

# 反馈控制器降阶的约束与聚集方法\*

陈雪波 李小华

(鞍山钢铁学院电子与信息工程学院 114002)

**摘要** 根据线性随机系统的包含原理, 研究系统状态反馈和输出反馈控制器的降阶问题, 给出了系统控制器降阶的约束和聚集两类条件。以一个 18 阶系统降阶反馈控制器的设计为例, 说明该方法既简化了控制器的结构, 又不失全阶控制器的主要性能。

**关键词** 包含原理, 控制器降阶, 约束, 聚集

**分类号** TP 271

## Restriction and Aggregation Approach to the Feedback Controller Order Reduction

Chen X uebo, L i X iaohua

(Anshan Institute of Iron and Steel Technology)

**Abstract** The order reduction problem of the system state feedback and output feedback controllers is discussed according to the inclusion principle of linear stochastic systems. Two kinds of conditions, restriction and aggregation, are presented for the controller order reduction. By designing the order reduced feedback controller for an 18- order system as an example, it is shown that the approach can simplify the structure of controllers without losing the main properties of all order controllers.

**Key words** inclusion principle, controller order reduction, restriction, aggregation

### 1 引言

包含原理<sup>[1,2]</sup>作为简化大系统和复杂系统分析和设计的一类方法, 已有较多的应用。首先, 应用包含原理将具有重叠结构的系统扩展, 得到重叠部分分解的扩展空间, 并由包含条件将扩展空间中所设计的分散控制器和观测器收缩回原系统<sup>[3,4]</sup>; 其次, 考虑高阶系统模型的降阶问题, 根据包含原理条件收缩原系统, 在原系统收缩空间中设计的控制器和观测器可直接作为原系统的降阶控制器和观测器。然而, 如果系统的模型不宜降阶, 从系统控制器的实现角度看, 其降阶控制器和观测器的设计则尤其重要。包含原理可用于这类降阶控制器和观测器的设计。对原系统进行反馈控制设计, 可利用系统模型降阶相关的包含条件收缩最优控制和观测的结果, 得到降阶的控制器和观测器, 再实现原系统。一个系统包含另一个系统, 即包含了其所具有的性质(反馈控制

性质也包含其中)。

文献[5]讨论了系统观测器包含的约束与聚集条件。但观测器包含的对偶问题, 即涉及控制器包含和降阶方面的讨论和应用却较少。本文首先定义系统反馈控制器的包含, 然后给出状态反馈和输出反馈控制器包含或降阶的约束和聚集两类条件。最后以一个 18 阶的空间结构系统<sup>[6]</sup>为例, 由给出条件设计其降阶反馈控制器, 直接实现原系统, 并与全阶控制器进行比较。

### 2 系统与控制器

考虑如下线性随机系统  $S$  及其状态反馈控制器  $C_x$  和输出反馈控制器  $C_y$

$$\left\{ \begin{array}{l} S: \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma \xi \\ y = Cx + \eta \\ C_x: u = -Kx + v \\ C_y: u = -Hy + v \end{array} \right. \quad (1)$$

其中,  $x(t) \in R^n$  和  $y(t) \in R^l$  分别是系统  $S$  的状态

\* 1999- 04- 22 收稿, 1999- 08- 20 修回

和输出向量,  $K$  和  $H$  分别是状态反馈增益阵和输出反馈增益阵;  $v(t) \in R^m$  是与系统输入  $u(t)$  同维的闭环系统参考输入向量;  $\xi(t) \in R^m$  和  $\eta(t) \in R^l$  分别是系统输入和输出的白噪声随机扰动, 其均值为零, 方差分别为  $R_\xi \delta(t_1 - t_2), R_\eta \delta(t_1 - t_2)$ , 且与初始状态向量  $x_0$  (其均值为  $m_0$ ) 互不相关. 与(1)类似, 定义  $S$  的降阶模型  $\bar{S}$  及其反馈控制器  $\bar{C}_x$  和  $\bar{C}_y$  分别为

$$\begin{cases} \bar{S}: \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u} + \bar{\Gamma} \bar{\xi} \\ \bar{y} = \bar{C} \bar{x} + \bar{\eta} \\ \bar{C}_x: \bar{u} = -\bar{K} \bar{x} + \bar{v} \\ \bar{C}_y: \bar{u} = -\bar{H} \bar{y} + \bar{v} \end{cases} \quad (2)$$

其中各变量均与(1)一致, 仅用符号“-”加以区别. 一般总有  $\bar{n} \leq n, \bar{m} \leq m, \bar{l} \leq l$ .

