依据混沌理论进行非线性系统建模变量个数的最优选取*

郭 刚 史忠科 戴冠中
(西北工业大学自控系 西安 710072)

摘 要 依据确定性混沌理论,提出一种非线性系统建模变量选取的方法。仿真例子表明,无论是对典型的混沌系统的时间序列建模,还是对具有混沌特性的经济系统的时间序列建模,采用所提出的方法选取建模变量所建模型的拟合精度很高,预测和泛化能力相当好。

关键词 非线性建模,混沌,时间序列预测,模糊神经网络
分类号 TP 11

Select Optimal Number of Variable to Nonlinear Modeling with Chaotic Theory

Guo Gang, Shi Zhongke, Dai Guanzhong
(Northwest Polytechnic University)

Abstract Using chaotic theory to calculate the embed dimension and relational dimension of a chaotic series or a normal economical series select the same number of variable to model and forecast this system. Examples show that the forecasting error is minimal with this number of variable to model and forecast the modeled nonlinear- system.

Key words nonlinear modeling, chaotic theory, time- series forecasting, fuzzy neural networks

1 引 言

客观世界中的大多数系统都是非线性系统,为研究问题方便,人们往往把这些系统简化为线性系统;同时,线性系统理论的不断充实和发展,也为人们解决简化线性系统问题提供了丰富的理论指导和数学工具。然而,随着社会实践的不断拓展和深入,以及对控制系统要求的不断提高,上述简化方法的缺点日益显现出来。对于强非线性系统,上述处理方法甚至无法解决。于是,非线性系统的研究开始受到重视。20 世纪 60 年代,气象学家Lorenz 发现了非线性系统的混沌现象[1];80 年代末以来,微分几何方法用于非线性系统控制,产生了非线性系统的精确线性化理论。同时,随着智能逼近建模方法的进步,使得非线性系统的求解和建模问题得以简化,也为非线性系统的深入研究提供了新工具。

非线性系统的建模和预测是非线性系统研究中经常遇到的问题,例如预测控制中对非线性系统输出的预测,大气系统运动研究中进行天气预报,电力系统中电力负荷预测[2]及社会经济系统的预测问题等。而上述系统往往运行机理复杂,影响因素众多,无法进行精确的物理建模,甚至存在混沌现象。为解决上述问题,近年非线性动力学研究的迅速发展,为我们提供了新的工具。尤其是混沌现象的发现,改变了人们的一些固有观念,过去被认为随机的现象,其背后可能存在某种简单的确定性规律在起支配作用。Peter 研究了“标准普尔 500 指数”,通过相空间重构发现了经济系统混沌现象的存在[3]。基于此,对存在混沌现象的经济数据进行预测是可行的。那么,如何区分哪些数据是随机的,哪些数据是混沌的?Packard 提出的相空间重构思想及 Takens 研究的嵌入定理,很好地解决了这一问题。同时,Lyapunov 指数的计算也可判别某些数据中是否存在混沌现象,并可据此给出混沌序列的最大可预测时间[2]。

* 1998- 11- 13 收稿, 1999- 03- 15 修回

2 系统混沌特性

对于一个复杂的高维系统, 能够得到的往往是一维的标量信息, 即时间序列。根据相空间重构理论, 对于时间序列 $x(t_i)$ $(i=0,1,\cdots,N)$, 用一定的时间滞后 $\tau(t_{i+1}=t_i+\tau*\Delta t)$ 和一定的嵌入维数 m, 建立起一个多维的相空间 Y。具体做法是对实际测得的一组时间序列 $x_1, x_2, \cdots, x_N$, 如果嵌入成 m 维相空间, 则相空间中相点个数为 $n=N-(m-1)*\tau$。若 $\tau=1$, 则构造出的相空间向量 y_i 为

$$\begin{cases} y_1=(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ y_2=(x_2, x_3, \cdots, x_{m+1}) \\ \quad\vdots \\ y_i=(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_N) \end{cases} \tag{1}$$

对所有的相点, 若给定一个任意小的数 ϵ, 计算重构相空间中的 N 个点之间的欧氏距离, 然后比较有多少个点对之间的距离 $|y_i-y_j|<\epsilon$。把距离小于 ϵ 的点对数占总点对数 N^2 之比记作 $C(\epsilon)$, 可表示为

$$C(\epsilon)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}\theta(\epsilon-|y_i-y_j|) \tag{2}$$

其中 $\theta(x)$ 为 Heaviside 函数, 表达式为

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0 \\ 0, & x\leq 0\end{cases} \tag{3}$$

