柔性臂振动系统角速度反馈控制的最优指数衰减率问题*

于景元 王耀庭 李胜家
(北京信息与控制研究所 100037) (山西大学数学系)

摘 要 讨论柔性臂的端点角速度反馈控制问题。通过对系统特征值和特征函数的渐近表示式的进一步研究,用特征扰动的 Payley-Wiener 稳定性理论,证明了该系统的最优指数衰减率可由系统的谱来确定。

关键词 Euler-Bernoulli 梁,Riesz 基,指数稳定,最优指数衰减率
分类号 O 175.21

Optimal Exponential Decay Rate on the Flexible Beam with Angular Velocity Feedback Control

Yu Jingyuan *Wang Yaoting, Li Shengjia*
(Beijing Institute of Information and Control) (Shanxi University)

Abstract The problem of angular velocity feedback control caused by a flexible beam on a vibrating system is discussed. The stability is well known, but the optimal exponential decay rate on the system is new. In order to determine the decay rate, an assistant system as a basic system is introduced, and the system is considered as a perturbation of the assistant system. By the Payley-Wiener stability theory, it is proved that a set of the eigenvectors of the system form a Riesz basis of the state space. So the spectrum of the system is determined, and the optimal decay rate can be determined by the spectrum of the system.

Key words Euler-Bernoulli beam, Riesz basis, exponential stability, optimal exponential decay rate

1 引 言

近年来,人们对柔性、弹性系统

$$\begin{cases} m y_{tt}(x,t) + EIy_{xxxx}(x,t) = 0 \\ \qquad 0 < x < l,\ t > 0 \\ y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xxx}(l,t) = \\ \qquad y_{xx}(l,t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的控制问题产生了兴趣[1-8]。Chen 等研究了单根和多根连接梁振动系统的节点控制问题,证明了该系统的能量是一致指数衰减的。但如何确定系统的最优指数衰减率问题却一直未能解决[1-3]。

系统的最优指数衰减率 ω_0 与系统谱的关系为 $\omega_0 \geq \mathrm{Sup}\{\mathrm{Re}\lambda,\ \lambda$是系统的谱$\}$。在什么条件下等号成立,是分布参数控制理论研究中最关心的问题之一。这个问题一直是偏微分方程、算子半群和分布参数控制系统的稳定性研究的一个重大问题。文献[1-3]给出了系统谱的数字仿真结果,但未能给出系统的谱和系统的最优指数衰减率的关系。Conrad 等[4]研究了系统仅在速度反馈控制 $y_{xxx}(1,t) = k_1 y_t(l,t)$ 作用下闭环控制系统的特征元结构问题,用隐函数理论和扰动论的方法证明:当 k_1 很小时,闭环系统的特征元构成状态空间的 Riesz 基,从而证明了该类控制系统的最优指数衰减率等于系统谱的实部

* 国家自然科学基金项目(69674011)和山西省自然科学基金项目(981001)
1998-11-02 收稿,1999-05-05 修回

的上确界。但是,对端点的角速度反馈控制系统

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t)+y_{xxxx}(x,t)=0 \\ \qquad 0<x<1,\ t>0 \\ y(0,t)=y_x(0,t)=y_{xxx}(1,t)=0 \\ K y_{xx}(1,t)=-y_{xt}(1,t) \\ y(x,0)=y_1(x) \\ y_t(x,0)=y_2(x) \\ \qquad 0\le x\le 1 \end{cases} \tag{2}$$

的最优指数衰减率问题,Conrad 方法是失效的。

本文研究角速度反馈控制系统的特点,引入一个辅助系统,对系统的特征值和特征函数做更精细的研究。用特征扰动的 Payley - Wiener 稳定性理论,证明了在一定条件下,角速度反馈控制系统的最优能量指数衰减率可用系统的谱来确定。

为了研究系统(2),引入一个辅助系统

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t)+y_{xxxx}(x,t)=0 \\ \qquad 0<x<1,\ t>0 \\ y(0,t)=y_x(0,t)=y_{xxx}(1,t)= \\ \qquad y_{xt}(1,t)=0 \\ y(x,0)=y_1(x) \\ y_t(x,0)=y_2(x) \end{cases} \tag{3}$$

