

不确定系统的滚动时域 H 控制设计*

耿晓军 席裕庚

(上海交通大学自动化研究所 200030)

摘要 针对存在状态矩阵、输入矩阵结构化摄动和外界扰动输入等不确定性的连续线性时变系统, 给出滚动时域 H 控制律及其存在性的充分条件。该控制律使系统闭环稳定, 且系统对扰动输入的增益不超过某一人为设定的上界。进一步考虑执行机构非线性特性, 推导出上述系统当执行机构存在扇区非线性摄动时的稳定滚动时域 H 控制律及其存在性的充分条件。

关键词 滚动时域控制, H 控制, 线性分式变换, 非线性摄动, 预测控制

分类号 TP 13

Receding Horizon H Control for Systems with Uncertainty

Geng Xiaojun, Xi Yugeng

(Shanghai Jiaotong University)

Abstract Considering continuous linear time-varying systems with disturbance and perturbations on the state and input matrix, the receding horizon H control law and the sufficient condition for its existence are derived. The control law makes the system closed-loop stable, and the gain of the system for the disturbance input will be limited under a scheduled upper-bound. Furthermore, using similar method, the receding horizon H controllers of the above system in presence of a kind of actuator nonlinear perturbation are obtained.

Key words receding horizon control, H control, linear fractional transformation, nonlinear perturbations, predictive control

1 引言

70 年代末, Kwon 等人提出了基于有限时域二次型性能指标最优的滚动时域控制 (RHC)^[1], 它利用终端定点约束保证了闭环系统的稳定性。考虑到系统外界扰动的存在, Tadmor 等人提出了终端约束滚动时域 H 控制^[2], 给出相应的控制律及其存在的充分条件, 该控制律使系统闭环稳定, 且使系统对于扰动信号的增益不超过某一人为设定的上界。

实际系统除受外界扰动影响外, 还会受到自身参数摄动或执行机构非线性特性的影响。目前对于有摄动系统鲁棒预测控制的研究还远未完善。文献 [3] 对输入矩阵具有结构化摄动的线性系统设计了

鲁棒滚动时域控制器。本文在此基础上对滚动时域 H 控制做进一步研究, 给出不确定系统的滚动时域 H 控制律及其存在性的充分条件。

2 问题的提出和描述

同时存在状态矩阵结构化摄动和外界扰动输入的线性时变 (LTV) 系统为

$$\dot{x}(t) = [A(t) + \Delta A(t)]x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) \quad (1)$$

其中 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $w(t) \in L_2$, $w(t)$ 为外界扰动输入, $u(t)$ 为控制输入, $\Delta A(t)$ 为结构化摄动; $\Delta A(t) \triangleq E(t)\Sigma(t)F(t)$, $\Sigma(t) \in R^{p \times q}$, $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $E(t)$ 及 $F(t)$ 为具有相应维数的已知矩阵。未知摄动项 $\Sigma(t)$ 满足

$$\|\Sigma(t)\| < 1 \quad (2)$$

* 国家自然科学基金项目 (69774004)

其中 $\Sigma(t) = \sup_w \frac{\Sigma(t)w(t)}{L_2}$
 文中 L_2 指 L_2 范数或其诱导范数, 如
 $\Delta_{L_2[s, t]} = \int_s^t \Delta^T \Delta d\tau$ 取 $L_2[0, \infty)$, 下文简记为
 L_2 为所有平方可积函数集合。

类似地, 将同时存在输入矩阵结构化摄动和外界扰动输入的LTV系统描述为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + [B_2(t) + \Delta B_2(t)]u(t) \quad (3)$$

