第 15 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2000 年 1 月
Vol 15 No. 1 CONTROL AND DECISION Jan. 2000

多变量系统多级并失展开方法*

李农庄 侯国莲 刘 禾
(华北电力大学动能系 北京 100085)

摘 要 研究多变量系统的并失展开方法, 给出了判断传递函数矩阵能否并失展开的判据。在此基础上, 提出多变量系统的多级并失展开设计方法, 以克服单级并失展开方法应用的局限性。

关键词 多变量系统, 并失展开, 频域方法
分类号 TP 273

Serial Dyadic Expansion Method for Multivariable Control Systems

Li Nongzhuang, Hou Guolian, Liu He
(North China Electricity University)

Abstract Dyadic expansion method for multivariable control systems is studied. The criteria of dyadic transfer-function matrix and the restriction of single dyadic expansion method in application are presented. In order to overcome the restriction, the serial dyadic expansion method for multivariable control systems is proposed. An example is given to demonstrate its application.

Key words multivariable control systems, dyadic expansion, frequency domain method

1 引 言

多变量系统的并失展开方法[1,2], 通过对受控对象传递函数矩阵的并失展开, 将多变量系统化为单变量系统设计。它无须象多数多变量系统频域方法[3,4]那样, 需要寻找对角优势补偿阵或解耦补偿阵, 设计过程相对较为简单。但是该方法仅适用于传递函数矩阵能并失展开的受控对象, 对于非并失式传递函数矩阵对象只能采用并失展开近似, 在应用上受到一定的限制。

本文首先讨论传递函数矩阵能并失展开的条件, 在此基础上, 提出对非并失式传递函数矩阵对象的多级并失展开设计方法, 以克服单级并失展开方法应用上的局限性。

2 单级并失展开

若一 $m \times m$ 传递函数矩阵 $G(s)$ 能展开为

$$G(s) = \sum_{i=1}^{m} g_i(s) w_i v_i^{\mathrm{T}} = W \operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\{g_i(s)\} V \quad (1)$$

其中, $W = [w_1, w_2, \cdots, w_m]$, $V^{\mathrm{T}} = [v_1, v_2, \cdots, v_m]$ 为非奇异常阵; $w_i, v_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为列向量。则 (1) 式称为 $G(s)$ 的并失展开, $G(s)$ 称为并失式传递函数矩阵, 简称 DTM。

对 DTM 传递函数矩阵 $G(s)$, 若采用 DTM 形式的控制器 $K(s)$

$$K(s) = V^{-1} \operatorname*{diag}_{k=1}^{m} k_i(s) W^{-1} \quad (2)$$

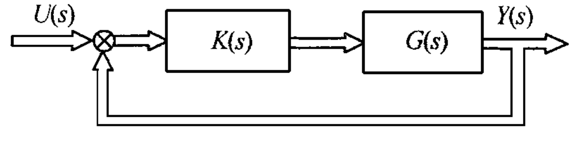

图 1 多变量闭环系统

则闭环传递函数矩阵 (见图 1)

$$T(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) = W \operatorname*{diag}_{k=1}^{M}\left[\frac{g_i(s)k_i(s)}{1 + g_i(s)k_i(s)}\right] W^{-1}$$

式中, 中间对角阵为 m 个单变量系统闭环传递函

* 1998-09-15 收稿, 1998-12-22 修回

数。可以看出，若选择控制器 $K(s)$ 为(2)式结构，则 $m\times m$ 多变量系统可转化为对 m 个单变量系统 $g_i(s)k_i(s)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的设计。常阵 W，W^{-1} 只起输入输出侧变量变换的作用。

上述将多变量系统转化为多个单变量系统设计的方法，仅适用于传递函数矩阵为DTM的对象。下面讨论一个传递函数矩阵在何种条件下才能并失展开为(1)式。记

$$G(s)=\frac{1}{\Delta(s)}M(s)$$

其中

$$M(s)=A_ns^n+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_0s^0 \tag{3}$$

$A_n,A_{n-1},\cdots,A_0$ 为常阵；$\Delta(s)$ 为 $G(s)$ 中各元素分母关于 s 的最小公倍式。因为 $\Delta(s)$ 不影响 $G(s)$ 能否并失展开为(1)式，只需分析 $M(s)$。