为研究系统(2)和(3),这里引进空间 $V=\{\phi(x);\ \phi\in H^2(0,1),\ \phi(0)=\phi'(0)=0\}$,$V$ 的范数为 $\|\phi\|=\int\phi(x)\overline{\phi(x)}\,\mathrm{d}x,\ \phi\in V$。定义微分算子 $\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}0 & I\\ -\mathrm{d}^4/\mathrm{d}x^4 & 0\end{bmatrix}$, $D(\mathbf{A}_0)=\{(u,v),u\in H^4(0,1)\cap V,v\in V,u'''(1)=0,v'(1)=0\}$;微分算子 $\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0 & I\\ -\mathrm{d}^4/\mathrm{d}x^4 & 0\end{bmatrix}$,$D(\mathbf{A}_1)=\{(u,v),u\in H^4(0,1)\cap V,v\in V,u'''(1)=0,v'(1)=-Ku''(1)\}$。

设 $Y(t)=(y(x,t),y_t(x,t))^{\mathrm{T}}$。辅助系统(3)可写成一阶发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)=\mathbf{A}_0Y(t), \quad t>0 \\ Y(0)=Y_0 \\ Y_0=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in V\times L^2(0,1) \end{cases} \tag{4}$$

系统(2)可写成一阶发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)=\mathbf{A}_1Y(t), \quad t>0 \\ Y(0)=Y_0 \\ Y_0=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in V\times L^2(0,1) \end{cases} \tag{5}$$

2 辅助系统特征值的分布和特征函数表示

系统(3)或(4)的特征方程为

$$\begin{cases} \phi''''(x)+\lambda^2\phi(x)=0, \quad 0<x<1 \\ \phi(0)=\phi'(0)=\phi'''(1)=\lambda\phi'(1)=0 \end{cases} \tag{6}$$

如果 $\lambda=0$,则系统(6)可写成

$$\begin{cases} \phi''''(x)=0, \quad 0<x<1 \\ \phi(0)=\phi'(0)=\phi'''(1)=0 \end{cases} \tag{7}$$

如果 $\lambda\neq0$,则系统(6)可写成

$$\begin{cases} \phi''''(x)+\lambda^2\phi(x)=0, \quad 0<x<1 \\ \phi(0)=\phi'(0)=\phi'''(1)=\phi'(1)=0 \end{cases} \tag{8}$$

显然,系统(8)的全部特征元构成 $L^2(0,1)$ 和 $V_0=\{\phi\in H^2(0,1),\phi(0)=\phi'(0)=\phi'(1)=0\}$ 的直交基。又因(7)的所有解形如 $\phi(x)=ax^2,a\in C$,要研究系统(6),只需研究系统(8)。

下面考虑二次特征问题(8)。设 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 和 ω_4 是方程 $\omega^4=-1$ 的4个根,并设 $\rho^4=\lambda^2$,则 $\phi_j(x)=\mathrm{e}^{\omega_j\rho x}(j=1,2,3,4)$ 是方程 $\phi''''(x)+\lambda^2\phi(x)=0$ 的基本解。由微分方程特征值理论[9],经计算可得如下引理:

引理1 系统(8)的特征值可表示为如下的渐近形式

$$\lambda_{n_1}=\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}\pi i}\pi\left(-n+\frac{1}{4}\right)i+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2=\left(n-\frac{1}{4}\right)^2 i\pi\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{9}$$

$$n=1,2,\cdots$$

$$\lambda_{n_2}=\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi i}\pi\left(n+\frac{1}{4}\right)i+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2=-\left(n+\frac{1}{4}\right)^2 i\pi\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{10}$$

$$n=1,2,\cdots$$

其中 λ_{n_j} 是特征行列式

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ \omega_1^3\mathrm{e}^{\omega_1\rho} & \omega_2^3\mathrm{e}^{\omega_2\rho} & \omega_3^3\mathrm{e}^{\omega_3\rho} & \omega_4^3\mathrm{e}^{\omega_4\rho}\\ \omega_1\mathrm{e}^{\omega_1\rho} & \omega_2\mathrm{e}^{\omega_2\rho} & \omega_3\mathrm{e}^{\omega_3\rho} & \omega_4\mathrm{e}^{\omega_4\rho}\end{vmatrix}=0 \tag{11}$$

的单根。

由引理1,我们给出特征问题(8)的特征函数表示公式。

引理2 特征问题(5)的特征函数可表示为

$$
\begin{aligned}
&\phi_{n_1}(x,\rho_{n_1}) = \\
&2i[(e^{\omega_3\rho_{n_1}} + e^{\omega_2\rho_{n_1}})e^{\omega_1\rho_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_3\rho_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\rho_{n_1}})e^{\omega_2\rho_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_2\rho_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\rho_{n_1}})e^{\omega_3\rho_{n_1}x} + \\
&(e^{(\omega_1+\omega_3)\rho_{n_1}} + e^{(\omega_1+\omega_2)\rho_{n_1}})e^{\omega_4\rho_{n_1}(x-1)}] \qquad (12)\\
&x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