在所取的一段区域内, 当 ϵ 充分小时, $C(\epsilon)$ 逼近

$$\ln C(\epsilon)=\ln C+D\ln(\epsilon) \tag{4}$$

式中, C 为常数, D 是维数, 即

$$D=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\ln C(\epsilon)}{\ln(\epsilon)} \tag{5}$$

通常称(5) 式为关联维数。一般在双对数坐标中得到一条 $\ln C(\epsilon)$ 和 $\ln\epsilon$ 曲线, 曲线的直线段斜率即为 D。当随着 m 增大 D 逐渐收敛时, 这一收敛值即为 D 值, 收敛值的维数 m 即为饱和嵌入维数, 这说明测得的时间序列是混沌的。如果系统不存在饱和嵌入维数, 则认为这一时间序列是随机的。

混沌系统的重要特征在于对初始条件的敏感依赖性, 这种依赖性用 Lyapunov 指数来度量, 表示重构相空间中相邻两点随时间演化的分离程度。Lyapunov 指数是一个谱系 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$, 其中 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_m$, λ_i 表示 m 维空间中每一维上相邻轨道随时间的演化分离程度。若谱系中的最大者 λ_1 为非负值, 即 $\lambda_1>0$, 则系统必然是混沌的; 否则, 系统就是非混沌的。Lyapunov 指数的计算方法可参见文献[1,4]。

3 建模方法

由上述方法的计算结果, 可以判断时间序列是否为混沌。那么, 饱和嵌入维数及关联维数的计算结果对于时间序列的建模及预测有何指导意义呢? 首先回顾一下非线性系统的建模方法: 基于统计模型的系统建模, 一般采用回归模型进行参数建模, 模型既有线性模型 AR, ARMA, …, 也有非线性参数模型, 如门限自回归模型等; 智能逼近模型的非线性系统建模方法, 如神经网络, 模糊辨识等。无论采用哪一种方法建模, 进行建模输入变量的选取都是非常重要的, 但是一般文献却极少论及。

本文根据实际建模经验: 对于具有混沌性质的时间序列建模, 其变量的选取与混沌饱和嵌入维数有着非常密切的关系; 同时, 由于模糊模型和神经网络均可以从给定的输入输出数据建立系统的非线性映射关系, 这样的模型可以完全避免主观性, 从时间序列中发掘出非线性系统背后的确定规律。

下面采用文献[4] 中的Mackey- Glass混沌模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{0.2x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)}-0.1x(t) \tag{6}$$

其中 $\tau=17$, 作为测试对象产生时间序列数据, 并对其进行建模。建模方法采用文献[5] 的模糊神经网络方法进行。该网络共有 5 层, 若假定每个输入变量有两个隶属函数, 则用神经网络描述模糊推理系统的神经元函数分别为:

第 1 层: 节点函数为模糊输入变量的隶属函数, 如设输入为 x, 输出为 O_i^1, 则

$$O_i^1=\mu_{A_i}(x) \tag{7}$$

第 2 层: 节点表示模糊的"and"运算, 则

$$w_i=\mu_{A_i}(x)\times\mu_{B_i}(y), \quad i=1,2 \tag{8}$$

第 3 层: 计算某条规则的强度

$$\overline{w}_i=\frac{w_i}{w_1+w_2}, \quad i=1,2 \tag{9}$$

第 4 层: 对应 T- S 模糊模型中 if- then 规则的结论部分, 有

$$O_i^4=\overline{w}_i f_i=\overline{w}_i(p_ix+q_iy+r_i) \tag{10}$$

第 5 层: 所有规则的输出和运算为

$$f=O_1^5=\sum_i\overline{w}_i f_i=\sum_i w_i f_i\Big/\sum_i w_i \tag{11}$$

本神经网络采用一种混合学习算法, 正向采用最小二乘估计线性参数, 反向采用梯度下降法学习非线性参数, 具体算法参见文献[5]。

仿真的具体步骤如下:

Step 1: 采用数值方法计算出微分方程的时间序列数值。

Step 2: 采用相空间重构方法对上述序列的关联维数和饱和嵌入维数进行计算。图 1 为嵌入维数 m 逐渐变大时的 $\ln C(\epsilon)$ 和 $\ln\epsilon$ 的关系图。根据该数据计算出关联维数 D 随嵌入维数 m 增大的关系, 得出饱和嵌入维数 $m = 4$。

