

# 广义模糊推理与广义模糊 RBF 神经网络\*

鲍 鸿 黄心汉

李锡雄

(华中理工大学自动控制工程系 武汉 430074) (广东工业大学电气工程及自动化系)

**摘 要** 在提出广义模糊推理概念的基础上, 提出并分析了广义模糊径向基(RBF)神经网络模型, 给出了该网络的广义学习算法。仿真结果验证了广义模糊 RBF 神经网络模型具有良好的函数逼近能力, 所提出的学习算法是可行和有效的。

**关键词** 模糊推理, 神经网络, 模糊神经网络

**分类号** TP 273

## Generalized Fuzzy Inference and Generalized Fuzzy RBF Networks

Bao Hong, Huang Xinhuan

Lixiong

(Huazhong University of Science and Technology) (Guangdong University of Technology)

**Abstract** A new concept of generalized fuzzy inference and the generalized fuzzy RBF network model are presented. The generalized learning algorithm of this network model is derived. Simulation results show that the general fuzzy RBF network has the ability to approximate arbitrary nonlinear function with an arbitrary degree of accuracy, and the learning algorithm presented is effective and feasible.

**Key words** fuzzy inference, neural networks, fuzzy neural network

### 1 引 言

在模糊控制中, 最常见的模糊逻辑系统有三类<sup>[1]</sup>: 纯模糊逻辑系统, 高木—关野(Takagi-Sugeno)模糊逻辑系统和具有模糊化和反模糊化的模糊逻辑系统。在模糊规则的表示上, 它们均可写成“IF - THEN”的形式。如果定义相对合成  $\text{Sup} - *$  =  $\phi$ , 定义结论函数  $f(\bar{y}) = y^T$ , 则三类模糊逻辑系统具有统一的推理形式

$$y = \bigoplus_{i=1}^m f(\bar{y}) \phi \quad (1)$$

对于不同的推理系统,  $\phi$ 是一致的, 所不同的只是  $f(\bar{y})$ 。由于 T - S 型模糊系统用线性方程形式的  $f(\bar{y})$  代替了一般模糊系统中的模糊数, 使系统可用较少的规则描述一个复杂的非线性系统。如果从空间的角度看, 在一个具体规则中, 第一、二类的  $f(\bar{y})$  是一个平行于输入平面的超平面; 而 T - S 系统中

的  $f(\bar{y})$  是一个具有任意斜率和截距的超平面。当用这两种超平面去逼近一个非线性曲面时, 在一定的超平面数下, T - S 系统能达到更好的逼近效果。将此结论进行推广, 用超曲面去逼近任意的非线性曲面, 可以预见其效果将比超平面更为显著。据此推导出广义模糊推理的概念。

本文在提出广义模糊推理概念的基础上, 提出了广义模糊径向基(RBF)神经网络, 以利用网络强大的运算能力归纳模糊推理系统的规则。同时, 对广义的网络学习算法进行推导和讨论。仿真结果验证了该学习算法的有效性, 并表明该网络模型具有良好的函数逼近能力。

### 2 广义模糊推理

**定义 1** 广义模糊推理规则定义为

$$R^{(l)}: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l, x_2 \text{ is } F_2^l, \dots, x_n \text{ is } F_n^l \\ \text{THEN } y^l = G^l(x) \quad (2)$$

式中  $G(x)$  表示规则  $R^{(l)}$  的局域函数。为运算方便, 往往取  $G(x)$  为多项式形式。

\* 广东省自然科学基金项目(960101)

1998 - 10 - 12 收稿, 1998 - 12 - 15 修回

**定理 1** 当采用单值模糊化、中心平均反模糊化和  $T$  范数运算时,由式(2)定义的模糊推理输出为

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m y_i \left[ \prod_{j=1}^n \mu_{F_j^i}(x_j) \right]}{\sum_{i=1}^m \left[ \prod_{j=1}^n \mu_{F_j^i}(x_j) \right]} = \sum_{i=1}^m G^i(x) \phi_i \quad (3)$$