### 3 状态反馈控制器的降阶

**定义 1** 如果  $(\bar{S}, \bar{C}_x)$  是  $(S, C_x)$  的一个降阶模型, 则有行满秩聚集阵  $Q_{\bar{m} \times m}$ , 当  $\bar{v}(t) = Qv(t), t \in [t_0, \infty)$  时, 使得

$$\begin{cases} -\bar{K} \bar{m}_x(t) + \bar{v}(t) = Q[-Km_x(t) + v(t)] \\ \bar{K} R_{\bar{x}}(t_1 - t_2) \bar{K}^T = QKR_x(t_1 - t_2)K^T Q^T \end{cases} \quad (3)$$

则称  $\bar{C}_x$  是  $C_x$  的降阶状态反馈控制器. 其中,  $m_x(t), m_{\bar{x}}(t)$  分别是状态  $x(t), \bar{x}(t)$  的均值;  $R_x(t_1 - t_2), R_{\bar{x}}(t_1 - t_2)$  分别是对应的协方差阵;  $t_1, t_2 \in [t_0, \infty)$ .

**定理 1** 若  $\bar{S}$  是  $S$  的一个降阶模型, 即满足包含条件<sup>[1-4]</sup>, 且存在一组满秩的约束和聚集阵  $\{V_{n \times \bar{n}}, Q_{\bar{m} \times m}, R_{m \times m}\}$ , 当  $m_0 = V\bar{m}_0, u(t) = Ru(t), t \in [t_0, \infty)$  时, 有

$$\bar{K}A = QKAV, \quad \bar{K}AB = QKABR \quad (4)$$

则  $\bar{C}_x$  是  $C_x$  的降阶状态反馈控制器.

**证明** 系统  $S$  和  $\bar{S}$  状态解的均值分别为

$$m_x(t) = e^{A(t-t_0)}m_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$m_{\bar{x}}(t) = e^{\bar{A}(t-t_0)}\bar{m}_0 + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B}\bar{u}(\tau)d\tau$$

代入(3)中第一式, 展开矩阵指数序列, 并由条件比较等式两端即得(4)式.

**定义 2** 如果  $\bar{S}$  是  $S$  的一类约束或聚集, 则  $\bar{C}_x$  是  $C_x$  相应类型的约束或聚集.

**定理 2** 若存在一组满秩的聚集和约束阵

$$\{U_{\bar{n} \times n}, V_{n \times \bar{n}}, Q_{\bar{m} \times m}, R_{m \times m}\}$$

其中,  $UV = I_n, QR = I_m$ , 当  $t \in [t_0, \infty)$  时, 有下列条件之一成立:

1)  $\bar{S}$  是  $S$  的 I 或 III 型约束, 且

$$R\bar{K} = KV \quad (5)$$

2)  $\bar{S}$  是  $S$  的 II 或 IV 型约束, 且

$$\bar{K} = QKV \quad (6)$$

3)  $\bar{S}$  是  $S$  的 I 或 III 型聚集, 且

$$\bar{K}U = QK \quad (7)$$

4)  $\bar{S}$  是  $S$  的 II 或 IV 型聚集, 且

$$R\bar{K}U = K \quad (8)$$

则称  $C_x$  可收缩为降阶的状态反馈控制器  $\bar{C}_x$ .

**证明略.**

由定理 2 知, 当系统  $S$  是  $\bar{S}$  的 II, IV 型约束时, 状态反馈控制器可直接收缩; 而在其它条件下, 状态反馈控制器只能间接收缩.