如果 $A_n,A_{n-1},\cdots,A_0$ 中某个阵 A_i 的逆存在，则有如下定理：

定理1　$M(s)$ 是DTM的充分必要条件为：所有 $A_i^{-1}A_n,A_i^{-1}A_{n-1},\cdots,A_i^{-1}A_0$ 阵具有一组完备的公共特征向量。

证明　必要性：若 $M(s)$ 为DTM，则

$$A_ns^n+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_0s^0=W\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{m_k(s)\}V$$

即

$$\sum_{j=0}^{n}W^{-1}A_jV^{-1}s^j=\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{m_k(s)\} \tag{4}$$

记

$$m_k(s)=a_{kn}s^n+a_{kn-1}s^{n-1}+\cdots+a_{k0}s^0$$
$$k=1,2,\cdots,m$$

比较(4)式两边 s 的系数阵，得

$$W^{-1}A_jV^{-1}=\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{a_{kj}\},\quad j\neq i \tag{5}$$

$$W^{-1}A_iV^{-1}=\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{a_{ki}\} \tag{6}$$

由(6)式有

$$W^{-1}=\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{a_{ki}\}VA_i^{-1} \tag{7}$$

代入(5)式得

$$\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{a_{ki}\}VA_i^{-1}A_jV^{-1}=\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{a_{kj}\},\quad j\neq i$$

所以

$$VA_i^{-1}A_jV^{-1}=\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\left\{\frac{a_{kj}}{a_{ki}}\right\}$$
$$j=0,1,\cdots,n$$

即 V 的列向量为所有 $A_i^{-1}A_j$ $(j=0,1,\cdots,n)$ 的公共特征向量。

充分性：若 $A_i^{-1}A_0,A_i^{-1}A_1,\cdots,A_i^{-1}A_n$ 有 m 个线性无关的公共特征向量，即有

$$A_i^{-1}A_j=V\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}(\lambda_{kj})V^{-1}$$
$$j=0,1,\cdots,n$$

则

$$M(s)=\sum_{j=0}^{n}A_js^j=A_i\sum_{j=0}^{n}A_i^{-1}A_js^j=$$
$$A_i\sum_{j=0}^{n}V\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}(\lambda_{kj})V^{-1}s^j=$$
$$A_iV\left\{\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda_{kj}s^j\right)\right\}V^{-1}$$

即 $M(s)$ 能并失展开为式(1)。(证毕)

若 $|M(s)|\neq0$，有时可能所有 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$ 均不满秩。此时若 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的某个线性组合 $A=\sum_{j=0}^{n}\mu_jA_j$ (μ_j 为常数)满秩，则有如下定理：

定理2　$M(s)$ 是DTM的充分必要条件为：所有 $A^{-1}A_0,A^{-1}A_1,\cdots,A^{-1}A_n$ 阵有一组完备的公共特征向量。

证明　$M(s)=\sum_{j=0}^{n}A_js^j$ 是否为DTM等价于 $\bar{M}(s)=\sum_{j=0}^{n}A_js^{j+1}$ 是否为DTM。其中

$$\bar{M}(s)=\sum_{j=0}^{n}A_js^{j+1}=$$
$$\sum_{j=0}^{n}A_j(s^{j+1}-\mu_j)+A$$

令 $s^{j+1}-\mu_j=p^{j+1}(j=0,1,\cdots,n)$，则

$$\bar{M}(s)=\sum_{j=0}^{n}A_jp^{j+1}+A=$$
$$\sum_{j=-1}^{n}A_jp^{j+1},\quad A_{-1}=A$$

把 p 看作定理1证明过程中的 s，则定理2得证。

由定理1可知，当(3)式右边多于两项时，传递函数矩阵能并失展开，要求多个不同矩阵具有相同的特征向量，这很难满足。所以一般情况，当 $M(s)$ 中 s 的次数大于等于2时，期望传递函数矩阵 $G(s)$ 并失展开是困难的。这是单级并失展开方法的局限性之所在。

3　多级并失展开

对于不能并失展开的高阶 $M(s)$ 对象，可采用多级并失展开方法。将 $M(s)$ 分解为如下一次多项

式矩阵的乘积形式

$$M(s)=A_n s^n+A_1 s^{n-1}+\cdots+A_0 s^0=(B_1 s+C_1)(B_2 s+C_2)\cdots(B_n s+C_n)$$

