

# 广义分布参数扰动系统滑动模态控制\*

杨建辉

刘永清

(华南理工大学工商管理学院 广州 510640) (华南理工大学自动控制工程系)

**摘要** 研究广义分布参数扰动系统的变结构及其一致收敛问题,通过引入滑动模态补偿器,得到了简约型变结构控制的设计方法。最后研究了系统的动态品质,并指正了个别文献中存在的错误。

**关键词** 广义分布参数扰动系统,切换流形,变结构控制,补偿器,一致收敛

**分类号** TP 271.61

## Sliding Mode Control of Singular Distributed Parameter Perturbation System

Yang Jianhui, Liu Yongqing

(South China University of Technology)

**Abstract** The variable structure control problem of singular distributed parameter system is studied and uniformly convergence is considered. The design methods of variable structure control of skeleton type are obtained by introducing sliding mode compensator. Finally, the properties of the system are discussed and mistakes in individual reference are pointed out.

**Key words** singular distributed parameter perturbation system, switching manifold, variable structure control, compensator, uniformly convergence

### 1 引言

人们对分布参数系统的变结构控制理论已进行了系统的研究<sup>[1,2]</sup>。广义分布参数系统是较分布参数系统更为广泛的一类系统,如热流、温度分布、电缆信号传播、热质交换、气体吸附、磁流、谐振线、波导线和弱解耦系统等<sup>[3-5]</sup>。它们与一般分布参数系统有着本质的区别,当受到干扰时,不仅会使系统失稳,而且系统结构也会发生很大变化,如引起脉冲行为等。

广义分布参数系统研究是近期才开始的<sup>[3-9]</sup>,其控制综合设计的最早报导见文献[6]。最近我们也得到了一些结果<sup>[7-9]</sup>。文献[6]对广义分布参数系统进行了鲁棒镇定控制设计,作者从Weierstrass分解形式入手对一类广义分布参数系统进行了综合设计,由于分解是针对状态变量而言的,因此往往给控制器的设计带来不便;而且文献[6]在利用分离变量

法展开时有误,导致后面讨论中出现的问题。本文利用简约型分解对广义分布参数扰动系统进行综合设计,实现了控制变量的完全分离,得到了广义分布参数扰动系统的控制律。

### 2 简约型等价分解

考虑如下广义分布参数扰动系统

$$\begin{cases} E \frac{\partial Z(x, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} + QZ(x, t) + Bu(x, t) + f(x, t) \\ Z(0, t) = Z(1, t) = 0 \\ Z(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $Z \in R^n$  为系统状态,  $Z(x, t) \in H^1_0((0, 1) \times (0, \infty))$  (Sobolev space) 为系统输出,  $u \in R^m$  为系统控制输入,  $f(x, t) \in R^n$  为系统的有界外界干扰,且充分光滑;  $E, A, Q \in R^{n \times n}, B \in R^{m \times n}$ , 且  $\det E = 0$ ,  $(E, A)$  正则,  $\text{rank} E = r < n_0$ 。对系统(1)的齐次方程,我们利用固有函数法<sup>[3,10]</sup>,令

$$Z(x, t) = X(t)T(x)$$

其中  $X(t) \in R^{n \times n}, T(x) \in R^n$ 。代入得

\* 国家自然科学基金项目(69574009)

1998- 10- 26 收稿, 1999- 03- 29 修回



$$EX(t)T(x) = AX(x)T(x)$$

解得特征值为 $\{n\pi\}$ , 特征向量函数系为

$$\{\sin(n\pi x)h_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

其中 $h_n \in R^n$ 为一常向量, 利用特征向量函数系把系统(1)的 $Z(x, t), u(x, t), \mathcal{Q}(x), f(x, t)$ 展成

$$Z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \sin(n\pi x) h_n \dots X_n(t) \quad R^{n \times n} \quad (2)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\pi x) h_n \dots u_n(t) \quad R^{m \times n} \quad (3)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x) h_n \dots f_n(t) \quad R^{n \times n} \quad (4)$$

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_n \sin(n\pi x) h_n \dots \mathcal{Q}_n \quad R^{n \times n} \quad (5)$$

其中 $X_n(t), u_n(t), f_n, \mathcal{Q}_n$ 分别是 $Z(x, t), u(x, t), f(x, t), \mathcal{Q}(x)$ 的Fourier系数. 将(2) - (5)代入(1), 利用特征向量函数系 $\{\sin(n\pi x)\}$ 的完备性得到矩阵函数微分方程

$$\begin{cases} EX_n(t) = -(n\pi)^2 A X_n(t) + Q X_n(t) + B u_n(t) + f_n(t) \\ X_n(0) = \mathcal{Q}_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