### 4 输出反馈控制器的降阶

**定义 3** 如果  $(\bar{S}, \bar{C}_y)$  是  $(S, C_y)$  的一个降阶模型, 则有行满秩聚集阵  $Q_{\bar{m} \times m}$ , 当  $\bar{v}(t) = Qv(t), t \in [t_0, \infty)$  时, 使得

$$\begin{cases} -\bar{H} \bar{m}_y(t) + \bar{v}(t) = Q[-Hm_y(t) + v(t)] \\ \bar{H} R_{\bar{y}}(t_1 - t_2) \bar{H}^T = QHR_y(t_1 - t_2)H^T Q^T \end{cases} \quad (9)$$

则称  $\bar{C}_y$  是  $C_y$  的降阶输出反馈控制器. 其中,  $m_y(t), m_{\bar{y}}(t)$  分别是输出  $y(t), \bar{y}(t)$  的均值;  $R_y(t_1 - t_2), R_{\bar{y}}(t_1 - t_2)$  分别是对应的协方差阵;  $t_1, t_2 \in [t_0, \infty)$ .

**定理 3** 若  $\bar{S}$  是  $S$  的一个降阶模型, 即满足包含条件<sup>[1-4]</sup>, 且存在一组满秩的约束和聚集阵

$$\{V_{n \times \bar{n}}, Q_{\bar{m} \times m}, R_{m \times m}\}$$

当  $m_0 = V\bar{m}_0, u(t) = Ru(t), t \in [t_0, \infty)$  时, 有

$$\bar{H}CA = QHCAV, \quad \bar{H}CAB = QHCABR \quad (10)$$

则  $\bar{C}_y$  是  $C_y$  的降阶输出反馈控制器.

**证明** 系统(1)和(2)输出的均值分别为

$$m_y(t) = Cm_x(t), \quad m_{\bar{y}}(t) = C\bar{m}_x(t)$$

代入(9)中第一式, 根据定理 1 证明, 则有(10)成立.

**定义 4** 如果  $\bar{S}$  是  $S$  的一类约束或聚集, 则  $\bar{C}_y$  是  $C_y$  相应类型的约束或聚集.

**定理 4** 若存在一组满秩的聚集和约束阵

$$\{Q_{\bar{m} \times m}, R_{m \times m}, S_{\bar{l} \times l}, T_{l \times \bar{l}}\}$$

其中,  $QR = I_m, ST = I_l$ , 使得:

1)  $\bar{S}$  是  $S$  的 I 型约束或 IV 型聚集, 且

$$R\bar{H} = HT \quad (11)$$

2)  $\bar{S}$  是  $S$  的 II 型约束或 III 型聚集, 且

$$\bar{H} = QHT \quad (12)$$

3)  $\bar{S}$  是  $S$  的 III 型约束或 II 型聚集, 且

$$R\bar{H}S = H \quad (13)$$

4)  $\bar{S}$  是  $S$  的 IV 型约束或 I 型聚集, 且

$$\bar{H}S = QH \quad (14)$$

则称  $C_y$  可收缩为降阶的输出反馈控制器  $\bar{C}_y$ 。

证明略。

由定理 4 知, 当系统  $S$  是  $\bar{S}$  的 II 型约束或 III 型聚集时, 输出反馈控制器可直接收缩; 而在其它条件下, 输出反馈控制器只能间接收缩。

### 5 算 例

空间结构系统<sup>[6]</sup> 形如  $S$ , 其中

$$A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_9]$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -d \end{bmatrix}$$

$$B = \Gamma = [B_1^T, B_2^T, \dots, B_9^T]^T$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{i1} & b_{i2} \end{bmatrix}$$

$$C = \text{diag}[C_1, C_2, \dots, C_9]$$

$$C_i = [c_{i1} \quad 0]$$

$$R_\xi = 0.25 \times 10^{-4} I_2$$

$$R_\eta = 10^{-4} I_9$$

具体数据如表 1 所示。

表 1 系统数据表

$i$	$\omega$	$d_i \times 10^{-2}$	$b_{i1} \times 10^{-4}$	$b_{i2} \times 10^{-4}$	$c_{i1}$
1	0	0	3.46	3.46	1
2	0.148	0	-9.12	34.4	1
3	0.288	0	-1.3	0.548	1
4	1.414	1.414	-1.4	36	0.1
5	1.829	1.829	-4.07	-34.7	0.1
6	2.846	2.846	28.5	39.5	0.1
7	3.831	3.831	71.8	-24.6	0.1
8	8.798	8.798	$-8 \times 10^{-4}$	$-1.15 \times 10^{-5}$	0.1
9	9.613	9.613	-0.172	$-4.13 \times 10^{-3}$	0.1