该广义模糊推理模型是模糊推理系统的一种统一形式。它不仅包括了上述三种模糊推理系统,而且引出更为广泛的推理方式。

### 3 广义模糊 RBF 神经网络

#### 3.1 RBF 网络与广义模糊推理系统的函数等价性

RBF 网络是一种品质优良的网络。已经证明 RBF 网络可在任意精度下逼近任意的非线性函数,且不存在局部最小问题<sup>[2]</sup>。文献[3,4]详细证明了模糊推理系统与 RBF 神经网络的函数等价性。本文则证明广义模糊推理系统与 RBF 神经网络也具有函数等价性。

**定理 2** 归一化的 RBF 神经网络与广义模糊推理系统在满足下列条件时具有函数等价性:

- 1) RBF 神经网络的中心值个数等于广义模糊推理系统“IF—THEN”规则条数;
- 2) 广义模糊推理系统各模糊子集的隶属函数与 RBF 网络的径向基函数相同;
- 3) RBF 神经网络和广义模糊推理系统采用相同的总输出形式。

#### 3.2 广义模糊 RBF 神经网络

**定义 2** 广义模糊 RBF 神经网络(GFRBFN)定义为完成模糊合成推理映射  $M_1$  和输出映射  $M_2$ ,且输出层权函数为输入变量函数的 RBF 神经网络。

这里  $M_1$  映射是从输入变量空间到模糊规则合成空间的映射,表达了模糊规则的 IF 部分。它包括模糊子映射和规则合成子映射,由图 1 的 1-3 层完成,其输出为合成规则函数

$$\phi_i = \frac{\mu_i(X - \bar{c}_i)}{\sum_{i=1}^m \mu_i(X - \bar{c}_i)}$$

$M_2$  映射是从模糊规则合成空间到输出空间的映射,它表达模糊规则的 THEN 部分,由图 1 的第 4 层完成,输出为

$$y = \sum_{i=1}^m \phi_i G_i(X)$$

其中输出层权函数  $G_i(X)$  为多项式形式。

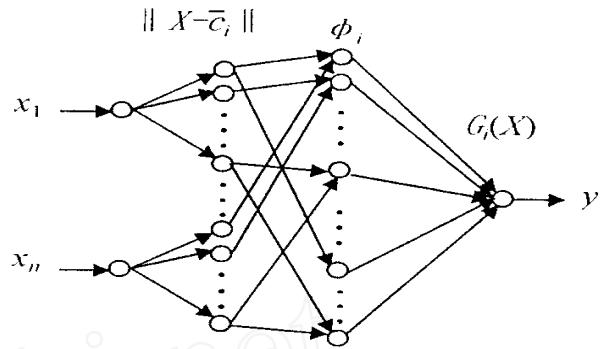


图 1 广义模糊 RBF 神经网络模型

### 4 输入空间模糊最优聚类算法

#### 4.1 前提参数的模糊最优聚类算法

对于任意给定的非线性函数  $f(x)$ ,当用 GFRBFN 对其重构时,我们希望网络输出  $y(x)$  满足

$$E = f(x) - y(x) = \min \quad (4)$$

式(4)误差由两部分组成:1)网络中心值和径向基函数形状估计引起的结构参数误差;2)网络局部方程估计引起的结论参数误差。为体现这两类误差,设标准误差函数<sup>[5]</sup>