因为 $(E, A)$ 正则, 则存在非奇异矩阵 $P, T$ 使(6)等价于

$$\begin{cases} \dot{X}_{n_1}(t) = (Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) X_{n_1}(t) + (Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12}) X_{n_2}(t) \\ \dot{\tilde{E}} X_{n_2}(t) = (Q_{21} - (n\pi)^2 A_{21}) X_{n_1}(t) + (Q_{22} - (n\pi)^2 A_{22}) X_{n_2}(t) + B_2 u_n(t) + f_{n_2}(t) \end{cases} \quad (7)$$

其中 $f_n(t) \in \mathbf{Im} B, B$ 列满秩.

$$PET = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & \tilde{E} \end{bmatrix}, \quad PAT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$PQT = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad PB = [0, B]^T$$

$Pf_n = [0 \quad f_{n_2}]^T, X_n = T[X_{n_1} \quad X_{n_2}]^T, B \in R^{m \times m}$ 可逆.

### 3 综合设计

**引理 1** 若 $(E, A - (n\pi)^2 Q, B)R$ -能控,  $\text{rank}(E, B) = n, B$ 列满秩,  $f(x, t) \in \mathbf{Im} B$ , 对系统(6), 存在非奇异矩阵 $P, T$ 使系统(6)受限等价于(7), 且

$(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}, Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12})$ 能控

证明略.

**引理 2** 对广义系统(6), 在满足引理 1 的条件下, 存在切换流形

$$S_n = CX_{n_1} + \tilde{E}X_{n_2} + z$$

$$z = -[(C + \tilde{E}nK_{n_1})(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) - n^2 K_{n_2} K_{n_1}] X_{n_1} - [nK_{n_2} + (\tilde{E}nK_{n_1} + C)(Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12})] X_{n_2}$$

使在 $S_n = 0$ 上, 系统(6)渐近稳定. 其中 $K_{n_1}, K_{n_2}$ 分别满足

$$\sigma[(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) + (Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12})nK_{n_1}] \subset C^- \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sigma(\tilde{E}, K_{n_2}) \subset C^- \\ \deg[\det(\lambda \tilde{E} - K_{n_2})] = \text{rank} \tilde{E} \end{cases} \quad (9)$$

**证明** 由引理 1 知,  $(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}, Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12})$ 能控. 类似于文献[7]的证明, 知 $(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}, Q_{11} - (n\pi)^2 nA_{12})$ 能控, 故存在 $K_{n_1}$ 使(8)成立. 显然存在 $K_{n_2}$ 使(9)成立, 这说明系统不会产生脉冲行为. 在 $S_n = 0$ 上, 由 $\dot{S}_n = 0$ 可得等效控制

$$u_{\text{neq}} = -B_2^{-1} \{ [ (Q_{21} - (n\pi)^2 A_{21}) - \tilde{E}nK_{n_1}(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) + n^2 K_{n_2} K_{n_1} ] X_{n_1} + [ (Q_{22} - (n\pi)^2 A_{22}) - nK_{n_2} - \tilde{E}nK_{n_1}(Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12}) ] X_{n_2} + f_{n_2} \}$$

理想滑动模方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_{n_1}(t) = (Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) X_{n_1}(t) + (Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12}) X_{n_2}(t) \\ \dot{\tilde{E}} X_{n_2}(t) = [\tilde{E}nK_{n_1}(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) - n^2 K_{n_2} K_{n_1}] X_{n_1}(t) + [nK_{n_1} + \tilde{E}nK_{n_2}(Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12})] X_{n_2}(t) \end{cases} \quad (10)$$

以下类似于文献[11]证明. 由(10)知, 滑动模运动与干扰无关.

**引理 3** 对广义系统(6), 若满足引理 1 的条件, 则存在控制

$$u_n(t) = -B_2^{-1} \{ [ (Q_{21} - (n\pi)^2 A_{21}) - \tilde{E}K_{n_1}(Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) + K_{n_2} K_{n_1} ] X_{n_1} + [ (Q_{22} - (n\pi)^2 A_{22}) - K_{n_2} - \tilde{E}K_{n_1}(Q_{12} - (n\pi)^2 A_{12}) ] X_{n_2} \} - \mathcal{E}_n (\alpha + S_n^T S_n)^{-1/2} -$$

$$P \delta_n \operatorname{sng} S_n \quad (11)$$

使系统 (6) 的闭环系统渐近稳定, 式中  $\alpha = \min \{S_n^T S_n\}$ 。

证明 因为  $f(x, t)$  有界, 由 (4) 知  $f_n(t)$  有界且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ , 总存在连续函数  $\delta_n > 0$ , 使