当  $x_0 = [1 \quad 0_{1 \times 17}]^T, v(t) = 0$  时, 取性能指标加权阵  $Q_x = C^T C, Q_u = 10^{-5} I_2$ , 对  $S$  进行 LQG 控制, 得  $C_x$  的最优增益阵  $K$  和最优观测增益阵  $L$  分别为

$$K = \begin{bmatrix} 0.2993 & 1.3960 & -0.0936 & -0.2141 \\ 0.1019 & 0.3971 & 0.2949 & 0.3884 \\ -0.2957 & 0.3117 & -0.0036 & 0.0022 \\ -0.0670 & 0.0211 & 0.0226 & 0.0081 \\ 0.0014 & -0.0027 & 0.0015 & 0.0040 \\ -0.0178 & -0.0075 & 0.0077 & 0.0046 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0034 & 0.0043 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0032 & -0.0013 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$L = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0.0221 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0120 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0000 \\ \hline 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ 0.0000_{5 \times 6} \\ \\ \\ 0.0000_{13 \times 3} \end{matrix}$$

考虑系统  $S$  及其降阶模型  $\bar{S}$  的状态包含, 由于  $A_1, A_2$  和  $A_3$  不稳定,  $\bar{S}$  必须包含其对应的状态, 则  $n > \bar{n} > 6, m = \bar{m}, l = \bar{l}$ , 或  $Q = R = I_m, S = T = I_b$ 。根据  $S$  的 Gramian 阵的奇异值大小排列和包含原理的计算, 当取  $\bar{n} = 8$  时, 得到状态的约束阵和聚集阵为

$$V = \text{diag}[I_6, V_s], \quad U = \text{diag}[I_6, U_s]$$

$$V_s^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0.0112 & 0.0160 & -0.0005 & 0.0006 \\ -0.0114 & 0.0159 & -0.0005 & -0.0007 \\ 0.0001 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$U_s =$$

$$\begin{bmatrix} 44.0508 & 31.6121 & -1.4893 & 0.5661 \\ -44.4968 & 30.9811 & -1.4371 & -0.6712 \\ 0.1689 & -0.0298 & -0.0423 & 0.0039 \\ 0.1772 & 0.0306 & -0.0431 & -0.0043 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

由式(5)或(6)得降阶的  $\bar{C}_x$  增益阵为

$$\bar{K} = KV =$$

$$\begin{bmatrix} 0.2993 & 1.3960 & -0.0936 & -0.2141 \\ 0.1019 & 0.3971 & 0.2949 & 0.3884 \\ -0.2957 & 0.3117 & 0.0000 & 0.0001 \\ -0.0670 & 0.0211 & 0.0004 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^3$$

由文献[5]的观测器包含条件得降阶观测增益阵为

$$\bar{L} = UL =$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0.0221 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0120 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 & -0.0003 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ 0.0000_{8 \times 5} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