式中 $B_i, C_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常阵。因为每个 $B_i s+C_i$ 只含有两项, 因此容易满足定理 1 的条件。并失展开每个 $B_i s+C_i$, 有

$$M(s)=W_1\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{m_{1k}(s)\}V_1\cdots W_n\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{m_{nk}(s)\}V_n=\prod_{j=1}^{n}[W_j\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{m_{jk}(s)\}V_j]$$

则

$$G(s)=\frac{1}{\Delta(s)}M(s)=\prod_{j=1}^{n}\left[W_j\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{g_{jk}(s)\}V_j\right]$$

令控制器

$$K(s)=\prod_{j=n}^{l}\left[V_j^{-1}\operatorname*{diag}_{k=1}^{m}\{k_{jk}(s)\}W_j^{-1}\right]$$

选择 $k_{jk}(s)$ 使得

$$k_{j1}(s)g_{j1}(s)=k_{j2}(s)g_{j2}(s)=\cdots=k_{jm}(s)g_{jm}(s)\quad j=2,3,\cdots,n$$

则闭环传递函数

$$T(s)=[I+G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)=W_1\operatorname*{diag}_{i=1}^{m}\left[\frac{\prod_{j=1}^{n}k_{ji}(s)g_{ji}(s)}{1+\prod_{j=1}^{n}k_{ji}(s)g_{ji}(s)}\right]W_1^{-1}\tag{8}$$

其中, 中间的对角阵为 m 个独立的单变量闭环传递函数。同单级并失展开方法一样, 系统的设计转化为对 m 个单变量系统 $\prod_{j=1}^{n}k_{ji}(s)g_{ji}(s)\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的设计。

4　示　　例

设一受控对象

$$G(s)=\frac{1}{\Delta(s)}\times\begin{bmatrix}12.4s^2+34.2s+23.3 & 18.8s^2+38.1s+19\\16s^2+53.7s+45.2 & 22.7s^2+59.4s+35.2\end{bmatrix}$$

$$\Delta(s)=(s+0.15)(s+0.25)(s+0.3)$$

$M(s)$ 为 2 阶。由定理 1 可判断 $G(s)$ 不能并失展开, 为此将 $G(s)$ 分解为两个一次多项式乘积形式

$$G(s)=\frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix}2s+2 & 1.6s+2.2\\0.8s+0.8 & 3.4s+6.4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3s+4.5 & 5s+4\\4s+6.5 & 5.5s+5\end{bmatrix}$$

经分析, 两项均能并失展开。展开后

$$G(s)=\frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix}1 & 0.6\\0.4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\0 & s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\0 & 2s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0.5 & 2\end{bmatrix}$$

令控制器

$$K(s)=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0.5 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}k_{21}(s) & 0\\0 & k_{22}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}k_{11}(s) & 0\\0 & k_{12}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.6\\0.4 & 3\end{bmatrix}^{-1}$$

选择 $k_{21}(s)=\dfrac{2s+1}{s+2}, k_{22}(s)=1$, 则闭环传递函数

$$T(s)=\begin{bmatrix}1 & 0.6\\0.4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1(s) & 0\\0 & t_2(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.6\\0.4 & 3\end{bmatrix}^{-1}$$

其中

$$t_1(s)=\frac{\frac{1}{\Delta(s)}k_{11}(s)(s+1)(2s+1)}{1+\frac{1}{\Delta(s)}k_{11}(s)(s+1)(2s+1)}$$

$$t_2(s)=\frac{\frac{1}{\Delta(s)}k_{12}(s)(s+2)(2s+1)}{1+\frac{1}{\Delta(s)}k_{12}(s)(s+2)(2s+1)}$$

