

# 一种线性不确定系统状态反馈镇定控制器的设计方法\*

蒋本铁

冷克平

(东北大学计算中心 沈阳 110005) (东北大学工商管理学院)

**摘要** 讨论线性不确定系统的镇定问题, 得出了相应的状态反馈律的设计方法。该系统的参数不确定性是结构性的且值有界, 其不确定性的描述更具实际意义。在不确定性存在的情况下, 所设计的控制器与 Mehdi 提出的控制器同样具有某种最优性, 且其保守性低于文献[1]给出的结果。

**关键词** 二次稳定, 状态反馈, 鲁棒镇定, 线性系统

**分类号** TP 273

## Design of Linear Controller to Stabilize Uncertain Linear Systems with State Feedback

Jiang Bentie, Leng Keping

(Northeastern University)

**Abstract** A design of linear controller is presented to stabilize uncertain linear systems in state space representation. The parameter uncertainty is structured and value is bounded. The design is an improvement on that presented by Mehdi in reference[1]. With a controller designed here, the optimality of LQ regulator is preserved in the presence of uncertainty.

**Key words** quadratic stability, state feedback, robust stabilization, linear systems

### 1 引言

在实际线性系统中, 不确定项往往具有数值界。文献[2]给出其不确定项的表达形式  $|\Delta A| < E$ , 即在不确定参数矩阵  $\Delta A$  中, 每个元素的绝对值均小于矩阵  $E$  中的相应元素, 其中  $E$  是元素均非负的常数阵。Mehdi 等<sup>[1]</sup>对不确定参数具有数值界的线性系统提出了状态反馈镇定控制器的设计方法, 并指出该控制器在一般意义下保持了某种最优性。用该方法处理低阶线性不确定系统很有意义, 但在处理高阶线性不确定系统时则显得很保守。其原因在于设计控制律时, 必须求解 Riccati 矩阵方程

$$A^T P + PA - P(BB^T - \epsilon I)P + \frac{\mu}{\epsilon} \text{diag}(E^T E) + Q = 0 \quad (1)$$

不难看出, 随着维数  $n$  的增加, 矩阵  $\frac{\mu}{\epsilon} \text{diag}(E^T E)$

的正定性也不断增加, 使得  $P$  阵增大, 方程可解性不断降低, 甚至导致方程无解。

本文针对文献[1]方法存在的不足, 提出一种新的状态反馈控制器的设计方法, 同时允许控制通道存在不确定性。

### 2 几个引理

**引理 1** 对于矩阵  $X, Y \in R^{n \times m}$ , 不等式  $X^T Y + Y^T X - X^T X + Y^T Y$  成立。

为研究方便, 令  $\lambda_i(\cdot)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为对称矩阵  $\cdot \in R^{n \times n}$  的特征值, 且  $\lambda_1(\cdot) \leq \lambda_2(\cdot) \leq \dots \leq \lambda_n(\cdot)$ 。

**引理 2** 设  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为对称矩阵  $A$  ( $A \in R^{n \times n}$ ) 的特征值, 则

$$\lambda_n(A) = \max_x \frac{x^T A x}{x^T x} = \max_x \frac{1}{x^T x} x^T A x$$

$$\lambda_1(A) = \min_x \frac{x^T A x}{x^T x} = \min_x \frac{1}{x^T x} x^T A x$$

\* 辽宁省自然科学基金项目 (962169)

1999 - 04 - 16 收稿, 1999 - 11 - 08 修回

**引理 3** 设  $\lambda(A), \lambda(B)$  和  $\lambda(A + B) (i = 1, 2, \dots, n)$  分别为矩阵  $A, B$  和  $A + B \in R^{n \times n}$  的特征根, 则不等式  $\lambda(A) + \lambda(B) \leq \lambda(A + B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$  成立。

**引理 4** 对于两个对称矩阵  $A, E \in R^{n \times n}$ , 如果  $|A| < E$ , 则  $\lambda_i(E) \geq \lambda_i(A)$ 。

**证明** 由引理 2 知, 存在两个向量  $x_0 = [x_{01}, \dots, x_{0n}] \in R^n$  和  $z_0 = [z_{01}, \dots, z_{0n}] \in R^n$ , 使得

$$\lambda_n(A) = \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T x_0}, \quad \lambda_n(E) = \frac{z_0^T E z_0}{z_0^T z_0}$$

定义向量

$$y = [y_{01}, \dots, y_{0n}] = [ |x_{01}|, \dots, |x_{0n}| ]$$

于是有

$$\lambda_n(A) = \frac{x_0^T A x_0}{x_0^T x_0} = \frac{y_0^T E y_0}{y_0^T y_0} = \lambda_n(E)$$