$$\left\{ \begin{aligned} J(\mu, \bar{c}, \alpha) &= p_1 \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^m \mu_i(t)^y (X(t) - \bar{c}_i)^2 \right] + \\ & p_2 \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^m \mu_i(t)^y e_i(t)^2 \right] \\ e_i(t) &= y(t) - y^l(t) = \\ & y(t) - [\alpha_0^i + \alpha_1^i \mathcal{Q}(t) + \dots + \alpha_q^i \mathcal{Q}_q(t)] = \\ & y(t) - \mathcal{Q}(t) \alpha^i \\ \mathcal{Q}(t) &= [1 \quad \mathcal{Q}(t) \quad \mathcal{Q}^2(t) \quad \dots \quad \mathcal{Q}^q(t)] \\ \alpha^i &= [\alpha_0^i \quad \alpha_1^i \quad \dots \quad \alpha_q^i] \\ \mathcal{Q}(t) &= [x_1(t)^i, \dots, x_n(t)^i, x_1(t)x_2(t)^{i-1}, \\ & \dots, x_{n-1}(t)^{i-1}x_n(t)], \quad i = 1, 2, \dots, q \\ \alpha^i &= [\alpha_{s_1}^i, \dots, \alpha_{s_q}^i], \quad s_i = C_{i+n-1}^i, \quad i = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \right. \quad (5)$$

其中  $y^l(t) = \mathcal{Q}(t) \alpha^i$  为网络的第  $l$  个局域方程估计。 $\mathcal{Q}(t) \alpha^i$  是局域方程中的  $i$  次齐次多项式,  $\mathcal{Q}(t)$  是输入变量的  $i$  次齐次项矢量,  $\alpha^i$  是输入变量  $i$  次齐次项矢量的系数,  $q$  为多项式最高次数;  $X(t) - \bar{c}_i$  为第  $t$  个样本对于第  $l$  个中心  $\bar{c}_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}]^T$  的距离,  $l = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  为中心值个数即规则个数,  $t = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  为样本总数;  $\mu_i(t)$  为第  $t$  个样本对于

第  $l$  个中心的隶属度, 对于所有的  $t$ ,  $\mu_l(t) = 1, Y$  为宽度函数, 它直接影响隶属函数的形状

式(5)中的第一项达到最小, 对应中心值的最优取值; 第二项达到最小, 对应网络局域方程达到最优估计。通过选取优化系数  $p_1$  和  $p_2$  的值, 调整优化的侧重程度。

将式(5)分别对  $\mu(t), \bar{c}_l$  和  $\alpha$  求导, 使其最小化, 可得如下定理:

**定理 3** 式(5)达到最小的条件是

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{c}_l &= \frac{\sum_{t=1}^N \mu_l(t)^Y X(t)}{\sum_{t=1}^N \mu_l(t)^Y} \\ \alpha &= \frac{\sum_{t=1}^N \mu_l(t)^Y y(t) \mathcal{Q}(t)}{\sum_{t=1}^N \mathcal{Q}(t) \mu_l(t)^Y \mathcal{Q}(t)} \\ l &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right. \quad (6a)$$

如果  $p_1 X - \bar{c}_j^2 + p_2 e_j^2(t) = 0$ , 令  $\sigma = 1/Y - 1$ , 则

$$\mu_l(t) = \left\{ [p_1 X(t) - \bar{c}_j^2 + p_2 e_j^2(t)]^\sigma \times \prod_{j=1}^m \left[ \frac{1}{p_1 X(t) - \bar{c}_j^2 + p_2 e_j^2(t)} \right]^\sigma \right\}^{-1} \quad (6b)$$

否则 
$$\mu_l(t) = \begin{cases} 1, & l = j \\ 0, & l \neq j \end{cases}$$

#### 4.2 结论参数的估计

由式(6)算法直接导出的隶属函数, 不仅包括输入变量而且包括输出误差项。为简化运算, 仅考虑输入变量, 即隶属函数为式(7)钟型函数。同时, 为保证结论参数在各输入子集上是局部最优的, 在讨论局域方程时假设此前提参数固定不变。

$$\mu_l(t) = \left[ \frac{\sum_{j=1}^m X(t) - \bar{c}_l}{X(t) - \bar{c}_j} \right]^{2\sigma} \quad (7)$$

对于  $n$  输入/单输出系统, 设第  $l$  条模糊规则的局域方程为  $y^l = \mathcal{Q}(t)\alpha^l$  (定义如式(5)), 对于样本点  $(X(t), y(t))$ , 网络的输出为

$$y(t) = \sum_{l=1}^m \mu_l(X(t)) y^l(t) = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m][\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m]^T = \Psi\alpha$$