其中 $\Delta B_2(t) \triangleq E(t)\Sigma(t)F(t)$, $\Sigma(t)$ 的意义与系统(1)相同。

若系统(1)执行机构存在非线性摄动时描述如下

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)\Phi_u(t, t) \quad (4)$$

其中 $u(t)$ 为设计的控制律。由于执行机构的非线性, 该控制律是通过非线性函数 $\Phi_u(t, t)$ 起作用的。

滚动时域 H 控制是指: 在每一时刻 t , 针对上述系统, 对如下滚动性能指标进行优化

$$\begin{cases} \min_u \max_w \{ z^2_{L_2[t, t+T]} - \gamma^2 w^2_{L_2[t, t+T]} \} \\ \text{s.t. } x(t+T) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $x(t+T) = 0$ 为终端约束, z 为辅助输出信号。本文取 $z = Cx + Du, C^T D = 0, C^T C = Q, D^T D = R$, 于是有

$$z^2_{L_2[t, t+T]} = \int_t^{t+T} (x^T Q x + u^T R u) d\tau$$

$\gamma > 0$ 为人为设定的扰动增益上界。优化后的反馈控制律为 $u(\tau) = k(\tau)x(\tau), \tau \in [t, t+T]$, 而实际实施于系统的控制量为 $u(t) = k(t)x(t)$ 。下一时刻则将时域向前滚动, 重新计算控制量。

对于这样的不确定系统, 控制的目的一方面使系统闭环稳定, 另一方面则要求闭环系统关于扰动 $w(t) \in L_2$ 的映射 $\Gamma_{zw}: w \rightarrow z(x(t_0) = 0, w, u = k(t)x(t))$ 满足

$$\Gamma_{zw} = \sup_w \left(\frac{\Gamma_{zw} w}{L_2} / w \right) \leq \gamma$$

3 有外界扰动和结构化摄动的滚动时域 H 控制

首先介绍一个引理, 该引理针对无摄动的连续时变系统, 给出了具有人为设定扰动增益的滚动时域 H 控制存在的充分性条件。

引理 1^[2] 考虑受扰系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) \\ \dot{z}(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中 $C(t), D(t)$ 满足 $C^T(t)C(t) = Q(t) > 0, D^T(t)D(t) = R(t) > 0$, 且 $C^T(t)D(t) = 0, w \in L_2$ 。在性能指标(5)下, 该系统存在滚动时域 H 控制律的充分条件是: 存在 $T > 0$, 使如下微分 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, t+T) = & \\ & A(\tau)P(\tau, t+T) + P(\tau, t+T)A(\tau)^T + \\ & P(\tau, t+T)Q(\tau)P(\tau, t+T) + \\ & \gamma^2 B_1(\tau)B_1^T(\tau) - B_2(\tau)R^{-1}B_2^T(\tau) \end{aligned} \quad (7)$$

在边界条件为 $P(t+T, t+T) = 0$ 下, 存在一致有界对称正定阵 $P(\tau, t+T), t \in \tau \in [t, t+T]$, 同时 $P^{-1}(t, t+T)$ 存在且一致有界。于是系统(1)稳定, 且扰动闭环增益满足 $\Gamma_{zw} \leq \gamma$, 相应的最优控制律为

$$u(t) = K(t)x(t) = -R^{-1}(t)B_2^T(t)P^{-1}(t, t+T)x(t) \quad (8)$$

基于引理 1 和线性分式变换(LFT)方法, 下面分别给出系统(1)和系统(3)的滚动时域 H 控制律及其存在性的充分条件。

定理 1 对于系统(1), 如果存在正实数 $T, \epsilon > 0$, 使微分 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, t+T) = & \\ & A(\tau)P(\tau, t+T) + P(\tau, t+T)A(\tau)^T + \\ & P(\tau, t+T)(Q + \epsilon^2 F^T(\tau)F(\tau))P(\tau, t+T) + \\ & \gamma^2 B_1(\tau)B_1^T(\tau) + \epsilon^2 E(\tau)E^T(\tau) - \\ & B_2(\tau)R^{-1}B_2^T(\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $P(\tau, t+T) (t \in \tau \in [t, t+T])$ 性质同引理 1。若采用控制律(8), 则系统(1)稳定, 且扰动闭环增益满足 $\Gamma_{zw} \leq \gamma$ 。