从而此引理成立。

**引理 5 优化问题**

$$\begin{aligned} \max J &= \max_{x_i} \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \\ \text{s.t.} \quad &x_i^2 = 1 \end{aligned}$$

的一个解为  $\bar{x} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ , 这里  $a_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  已知, 且  $a_k = \max_i \{a_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 。

**证明** 因为对于

$$\forall x = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad x_i^2 = 1$$

有

$$J = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i = a_k$$

即  $\max_{x_i} J = a_k$ 。又因为对于

$$\bar{x} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$$

有

$$J(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i^2 = a_k \bar{x}_k^2 = a_k$$

所以  $\bar{x}$  是此优化问题的一个解。

**引理 6** 考虑对称阵  $R_2 = (r_{ij}) \in R^{n \times n}$ , 即

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & 0 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{1n-1} & \dots & 0 & r_{n-1n-1} \\ r_{1n} & \dots & r_{n-1n-1} & 0 \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$$

其中  $r_{ij} \geq 0$ 。令  $r_{\max} = \max_{i,j} \{r_{ij} | i = 1, 2, \dots, n\}$ ,

则  $\lambda_n(R_2) \geq r_{\max}$ 。

**证明** 由引理 2 和引理 5 知, 对于  $\forall x = [x_1,$

$x_2, \dots, x_n] \in R^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ , 有

$$\begin{aligned} x^T R_2 x &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i r_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n (r_{ij} x_i^2 + r_{ij} x_j^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n r_{ij} x_i^2 + r_{\max} \sum_{i=1}^n x_i^2 = r_{\max} \end{aligned}$$

所以  $\lambda_n(R_2) \geq r_{\max}$ 。

**引理 7** 从矩阵  $\Delta A$  和  $E = (e_{ij})$  出发, 定义矩阵  $R = \Delta A \Delta A = (r_{ij}), W = E E = (w_{ij})$ 。如果不确定阵  $\Delta A$  满足  $|\Delta A| < E$ , 则有

$$\bar{W} = \text{diag}[w_{\max} + w_{11}, \dots, w_{\max} + w_{nn}] - R$$

其中  $w_{\max} = \max_{i,j} \{w_{ij} | i = 1, 2, \dots, n\}$

**证明** 令  $r_{\max} = \max_{i,j} \{r_{ij} | i = 1, 2, \dots, n\}$ , 因为  $|\Delta A| < E$ , 有  $|R| < W$  和  $r_{\max} < w_{\max}$ 。定义  $R_1 = \text{diag}[r_{11}, \dots, r_{nn}], R_2 = R - R_1, W_1 = \text{diag}[w_{11}, \dots, w_{nn}], W_2 = W - W_1$ 。由引理 2 和引理 4 知,  $|R_2| < W_2, \lambda_1(-R_2) = \lambda_n(R_2) \geq \lambda_n(W_2) = w_{\max}$ , 进而由引理 6 知

$$\begin{aligned} \lambda_1(\bar{W} - R) &= \lambda_1(\bar{W} - R_1) + \lambda_1(-R_2) = \\ &= w_{\max} + w_{11} - r_{11} - \lambda_n(R_2) = \\ &= w_{ii} - r_{ii} + (w_{\max} - \lambda_n(W_2)) \geq 0 \end{aligned}$$

即  $\bar{W} - R \geq 0$ 。

### 3 主要结果

考虑线性不确定系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + \\ &+ (B + \Delta B)u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $x$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $m$  维控制向量,  $A$  和  $B$  为具有适当维数的实阵,  $\Delta A$  和  $\Delta B$  为元素值有界的不确定参数阵  $|\Delta A| < E, |\Delta B| < D, E$  和  $D$  是两个给定的且其元素均大于或等于零的常阵。

**注 1** 当  $\Delta B = 0$  时, 系统(2)可简化为文献[1]所研究的系统。

本文的目的是寻找状态反馈控制器  $u(t) = Kx(t)$ , 使得系统(2)在控制  $u = Kx$  下, 闭环二次稳定。系统(2)的闭环二次稳定的定义如下:

**定义 1** 对于线性系统(2), 如果存在一个对称正定阵  $P$  和一个正数  $\alpha$ , 使得对  $x \in R^n$ , 不等式

$$\begin{aligned} x^T [(A + \Delta A) + (B + \Delta B)K]^T P + \\ P(A + \Delta A + (B + \Delta B)K)x &+ \\ - \alpha x^2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$



成立,则称系统(2)在控制  $u = Kx = -B^T P x$  下是二次稳定的。

**定理 1** 在线性不确定系统(2)中,如果对于某一常数  $\alpha > 0$ ,存在正数  $\epsilon$ ,对称正定阵  $P$  和半正定阵  $Q$ , Riccati 矩阵方程

$$A^T P + PA - P(BB^T - \epsilon I - \bar{F})P + \frac{1}{\epsilon} \bar{W} + Q = 0 \quad (4)$$