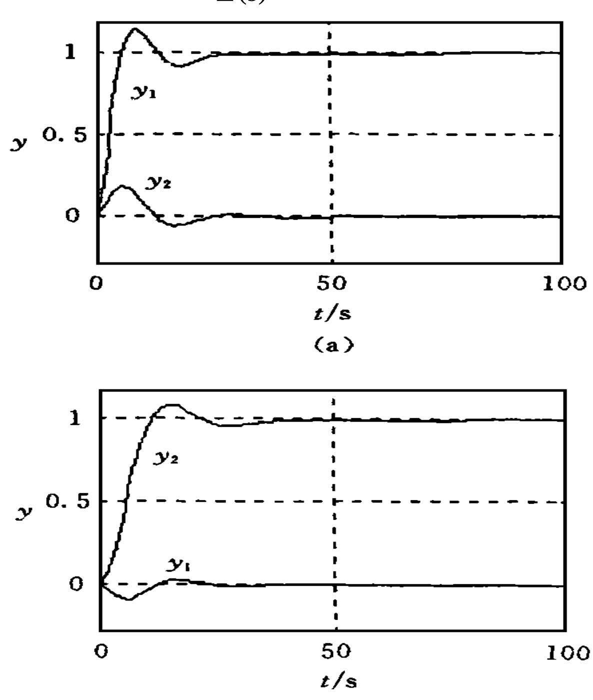

图 2　闭环系统单位阶跃仿真结果

(a) u_1 为单位阶跃, $u_2=0$　(b) u_2 为单位阶跃, $u_1=0$

(下转第 42 页)

进行数据抽取;

Step 4: 检测器对数据结果进行一致性和有效性检测;

Step 5: 将有效结果存入数据定义表指定的目标数据存放区, 提供给DSS 服务。

6 结 语

基于C/S 结构下大型商场POS_ MIS 系统(UNIX 操作系统,Oracle 数据库管理系统), 本文建立了CDSS。该系统为商业企业综合实力评价等商业决策提供了支持, 并取得了令人可信的结果。使用结果表明, CDSS 具有实用性和通用性, 在商业企业中有着良好的前景。

参 考 文 献

1 Eom H B, Wan S Y. Summing- up report of decision support system. Interfaces, 1990, 17(3): 3- 25

2 琚春华. 商业决策支持系统的模型库系统研究. 系统工程, 1997, 15(3): 12—16

3 肖人彬. 决策支持系统的结构与进化. 计算机研究与发展, 1994, 31(4): 48—53

4 张雪凤. 决策支持系统中模型及模型库管理系统. 计算机研究与发展, 1993, 30(3): 36—41

5 琚春华. 一个基于知识的规划型出口茶叶拼配决策支持系统PTBDSS 研究与实现. 计算机研究与发展, 1998, 35(2): 145—149

作 者 简 介

琚春华 男, 1962 年生。1989 年于东南大学自动控制系获硕士学位, 现为杭州商学院计算机与信息工程系副教授。研究方向为决策支持系统, 专家系统和管理信息系统等。

王光明 男, 1945 年生, 1968 年毕业于清华大学, 1986 年获美国纽约理工大学硕士学位, 现为杭州商学院教授。研究方向为信息系统, 决策支持系统等。

(上接第37 页)

对单变量系统 $t_1(s)$, $t_2(s)$, 选择

$$k_{11}(s) = 0.052(1 + 1/15s)$$

$$k_{12}(s) = 0.011(1 + 1/11s)$$

闭环系统的单位阶跃仿真结果如图2 所示。

5 结 语

本文给出了判断传递函数矩阵是否为DTM 的判据, 并从理论上阐明了单级并失展开方法应用上的局限性。与并失展开近似方法相比, 本文提出的多变量系统的多级并失展开方法不需要分频段设计控制器和并失近似分析, 易于实际应用。

参 考 文 献

1 Owens D H. Dyadic expansion for the analysis of linear multivariable systems. IEE Proc, 1974, 121(7): 713_ 716

2 Owens D H. Feedback and multivariable systems. London: Peter Peregrinus, 1978

3 Rosenbrock H H. Computer_ aided control system design. London: Academic Press, 1974

4 王诗宓. 多变量控制系统的分析和设计. 北京: 中国电力出版社, 1996

作 者 简 介

李农庄 男, 1957 年生。华北电力大学(北京)动能系副教授, 硕士。研究方向为火电厂自动控制, 多变量控制系统, 智能控制等。

侯国莲 女, 1967 年生。华北电力大学(北京)动能系副教授, 博士。研究方向为火电厂自动控制, 多变量控制系统, 模糊控制理论及应用等。

刘 禾 男, 1962 年生。华北电力大学(北京)动能系副教授, 博士。研究方向为计算机视觉, 控制理论与应用等。