证明 对系统(1)进行LFT变换, 则有如下增广形式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \epsilon^{-1}Ew_0 + B_1w + B_2u \\ z = Cx + Du \\ z_0 = \epsilon Fx \\ w_0 = \Sigma z_0 \end{cases} \quad (10)$$

令

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w_0}{\gamma}, \bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ w_0 \end{bmatrix}, \bar{z} = \begin{bmatrix} z \\ z_0 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_1 &= [B_1 \quad \frac{\gamma E}{\epsilon}], \bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ \epsilon F \end{bmatrix}, \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = B_2 \end{aligned}$$

进一步将系统(10) 描述为确定部分 G 和摄动部分 $G\Sigma$, 即

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + \bar{B}w + \bar{B}_2u \\ z = \bar{C}x + \bar{D}u \end{cases} \quad (11a)$$

$$G\Sigma: w_0 = \Sigma z_0 \quad (11b)$$

G 称为名义系统。这样变形后, 结构摄动 w_0 和扰动输入 w 均可作为子系统(11) 的外界扰动, 合记为 \bar{w} 。对名义系统(11), 在每一时刻 t 对如下滚动性能指标进行优化

$$\begin{cases} \min_u \max_w \{ \int_{t_0}^{t+T} \bar{z}^T L_2 L_2^T \bar{z} - \gamma^2 \int_{t_0}^{t+T} \bar{w}^T L_2 L_2^T \bar{w} \} \\ \text{s.t. } x(t+T) = 0 \end{cases}$$

根据引理 1, 若存在状态反馈 $u(t) = K(t)x(t)$, 其中 $K(t) = -R^{-1}B_2^T(t)P^{-1}(t, t+T)$, $P(t, t+T)$ 为微分 Riccati 方程(9) 的解。则系统(11) 闭环稳定, 且扰动闭环增益

$$\Gamma_{zw}^-: \bar{w} \quad \bar{z}(x(t_0) = 0, \bar{w}, u = K(t)x(t))$$

满足 $\Gamma_{zw}^- < \gamma$ 又因

$$\Gamma_{zw}^- = \begin{bmatrix} \Gamma_{zw} & * \\ * & \Gamma_{z_0 w_0} \end{bmatrix}$$

其中 $*$ 表示适当的矩阵。则根据算子性质有

$$\Gamma_{zw}^- < \gamma \text{ 和 } \Gamma_{z_0 w_0}^- < \gamma, \text{ 因此}$$

考虑上述状态反馈 $u(t)$ 作用下的闭环系统 $G + G\Sigma$, 上面已有 $\Gamma_{z_0 w_0}^- < 1$ 。又因 $\Gamma_{w_0 z_0}^- = \Sigma < 1$, 根据小增益定理, 则系统(10) 闭环稳定。(证毕)

定理 2 对于系统(3), 如果存在正实数 $T, \epsilon > 0$, 使微分 Riccati 方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, t+T) = \\ & A(\tau)P(\tau, t+T) + P(\tau, t+T)A^T(\tau) + \\ & P(\tau, t+T)QP(\tau, t+T) + \gamma^2 B_1(\tau)B_1^T(\tau) + \\ & \epsilon^2 E(\tau)E^T(\tau) - B_2(\tau)(R + \\ & \epsilon^2 F^T(\tau)F(\tau))^{-1}B_2^T(\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

有解, $P(\tau, t+T)(t = \tau, t+T)$ 性质同引理 1。若采用如下控制律

$$u(t) = K(t)x(t) = - (R + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B_2^T(t) P^{-1}(t, t+T) x(t) \quad (13)$$

则系统(3) 稳定, 且干扰衰减增益满足

$$\Gamma_{zw}^- < \gamma$$

证明 对系统(3) 进行 LFT 变换, 则有如下推广形式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw + \epsilon^{-1} E w_0 + B_2 u \\ z = Cx + Du \\ z_0 = \epsilon F u \\ w_0 = \Sigma z_0 \end{cases} \quad (14)$$