其中, $\omega_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}, \omega_2 = e^{\frac{5}{4}\pi i}, \omega_3 = e^{\frac{\pi i}{4}}, \omega_4 = e^{-\frac{\pi i}{4}}$。

$$
\begin{aligned}
&\phi_{n_2}(x,\rho_{n_2}) = \\
&-2i[(e^{\omega_3\rho_{n_1}} + e^{\omega_2\rho_{n_1}})e^{\omega_1\rho_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_3\rho_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\rho_{n_1}})e^{\omega_2\rho_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_2\rho_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\rho_{n_1}})e^{\omega_3\rho_{n_1}x} + \\
&(e^{(\omega_1+\omega_3)\rho_{n_1}} + e^{(\omega_1+\omega_2)\rho_{n_1}})e^{\omega_4\rho_{n_1}(x-1)}] \qquad (13)\\
&x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

其中, $\omega_1 = e^{\frac{5}{4}\pi i}, \omega_2 = e^{\frac{3}{4}\pi i}, \omega_3 = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \omega_4 = e^{\frac{\pi i}{4}}$。

并且存在一个常数 $M_0 > 0$, 使得对每个特征函数 $\phi_{n_j}(x)$, 有不等式

$$
\begin{cases}
|\phi_{n_j}(x,\rho_{n_j})| \le M_0 \\
|\phi'_{n_j}(x,\rho_{n_j})| \le M_0 n \\
j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \cdots
\end{cases} \qquad (14)
$$

证明略。

3　问题(2) 特征值的分布和特征函数

系统(2) 或(5) 的特征问题为二次特征问题

$$
\begin{cases}
\phi''''(x) + \lambda^2\phi(x) = 0, \ 0 < x < 1 \\
\phi(0) = \phi'(0) = 0 \\
\phi''(1) = 0, \ K\phi'''(1) = -\lambda\phi'(1)
\end{cases} \qquad (15)
$$

下面讨论(15) 的特征值分布问题。设 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 和 ω_4 是方程 $\omega^4 = -1$ 的 4 个根, 并设 $\rho^4 = \lambda^2$, 则 $\phi_j(x) = e^{\omega_j\rho x}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ 是方程 $\phi''''(x) + \lambda^2\phi(x) = 0$ 的基本解。由微分方程特征值理论[9], 经计算可得如下引理:

引理 3　(15) 的特征值可表示为如下形式

$$
\begin{cases}
\mu_{n_1} = \lambda_{n_1}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\rho_{n_1}^2}\right)\right)^2 \\
\mu_{n_2} = \lambda_{n_2}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\rho_{n_2}^2}\right)\right)^2
\end{cases}, \ n = 1, 2\cdots \qquad (16)
$$

其中 λ_{n_1} 和 λ_{n_2}, ρ_{n_1}, ρ_{n_2} 由(9) 和(10) 给出。μ_{n_j} 是特征行列式

$$
\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix}
\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
\omega_1^3 e^{\omega_1\rho} & \omega_2^3 e^{\omega_2\rho} & \omega_3^3 e^{\omega_3\rho} & \omega_4^3 e^{\omega_4\rho} \\
\left(\dfrac{K\omega_1^2}{\rho} + \omega_1\right)e^{\omega_1\rho} & \left(\dfrac{K\omega_2^2}{\rho} + \omega_2\right)e^{\omega_2\rho} & \left(\dfrac{K\omega_3^2}{\rho} + \omega_3\right)e^{\omega_3\rho} & \left(\dfrac{K\omega_4^2}{\rho} + \omega_4\right)e^{\omega_4\rho}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (17)
$$

的根。并且存在一个自然数 $N_0 > 0$, 使得当 $n > N_0$ 时, μ_{n_j} 是 $\Delta_1(\lambda) = 0$ 的单根。

下面给出特征问题(15) 的特征函数的渐近表示公式。由引理 3 可得如下结果:

引理 4　特征问题(15) 的特征函数可渐近表示为

$$
\begin{aligned}
&\psi_{n_1}(x,\nu_{n_1}) = \\
&2i[(e^{\omega_3\nu_{n_1}} + e^{\omega_2\nu_{n_1}})e^{\omega_1\nu_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_3\nu_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\nu_{n_1}})e^{\omega_2\nu_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_2\nu_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\nu_{n_1}})e^{\omega_3\nu_{n_1}x} + \\
&(e^{(\omega_1+\omega_3)\nu_{n_1}} + e^{(\omega_1+\omega_2)\nu_{n_1}})e^{\omega_4\nu_{n_1}(x-1)}] + \\
&O\left(\frac{K}{\nu_{n_1}}\right), \ x \in [0,1], n = 1, 2, \cdots \qquad (18)
\end{aligned}
$$