$$f_n(t) \leq \delta_n (EX_n), \quad \delta_n(0) = 0$$

下面证明系统 (6) 在控制 (11) 作用下可实现滑动模运动, 即切换流形  $S_n = 0$  是可可达的。沿系统 (7) 的解的轨道,  $S_n$  对  $t$  的导数

$$\begin{aligned} \dot{S}_n &= CX_{n_1} + \tilde{E}X_{n_2} + z \\ &- \mathfrak{S}(\alpha + S_n^T S_n)^{-1/2} + \\ &f_{n_2}(t) - P \delta_n \operatorname{sng} S_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^T \dot{S}_n &= \epsilon \frac{\sqrt{2}}{2} (S_n^T S_n)^{1/2} + \\ &S_n^T f_{n_2}(t) - S_n^T P \delta_n \operatorname{sng} S_n \\ &- \epsilon \frac{\sqrt{2}}{2} (S_n^T S_n)^{1/2} + \\ &S_n^T P (\delta_n - \delta_n) = \\ &- \epsilon \frac{\sqrt{2}}{2} (S_n^T S_n)^{1/2} < 0 \end{aligned}$$

令  $V = \frac{1}{2} S_n^T S_n$ , 则  $\dot{V} = -\epsilon \sqrt{V} < 0$ , 故可实现滑动模运动。由此得到达时间  $t_1 = \sqrt{V(t_0)} / \epsilon$ , 故

$$S_n(t) = 0, \quad t \geq t_1$$

可以证明闭环系统渐近稳定。

下面讨论  $Z(x, t), u(x, t)$  的一致收敛性问题。

定理 1 广义分布参数系统 (1), 若满足引理 1 和引理 2 的条件, 且

$$\sigma(Q_{11} + nQ_{12}K_{n_1}) \subset C^- \quad (12)$$

$$\sigma(A_{11} + nA_{12}K_{n_1}) \subset C^- \quad (13)$$

的所有元素具有正实部, 则系统 (1) 的滑动模方程 (10) 的解 (2) 一致收敛。

证明略。

定理 2 若广义分布参数系统 (1) 满足定理 1 的条件, 且

$$\begin{cases} \lim_n \frac{f_n(t)}{n^\alpha} = a \\ \lim_n \frac{\delta_n}{n^\beta} = b \end{cases}, \quad \alpha, \beta > 1$$

则系统 (1) 的解 (2) 和 (3) 一致收敛。

定理 2 的证明与定理 1 证明类似, 此略。

定理 3 若  $(E, A)$  正则, 且满足引理 1 的条件, 则存在变结构控制

$$u(x, t) =$$

$$\begin{aligned} &(-B^{-1} \{ [Q_{21} - (n\pi)^2 A_{21}] - \\ &_{n=1} \tilde{E}K_{n_1} (Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) + K_{n_2} K_{n_1} ] X_{n_1} + \\ &[Q_{22} - (n\pi)^2 A_{22}] - K_{n_2} - \tilde{E}K_{n_1} (Q_{12} - \\ &(n\pi)^2 A_{12}) ] X_{n_2} \} - \mathfrak{S}_n (S_n^T S_n)^{-1/2} - \\ &P \delta_n \operatorname{sng} S_n) \sin(n\pi x) h_n \end{aligned} \quad (14)$$

使系统 (1) 的轨线在最小意义下渐近稳定。

显然, 在实际工作中, 控制 (14) 难以实现, 根据实际要求, 我们用  $Z(x, t)$  的低维模态成分来满足, 将控制取为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &_N (-B^{-1} \{ [Q_{21} - (n\pi)^2 A_{21}] - \\ &_{n=1} \tilde{E}K_{n_1} (Q_{11} - (n\pi)^2 A_{11}) + K_{n_2} K_{n_1} ] X_{n_1} + \\ &[Q_{22} - (n\pi)^2 A_{22}] - K_{n_2} - \tilde{E}K_{n_1} (Q_{12} - \\ &(n\pi)^2 A_{12}) ] X_{n_2} \} - \mathfrak{S}_n (S_n^T S_n)^{-1/2} - \\ &P \delta_n \operatorname{sng} S_n) \sin(n\pi x) h_n \end{aligned} \quad (15)$$

但是如何选取  $N$ , 控制  $u(x, t)$  才能保证系统达到需要的动态品质? 下面给出有关定理:

定理 4 对广义分布参数系统 (1), 若满足引理 1 的条件, 且如下集合

$$\begin{aligned} \sigma(E, A) = \\ \{s: s \in C, |sE - A| = 0, C \text{ 为复平面} \} \end{aligned}$$

