的控制收敛区域扩大了许多, 迭代次数也相应大大减少。

4 仿真实例

以 Henon 映射为例

$$x_{n+1} = \alpha - x_n^2 + \beta y_n \quad (19a)$$

$$y_{n+1} = x_n \quad (19b)$$

其中 α 作为可调的控制参数, 平衡点为

$$x_f = y_f = -\frac{1-\beta}{2} + \sqrt{\frac{(1-\beta)^2}{4} + \alpha}$$

当 $\alpha = \alpha_0 = 0.98, \beta = 0.55$ 时, 系统混沌^[9]且平衡点

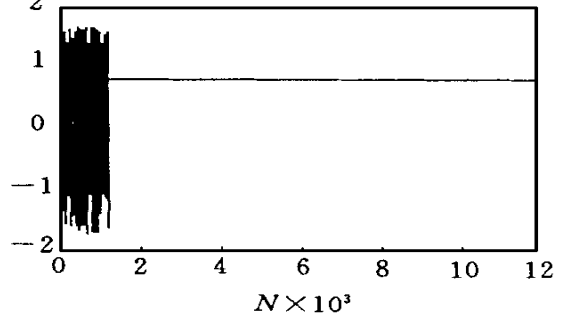


图 2 本文方法的控制效果

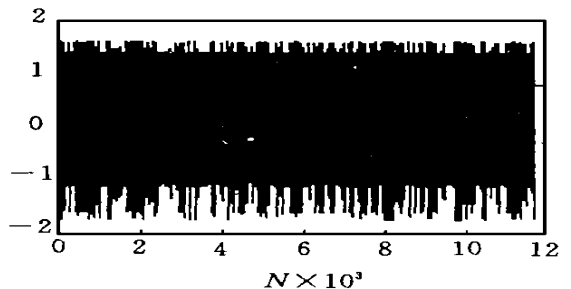


图 3 OGY 方法的控制效果

为鞍点。给定系统在不稳定流形方向上对平衡点的最大允许偏移量为 $du^* = 0.015$, $k = 0.6$, 初值为 $(0.8, -0.2)$ 。分别应用本文方法和OGY方法的控制规律对Henon映射进行控制, 仿真结果如图2, 图3所示。

本文方法的迭代次数约为1200次(最大控制量为0.0159), 而OGY方法的迭代次数约为11640次。当初值为 $(0.1, 0.9)$ 时, 本文方法经过300次迭代就稳定在平衡点处(最大控制量为0.0141), 而OGY方法迭代15000次还不能进入收敛控制区域。

5 结 论

本文针对一类二维离散混沌系统, 应用微分动力学理论, 提出非线性反馈控制方法, 用于微调控制参数, 稳定系统的双曲平衡点, 并且解析推导出非线性反馈控制规律, 得出控制参数范围和收敛控制区域。

OGY方法的收敛控制区域小且对噪声敏感, 效果不理想。本文方法收敛控制区域大, 并能根据外部控制参数 k 进行一定的调整, 抗噪声干扰能力较强, 稳定性较好。根据不稳定流形定理, 本文方法还可应用于高维混沌系统的失稳平衡点的稳定, 同时保留了OGY方法的弱控制特性。

参 考 文 献

- 1 Liao T L, Huang N S. Control and synchronization of discrete-time chaotic and systems via variable structure control technique. *Phys Lett A*, 1997, 234: 262-268
- 2 Alexander, Krishchenko P. Stabilization of equilibrium points of chaotic systems. *Phys Lett A*, 1995, 203: 350-356

- 3 Yang T, Yang L B, Yang C M. Impulsive control of Lorenz system. *Physica D*, 1997, 110: 41-57
- 4 Tan Yi, He Xiantu, Chen Shigang. Controlling chaos using modified Lyapunov exponents. *Chinese Physical Letters*, 1993, 10: 321-345
- 5 Nitsche G, Dressler U. Controlling chaotic dynamical systems using the delay coordinates. *Physica D*, 1992, 58: 153-164
- 6 方锦清. 非线性系统中混沌的控制与同步及其应用前景. *物理学进展*, 1996, 16(1): 1-74
- 7 Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. *Phys Rev Lett*, 1990, 64: 1196-1199
- 8 Shinbrot T, Grebogi C, Ott E *et al.* Using small perturbations to control chaos. *Nature*, 1993, 363: 411-417
- 9 Yagasaki K, Uozumi T. A new approach for controlling chaotic dynamical systems. *Phys Lett A*, 1998, 238: 349-357
- 10 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 1987
- 11 张锦炎, 钱敏. 微分动力系统导引. 北京: 北京大学出版社, 1991

作 者 简 介

刘 锋 男, 1970年生。西安交通大学自动控制工程系博士研究生。主要研究方向为智能控制和非线性控制。

穆肇骊 男, 1973年生。西安交通大学自动控制工程系博士研究生。主要研究方向为现代控制理论与智能控制。

蔡远利 男, 1962年生。1992年于西安交通大学力学博士后流动站出站, 现为西安交通大学自动控制工程系副教授。主要研究方向为混沌, 非线性控制, 智能控制和过程控制等。

邱祖廉 男, 1937年生。西安交通大学自控系教授, 博士生导师。主要研究方向为大滞后系统, 神经网络技术, 智能控制和工业过程计算机控制。