其中

$$\Psi_l = \mu_l(X(t)) \mathcal{Q}(t)$$

$$\alpha^l = [\alpha_1^l, \alpha_2^l, \dots, \alpha_n^l]$$

当有  $N$  个样本点  $(X(t), y(t)) (t = 1, 2, \dots, N)$  时, 网络输出为

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(t) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \vdots \\ \Psi^N \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \Psi_1^1 & \Psi_2^1 & \dots & \Psi_m^1 \\ \Psi_1^2 & \Psi_2^2 & \dots & \Psi_m^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Psi_1^N & \Psi_2^N & \dots & \Psi_m^N \end{bmatrix} \alpha$$

令拟合误差函数  $J(\alpha) = \|Y - \Psi\alpha\|^2$ , 根据最小二乘法原理, 要使  $J(\alpha)$  达到最小, 必有

$$\alpha = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T Y \quad (8)$$

根据定理 3 和上述局域方程最小二乘估计法, 得到输入空间模糊最优聚类算法:

Step 1: 选取优化系数  $p_1, p_2$  和隶属函数形状系数  $Y$ , 选择中心个数  $m$ , 给定学习终结参数  $\zeta$  误差系数  $\xi$  和初始隶属度  $\mu_l^{(0)}, \mu_l^{(0)} = 1$ ;

Step 2: 根据式(6)计算修改  $\mu_l^{(k)}, \bar{c}_l^{(k)}$ ;

Step 3: 当  $\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)} > \zeta$  时, 重复 Step 2, 否则转 Step 4;

Step 4: 根据式(8)估计局域方程  $\alpha$

Step 5: 当所有采样点的平方和误差函数  $e^2 = \sum_{t=1}^N y(t) - y(t) \xi$  时, 学习结束; 否则, 增加中心值个数  $m$ , 重复 Step 1 - Step 5。

### 5 仿真实验

通过函数的逼近问题, 讨论当取不同的结论局域方程时, 广义模糊 RBF 神经网络的逼近效果和特点。设期望函数

$$y_d = 2.5(x_1 + x_2 - 0.25)^2 + \sin(57\pi x_1 x_2) \quad x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1]$$

分别设置如下 3 种局域方程, 按第 4 节的学习方法构造 GFRBFN。

- 1)  $y_1^l = \alpha^l$  ( $\alpha^l$  为常数)
- 2)  $y_2^l = \alpha_1^l + \alpha_2^l x_1 + \alpha_3^l x_2$
- 3)  $y_3^l = \alpha_1^l + \alpha_2^l x_1 + \alpha_3^l x_2 + \alpha_4^l x_1^2 + \alpha_5^l x_2^2 + \alpha_6^l x_1 x_2$