其中, $\omega_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}, \omega_2 = e^{\frac{5}{4}\pi i}, \omega_3 = e^{\frac{\pi i}{4}}, \omega_4 = e^{-\frac{\pi i}{4}}$。

$$
\begin{aligned}
&\psi_{n_2}(x,\nu_{n_2}) = \\
&-2i[(e^{\omega_3\nu_{n_1}} + e^{\omega_2\nu_{n_1}})e^{\omega_1\nu_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_3\nu_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\nu_{n_1}})e^{\omega_2\nu_{n_1}x} - \\
&(e^{\omega_2\nu_{n_1}} + e^{(\omega_1-\omega_4)\nu_{n_1}})e^{\omega_3\nu_{n_1}x} + \\
&(e^{(\omega_1+\omega_3)\nu_{n_1}} + e^{(\omega_1+\omega_2)\nu_{n_1}})e^{\omega_4\nu_{n_1}(x-1)}] + \\
&O\left(\frac{K}{\nu_{n_2}}\right), \ x \in [0,1], \ n = 1, 2, \cdots \qquad (19)
\end{aligned}
$$

其中, $\omega_1 = e^{\frac{5}{4}\pi i}, \omega_2 = e^{\frac{3}{4}\pi i}, \omega_3 = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \omega_4 = e^{\frac{\pi i}{4}}$。并且存在一个常数 $M_0 > 0$, 使得对每个特征函数 $\psi_{n_j}(x)$, 有不等式

$$
\begin{cases}
|\psi_{n_j}(x,\nu_{n_j})| \le M_0 \\
|\psi'_{n_j}(x,\nu_{n_j})| \le M_0 n
\end{cases}, \ j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (20)
$$

证明略。

4　Riesz 基

由引理 2 知 $\{\phi_{n_j}(x,\rho_{n_j})\}$ 是(8) 对应于特征值 $\{\lambda_{n_j}\}$ 的特征元, 所以 $\{\phi_{n_j}(x,\rho_{n_j})\}$ 是相互直交的, 且构成 $L^2(0,1)$ 和 V_0 的正交基。因 $\phi_0(x) = \frac{1}{2}x^2$ 是系统(3) 的对应于特征值 $\lambda_0 = 0$ 的特征元, 显然 $V \times L^2(0,1) = V_0 \times L^2(0,1) + \{ax^2\} \times \{0\}$。不妨设 $\|\phi_{n_j}\| = 1; j = 1, 2; n = 1, 2, \cdots$。可以验证 $\{\phi_0, 0\}$

和$\left\{\frac{1}{2|\lambda_{n_j}|}(\phi_{n_j},\lambda_{n_j}\phi_{n_j})^{\mathrm{T}}\right\}$构成$V\times L^2(0,1)$的标准正交基。由引理4知$\{\psi_{n_j}(x,v_{n_j})\}$是系统(2)的特征元。容易验证$\Psi_{n_j}=\frac{1}{2|\mu_{n_j}|}(\psi_{n_j},\mu_{n_j}\psi_{n_j})^{\mathrm{T}}(j=1,2;n=1,2,\cdots)$是系统(5)的特征元。

定理1 对系统(5),当$0<K<\infty$时,存在$M>0$和一个自然数N_0,使得系统(5)的特征元$\{\Psi_{n_j}\}$和系统(4)的特征元满足

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\|\Psi_{n_j}-\Phi_{n_j}\|^2\leq 2M\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad(21)$$

证明 由引理2和引理4知,存在$N_0\geq 1$,当$n\geq N_0$时,ψ_{n_j}是系统(21)的特征函数,且有

$$\begin{aligned}&\Psi_{n_j}-\Phi_{n_j}=\\&\frac{1}{2|\mu_{n_j}|}(\psi_{n_j},\mu_{n_j}\psi_{n_j})^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2|\lambda_{n_j}|}(\phi_{n_j},\lambda_{n_j}\phi_{n_j})^{\mathrm{T}}=\\&\frac{1}{2|\mu_{n_j}|}((\psi_{n_j}-\phi_{n_j}),\mu_{n_j}(\psi_{n_j}-\phi_{n_j}))^{\mathrm{T}}+\\&\left(\frac{|\lambda_{n_j}|-|\mu_{n_j}|}{2|\mu_{n_j}||\lambda_{n_j}|}\phi_{n_j},\frac{\mu_{n_j}|\lambda_{n_j}|-\lambda_{n_j}|\mu_{n_j}|}{2|\mu_{n_j}||\lambda_{n_j}|}\phi_{n_j}\right)^{\mathrm{T}}\end{aligned}\qquad(22)$$