正定解  $P$  存在,则线性不确定系统(2)在反馈控制  $u = Kx = -B^T P x$  下二次稳定。其中

$$W = E^T E = (w_{ij})$$

$$\bar{W} = \text{diag}[w_{\max} + w_{11}, \dots, w_{\max} + w_{nn}]$$

$$F = DD^T = (f_{ij})$$

$$\bar{F} = \text{diag}[f_{\max} + f_{11}, \dots, f_{\max} + f_{nn}]$$

$$w_{\max} = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \max_{i=1, \dots, n} w_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$f_{\max} = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \max_{i=1, \dots, n} f_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

**证明** 假设存在对称非负矩阵  $Q$  和正数  $\epsilon$ ,使得方程(4)具有唯一对称正定解  $P$ ,则由方程(4)知,存在一正数  $\alpha$ ,使得不等式

$$x^T [A^T P + PA - PBB^T P + \epsilon P P + P \bar{F} P + \frac{1}{\epsilon} \bar{W}] x - \alpha x^2 \quad (5)$$

成立。注意,由引理 3 知

$$x^T [\epsilon P P + \frac{1}{\epsilon} \bar{W}] x$$

$$x^T [\epsilon P P + \frac{1}{\epsilon} \Delta A^T \Delta A] x$$

$$x^T [\Delta A^T P + P \Delta A] x$$

$$x^T [PBB^T P + P \bar{F} P] x$$

$$x^T [PBB^T P + P \Delta B \Delta B^T P] x$$

$$x^T [-P \Delta B \Delta B^T P - P \Delta B B^T P] x$$

从而可得

$$\begin{aligned} & x^T [(A + \Delta A - (B + \Delta B)B^T P)^T P + P(A + \Delta A - (B + \Delta B)B^T P)] x = \\ & x^T [(A^T P + PA) + (\Delta A^T P + P \Delta A) - 2PBB^T P - P \Delta B \Delta B^T P - P \Delta B B^T P] x \\ & x^T [(A^T P + PA) + \epsilon P P + \frac{1}{\epsilon} \bar{W} - 2PBB^T P + PBB^T P + P \bar{F} P] x = \\ & x^T [A^T P + PA - PBB^T P + \epsilon P P + P \bar{F} P + \frac{1}{\epsilon} \bar{W}] x - \alpha x^2 \end{aligned}$$

因而可知在状态反馈控制下,闭环系统是二次渐近稳定的。(证毕)

在系统(2)中,如果令  $\Delta B = 0$ ,则由定理 1 直接可得如下推论:

**推论 1** 当  $\Delta B = 0$  时,系统(5)可二次渐近稳定的充分条件为:存在正数  $\epsilon$ ,对称非负实阵  $Q$  和对称正定实阵  $P$ ,使得 Riccati 矩阵方程

$$A^T P + PA - P(BB^T - \epsilon I)P + \frac{1}{\epsilon} \bar{W} + Q = 0 \quad (6)$$

成立,其状态反馈控制律为  $u = Kx = -B^T P x$ 。

**注 2** 在(11)式中,如果将  $\frac{1}{\epsilon} \bar{W}$  改写成  $\frac{n}{\epsilon} \text{diag}(E^T E)$ ,则推论 1 变成文献[2]中的定理 1。

由推论 1 所得到的控制器同样具有某种最优性,即存在某个非负矩阵  $\hat{Q}$  使得在此控制器  $u = Kx$  下,可极小化性能指标

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \hat{Q} x + u^T u) dt \quad (7)$$

证明由文献[2]中证明直接平移过来,此略。

## 4 结 语

本文针对线性不确定系统给出了状态反馈镇定控制律的设计方法。控制器的设计建立在求解一个相应 Riccati 方程的基础上,其保守性在某些情况下低于文献[1]介绍的方法,可用于处理高维线性不确定系统的状态反馈镇定,输出反馈镇定和鲁棒输出跟踪等许多问题,其思想也适用于非线性系统的鲁棒控制。

## 参 考 文 献

- 1 Mehdi D, A H Mohammed, P Francois Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems Automatica, 1996, 32: 1081- 1083
- 2 Anderson B D O, J B Moore Optimal control: Linear quadratic methods NJ: Prentice Hall, 1989

## 作 者 简 介

蒋本铁 男,1947年生。1982年毕业于东北大学自控系,现为东北大学计算中心副主任,副教授,硕士。研究方向为控制理论及计算机应用技术。

冷克平 女,1953年生。1976年毕业于东北财经大学统系,现为东北大学工商管理学院副教授。研究方向为经济系统及战略管理。