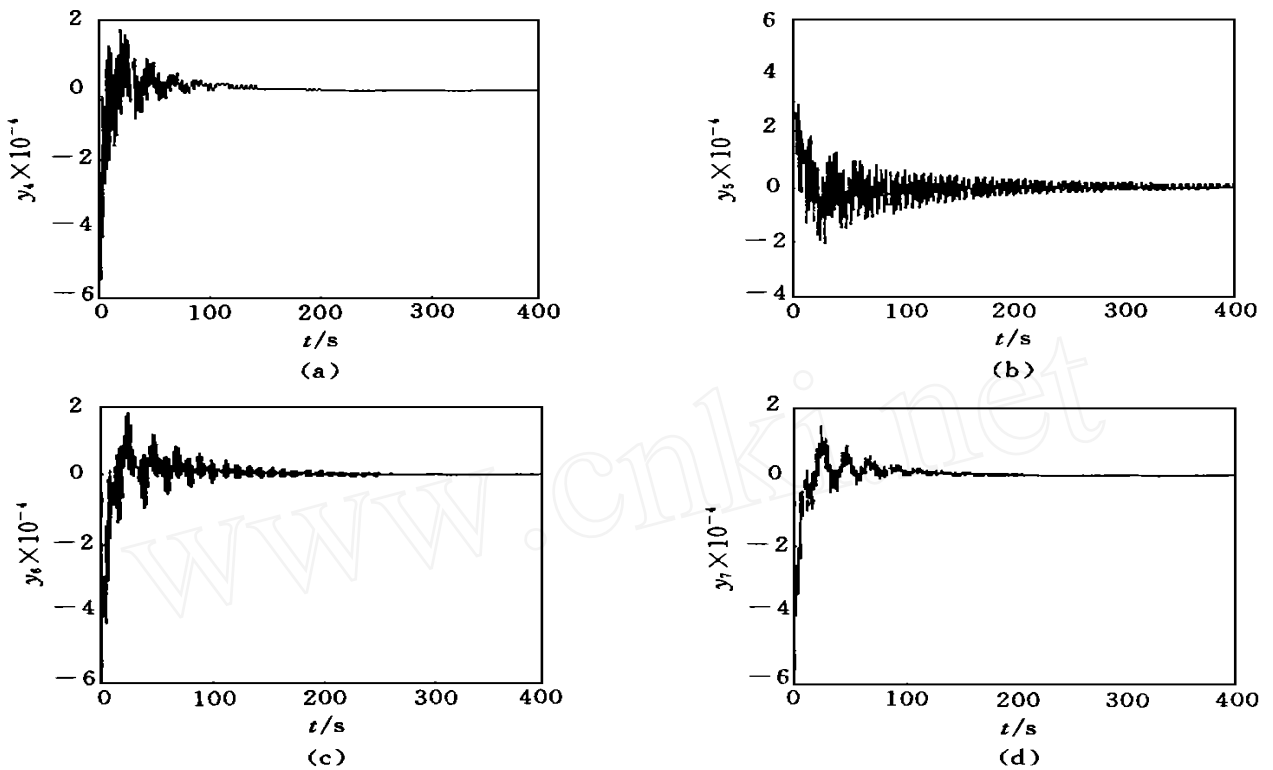


图1 系统的部分输出响应曲线

- (a) 第4对输出响应 (b) 第5对输出响应  
(c) 第6对输出响应 (d) 第7对输出响应

$\bar{C}_x$  的增益阵  $\bar{K}$  和观测增益阵  $\bar{L}$  作为次优LQG控制, 直接作用于系统  $S$ , 其最优与控制器降阶的次优LQG控制的9对输出中的第4至第7对响应曲线如图1所示。最优与次优曲线几乎是重叠的,  $y_4, y_5, y_6, y_7$  受到随机扰动影响较大,  $y_5$  的次优曲线比最优曲线波动较强。降阶控制的次优度(最优与次优LQG控制性能指标之比)  $\mu_8 = 0.9998$ , 控制效果逼近最优控制, 而控制器的阶次比原来降低了55.6%, 结果好于文献[6]的结果。

### 参考文献

- Ikeda M, Siljak D D, White D E. An inclusion principle for dynamic system. IEEE Trans on AC, 1984, 29(3): 244- 249
- 陈雪波, Stankovic S S. 离散随机系统的包含原理. 自动化学报, 1997, 23(1): 94- 98
- Chen X B, Stankovic S S. Overlapping decomposition and decentralized LQG control for interconnected power

system s. In: Proc of IEEE SMC. Beijing, 1996 3: 1904- 1909

- Stankovic S S, Chen X B, Siljak D D. Stochastic inclusion principle applied to decentralized overlapping suboptimal LQG control. In: Proc 13th IFAC Congress San Francisco, 1996 L: 7- 12
- 陈雪波, 王成玖. 状态观测器的约束与聚集. 控制与决策, 1996, 11(4): 475- 479
- Sezer M E, Siljak D D. Validation of reduced-order models for control systems design. J of Guidance Control and Dynamics, 1982, 5: 430- 437

### 作者简介

陈雪波 男, 1960年生。1994年在南斯拉夫贝尔格莱德大学获技术科学博士学位, 现为鞍山钢铁学院电子与信息工程学院教授。主要研究方向为大系统, 复杂系统和多变量系统的结构分析与控制。

李小花 女, 1964年生。1997年在鞍山钢铁学院获工学硕士学位, 现为该校电子与信息工程学院副教授。主要研究方向为大系统的结构分析与控制。