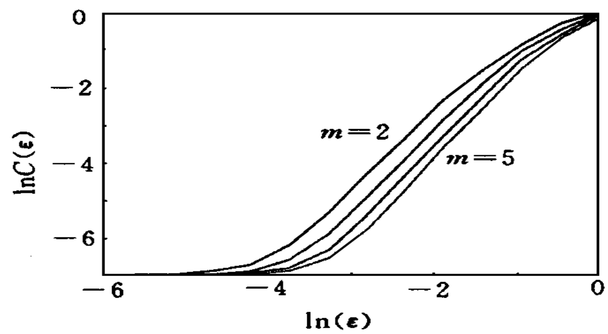

图 1　$\ln C(\epsilon)$ 和 $\ln\epsilon$ 的关系图

Step 3: 选择输入变量个数分别为 2, 3, 4, 5, 产生模糊推理系统, 并用序列的 500 个值进行训练。

Step 4: 采用训练后的模糊系统进行未学习 500 个序列值的预测测试。

图 2 为时间序列后 500 个测试数据的真实数据与模糊模型预测一步输出数据的对比图 (图中, "—— "为检验值, "—— "为预测值)。采用的输入变量个数为 4, 等于对象的饱和嵌入维数 m。

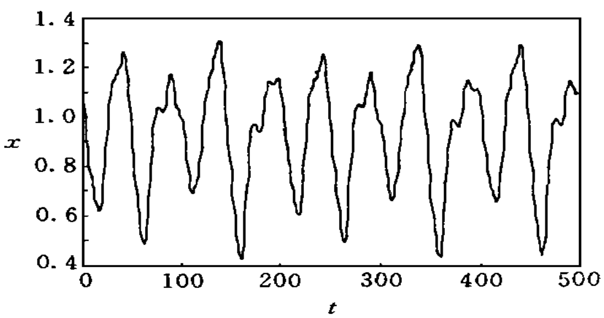

图 2　采用 4 个输入变量的预测结果

从图 2 中可以清楚地看到, 采用构成饱和嵌入维数空间的向量组合进行非线性混沌系统建模, 可有效地反映系统的全部动力特性, 并且具有良好的外推能力, 即泛化能力。

需要说明的是: 数据样本的数量只要达到神经网络参数学习的基本要求即可, 数据样本大小与模糊规则数及神经元的数量无关; 具体规则数取决于模糊系统输入变量的个数和输入变量论域的划分个数, 而表示模糊系统的神经网络的神经元数量则与之相对应。

4　应用举例

用上证综合指数对 1992 年 12 月 4 日至 1997 年 4 月 3 日的数据进行预处理。采用相空间重构法计算, 发现该时间序列存在混沌特性, 计算得出上证指数的饱和嵌入维数是 10[6]。利用本文方法选择建模变量进行模糊神经网络建模, 用上证综合指数 1997 年 1 月 3 日前的 1 500 个数据对模糊神经网络进行训练, 以找出数据内部存在的非线性映射规律; 然后用 1997 年 1 月 6 日至 11 月 4 日的 200 个数据进行预测测试, 如图 3 所示 (图中, "—— "为检验值, "—— "为预测值), 预测结果非常好。由此表明, 利用本文方法进行经济系统时间序列建模变量的选取, 既可省去一般统计建模方法中通过变量相关性分析进行的变量取舍过程, 又为神经网络建模变量的选择提供了思路。

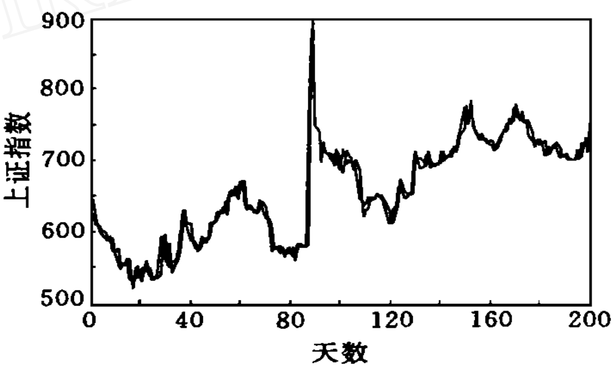

图 3　上证指数的 200 天预测结果

参 考 文 献

1　王东生, 曹磊. 混沌、分形及其应用. 合肥: 中国科技大学出版社, 1995

2　梁志珊, 王丽敏, 付大鹏. 应用混沌理论的电力系统短期负荷预测. 控制与决策, 1998, 13(1): 87- 90

3　Deboeck G. Trading on the edge: Neural genetic and fuzzy systems for chaotic financial market. New York: John Wiley & Sons, 1994

4　Lixin Wang, Jerry M Mendel. Generating fuzzy rule by learning from examples. IEEE Trans on SMC, 1992, 22(6): 1414- 1427

5　Jyh- Shing, Roger Jang. ANFIS: Adaptive- network - based fuzzy inference system. IEEE Trans on SMC, 1993, 23(3): 665- 685

6　叶中行, 杨利平. 上证指数的混沌特性分析. 上海交通大学学报, 1998, 3: 129—132

(下转第 238 页)