当函数

$$y_d = 2.5(x_1 + x_2 - 0.25)^2 + \sin(57\pi x_1 x_2)$$

时,网络的仿真结果如图2所示。

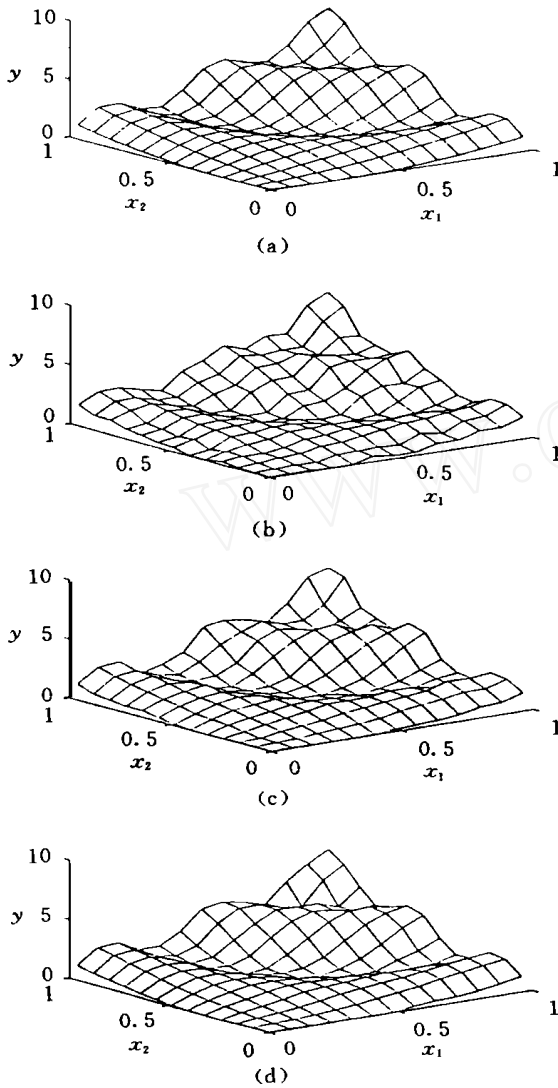


图2 仿真结果

- (a) 期望函数的三维曲面输出
- (b) 采用局域方程1)的网络输出曲面
- (c) 采用局域方程2)的网络输出曲面
- (d) 采用局域方程3)的网络输出曲面

图2(a)为期望函数的三维期望曲面;图2(b)为取局域方程1)构造网络的输出曲面,网络中心个数 $m = 64$ ,重构平方和误差 $e^2 = \sum_{i=1}^N (y_{d_i} - y_i)^2 = 8.101$ ;图2(c)为取局域方程2)构造网络的输出曲面, $m = 36$ , $e^2 = 2.781$ ;图2(d)为取局域方程3)构造网络的输出曲面, $m = 16$ , $e^2 = 1.293$ 。

从图2可以看出,随着局域方程复杂程度的增

加,在取相同逼近精度的前提下,网络所需的中心个数逐渐减少。而且随着函数非线性度的提高,该优点更加突出。但另一方面,随着运算复杂性的提高,其运算速度和规则的可理解性相应降低。

## 6 结 论

本文在总结现有的三种模糊推理系统的基础上,提出广义模糊推理的概念;在证明广义模糊推理系统与RBF神经网络具有函数等价性的前提下,提出广义模糊RBF神经网络模型和输入空间模糊最优聚类学习算法。仿真结果表明该算法是可行且有效的,所提出的广义模糊RBF神经网络可在任意精度下逼近任意的非线性函数。该研究成果在神经网络应用和多变量控制领域具有良好的应用前景。

## 参 考 文 献

- 1 王立新 自适应模糊系统与控制 北京:国防工业出版社, 1995
- 2 Bianchini M, Frasconi P, Cori M. Learning without minima in radial basis function network. IEEE Trans on NeuralNetwork, 1995, (3): 749- 756
- 3 Jang J S, Roger. Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference system. IEEE Tans on NeuralNetworks, 1993, (1): 156- 158
- 4 Hunt K J. Extending the functional equivalence of radial basis function networks and fuzzy inference system. IEEE Tans on NeuralNetworks, 1996, (3): 776- 781
- 5 Cao S G, Rees N W, Feng G. Analysis and design for a class of complex control system, Part I: Fuzzy modeling and identification. Automatica, 1997, (6): 1017- 1028

## 作 者 简 介

鲍 鸿 女,1962年生。1987年于华中理工大学自控系获工学硕士学位,现为广东工业大学电气工程及自动化系副教授,华中理工大学博士研究生。研究方向为智能控制,工业自动化,传感技术。

黄心汉 男,1946年生。1969年毕业于华中工学院电机系,现为华中理工大学自动控制工程系教授,博士生导师。研究方向为智能控制,智能机器人,多传感器信息融合技术。

李锡雄 男,1936年生。1959年毕业于华中工学院电机系,现为广东工业大学电气工程及自动化系教授。研究方向为过程控制,智能控制。