的所有元具有正实部, 则对  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $\bar{N}, T$  和控制 (15), 当  $t > T, n > \bar{N}$  时, 系统 (1) 的解为

$$Z(x, t) < \epsilon$$

证明略。

## 4 文献 [6] 中存在的问题

文献 [6] 中有关内容原文如下:

考虑如下控制系统

$$\begin{cases} E \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} + Qy(t, x) + \\ Bu(t, x) + Bg(t, x) \quad (1^*) \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0 \\ y(0, x) = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

这里,  $y(t, x) \in R^n$  为状态向量,  $u(t, x) \in R^m$  是输入量,  $g(t, x)$  表示摄动量,  $F(x) \in R^n$  表示  $x$  的连续函数,  $E, A, B, Q$  为适当维数的常阵,  $\det(E) = 0$  且  $(E, A)$  是正则的。

由文献 [3] 知, 当  $Q = O_{n \times n}, B = O_{n \times m}$  时, 利用分离变量法, 取

$$y(t, x) = G(t)H(x)$$

其中,  $G(t) \in R^{n \times n}$ ,  $H(x) \in R^n$ 。可求得

$$H_K(x) = \sin(K\pi x)h_K, \quad K = 1, 2, \dots$$

此即为(1\*)的固有函数,  $(K\pi)^2$ 为其固有值,  $h_K \in R^n$ 。利用此固有函数可将系统(1\*)的解  $y(t, x)$ , 控制  $u(t, x)$  与扰动  $g(t, x)$  展开成

$$y(t, x) =$$

$$\sum_{n=1} G_K(t) \sin(K\pi x) \dots G_K(t) \in R^n \quad (2^*)$$

$$u(t, x) =$$

$$\sum_{n=1} u_K(t) \sin(K\pi x) \dots u_K(t) \in R^m \quad (3^*)$$

$$g(t, x) =$$

$$\sum_{n=1} g_K(t) \sin(K\pi x) \dots g_K(t) \in R^m \quad (4^*)$$

将它们代入(1\*)可得  $G_K(t)$  的广义方程

$$E \dot{G}_K(t) =$$

$$- (K\pi)^2 A G_K(t) + Q G_K(t) +$$

$$B u_K(t) + B g_K(t), \quad K = 1, 2, \dots \quad (5^*)$$

文献[6]在利用分离变量法时出错, 特征向量函数系应为  $\{\sin(n\pi x)h_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots, h_n \in R^n$  为一常向量, 而不是函数系  $\{\sin(n\pi x)\}$ 。关键在于  $G(t) \in R^{n \times n}$ , 故应推出  $G_K(t) \in R^{n \times n}$ ; 同理  $u_K(t), g_K(t) \in R^{m \times n}$ 。事实上(7)和(5\*)是一个矩阵函数微分方程, 而不是一个向量函数微分方程, 故在讨论系统(1)或(1\*)的性态时, 其范数是不同的, 证明当然也不同, 结论就会有差异。

## 参考文献

- 1 Utkin U I Sliding modes in control and optimization. New York: Springer-Verlag, 1992

- 2 胡跃明 分布参数变结构控制系统 北京: 国防工业出版社, 1996
- 3 Traska Z, Marszalek W. Singular distributed parameter systems IEE Control Theory and Application, 1993, 40(5): 305-308
- 4 Lw s FL. A review of 2-D implicit system. Automatica, 1992, 2: 345-354
- 5 Joder L, Legua Fernandez M. An implicit difference method for the numeral solution of couple system of partial differential equations Appl Math Comput, 1991, 46: 127-134
- 6 岳东, 刘永清 广义分布参数系统的变结构控制 控制与决策, 1996, 11(2): 127-134
- 7 Liu Yongqin, Yang Jianhui The problem of variable structure control of structural stability for singular distributed parameter system. 华南理工大学学报, 1999, 27(4): 77-80
- 8 杨建辉, 冯昭枢, 刘永清 一类广义分布参数系统简约型变结构控制 华南理工大学学报, 1999, 26(12): 29-33
- 9 杨建辉, 刘永清. 广义不确定分布参数系统的滑动模控制 华南理工大学学报, 1999, 27(2): 32-36
- 10 姜礼尚, 陈亚浙 数学物理方程讲义 北京: 高等教育出版社, 1986
- 11 刘永清, 温香彩 广义系统的变结构控制 广州: 华南理工大学出版社, 1997

## 作者简介

杨建辉 男, 1960年生。华南理工大学自动控制工程系讲师, 博士研究生。主要研究方向为非线性偏微分方程, 广义分布参数系统变结构控制理论。

刘永清 男, 1930年生。1955年毕业于复旦大学, 现为华南理工大学系统工程研究所所长, 教授, 博士生导师。主要研究方向为广义大系统, 系统工程。