由引理2和引理4,经计算得

$$\int(\psi_{n_1}(x)-\phi_{n_1}(x))\overline{(\psi_{n_1}(x)-\phi_{n_1}(x))}\,\mathrm{d}x\leq\frac{M}{n^2}\qquad(23)$$

所以

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\|\Psi_{n_j}-\Phi_{n_j}\|^2\leq 2K_1\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad(24)$$

定理2 存在一个δ_0: $0<\delta_0<+\infty$,使当$0\leq K<\delta_0$时,系统(21)的特征元张成$V\times L^2(0,1)$的Riesz基。

证明 由引理3知,存在一个自然数N_1,当$n\geq N_1$时,$\mu_{n_j}(j=1,2;n=N_1,N_1+1,\cdots)$是系统(5)的简单特征值。由定理1,存在自然数$N_2$,使得

$$\sum_{n=N_2}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\|\Psi_{n_j}-\Phi_{n_j}\|^2=\theta_0<1$$

设$M_1=\max\{|\lambda_{n_j}|,j=1,2;n=1,2,\cdots,N_2\}$,则对复平面的闭区域$\{\lambda,|\lambda|\leq M_1+1\}$,由前面诸引理和Rouché定理,存在$\delta_0>0$,当$0\leq K\leq\delta_0$时,系统(5)在以$\lambda_0=0$和$\lambda_{n_j}$为圆心$(n<N_2)$,$\delta_0$为半径的圆内只有一个简单特征值,且$\mu_{n_j}=\lambda_{n_j}+O(K)$。由引理4中$\psi_{n_j}$的表达式知,当$K$适当小时,有

$$\sum_{n=1}^{N_2-1}\sum_{j=1}^{2}\|\Psi_{n_j}-\Phi_{n_j}\|^2=\theta_1<1-\theta_0$$

因此,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\|\Psi_{n_j}-\Phi_{n_j}\|^2<\theta_1+\theta_0<1$$

由Payley-Wiener定理[10],$\{\Psi_{n_j}\}$是$V\times L^2(0,1)$的一个Riesz基。

由定理2可得本文的主要结论:

定理3 系统(5)生成的C_0半群的最优指数衰减率可由下式计算。

$$\omega_0=\mathrm{Sup}\{\mathrm{Re}\lambda,\lambda\in\sigma(\mathbf{A})\}\qquad(25)$$

参 考 文 献

1 Chen G, Krants S G, Ma D W *et al*. The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation. In: Operator Methods for Optimal Control Problems. New York: Marcel-Dekker, 1987. 67-96

2 Chen G, Delfour M C, Krall A M *et al*. Modeling, stabilization and control of serially connected beam. SIAM J Control Optim, 1987, 25(3): 526-546

3 Chen G, Krants S G, Russell D L *et al*. Analysis, design and behavior of dispative joints for coupled beams. SIAM J Appl Math, 1989, 49(6): 1665-1693

4 Conrad F. Stabilization of beams by pointwise feedback control. SIAM J Control Optim, 1990, 28(2): 423-437

5 Krall A M. Asymptotic stability of the Euler-Bernoulli beam with boundary control. J Math Appl, 1989, 137(2): 288-295

6 Conrad F, Morgül Ö. On the stabilization of a beam with a tip mass. SIAM J Control Optim, 1998, 36(6): 1934-1963

7 Rebarber R. Exponetial stability of coupled beams with dissipative joints: A frequency domain approach. SIAM J Control Optim, 1995, 33: 1-28

8 Yu J Y, Li S J, Zhu G T. The stability of the time varable elastic system. Science in China, Series E, 1996, 39(1): 92-102

9 M A 纳依玛克著. 王志成译. 线性微分算子. 北京: 科学出版社, 1964

10 Riesz F, Nagy B S. Functional analysis. New York: Ungar, 1955

作 者 简 介

于景元 男, 1937年生。北京信息与控制研究所研究员,博士生导师。研究方向为复杂系统等。

王耀庭 男, 1958年生。山西大学数学系讲师。研究方向为分布参数控制系统等。

李胜家 男, 1956年生。山西大学数学系教授。研究方向为分布参数控制系统,微分方程应用等。