令

$$w = \frac{w_0}{\gamma}, \bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ w \end{bmatrix}, \bar{z} = \begin{bmatrix} z \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = [B_1 \quad \frac{\gamma E}{\epsilon}], \bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ \epsilon F \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = B_2$$

则可将系统(14) 描述为(11) 的形式。类似于定理 1 中分析, 即可证得。

考虑分别对应于系统(1) 和系统(3) 的如下线性定常系统

$$\dot{x}(t) = [A + E\Sigma(t)F]x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \quad (15)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1(t)w(t) + [B_2 + E\Sigma(t)F]u(t) \quad (16)$$

当时域长度 T , 定理 1, 2 中的微分 Riccati 方程(9), (12) 分别蜕化为如下代数方程

$$PA + A^T P + P[\gamma^2 B_1 B_1^T + \epsilon^2 E E^T - B_2 R^{-1} B_2^T]P + Q + \epsilon^2 F^T F = 0 \quad (17)$$

$$PA + A^T P + P[\gamma^2 B_1 B_1^T + \epsilon^2 E E^T - B_2(R + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B_2^T]P + Q = 0 \quad (18)$$

相应的控制律(8), (13) 蜕化为如下的常系数反馈

$$u(t) = Kx(t) = -R^{-1}B_2^T P x(t) \quad (19)$$

$$u(t) = Kx = - (R + \epsilon^2 F^T F)^{-1} B_2^T P x(t) \quad (20)$$

此时滚动时域 H 控制律等同于鲁棒 H 控制, 于是有如下推论:

推论 1 对于系统(15) (或(16)), 如果 Riccati 方程(17) (或(18)) 存在正常对称解 P , 则在控制律(19) (或(20)) 作用下, 闭环系统稳定。

4 一类执行机构扇区非线性 摄动下的滚动时域 H 设计

执行机构具有扇区非线性的系统已为众多学者所研究。文献[4] 对该类线性定常系统进行了鲁棒控制器设计, 将扇区非线性特性变形, 使原摄动系统描述为结构不确定性的系统, 从而应用 H 设计方法使原问题得以解决。采用类似的思路, 本文提出扇区非线性摄动下不确定性系统的滚动时域 H 设计问题, 并给出控制律形式。

首先给出扇区非线性描述: $\Phi(u)$ 为一非线性扇区函数, 即如图 1 所示的扇区。定义 $u_0 = \Phi(u)$ - (1

+ α)u/2, 其中 1 - α > 0. 于是有

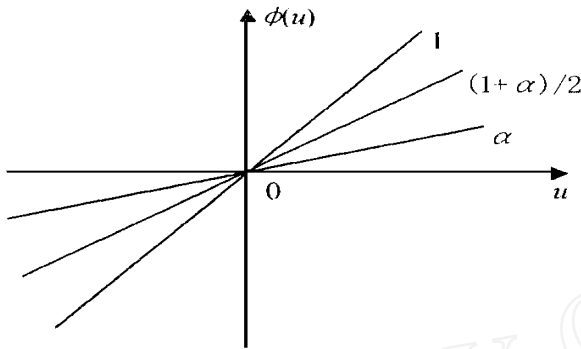


图1 扇区[α, 1], (0 < α < 1)

$$\phi(u) = u_0 + (1 + \alpha)u/2$$

且 $u_0 = (1 - \alpha)u/2$. 易知 u_0 属于如下集合

$$\Omega = \{(1 - \alpha)M u/2; M \in R^{m \times m}, M \geq 1\}$$

具有扇区非线性摄动的系统(4), 采用上述定义后可描述为

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A]x(t) + B w + (1 + \alpha)B_2 u(t)/2 + B_2 u_0 \quad (21)$$

于是有如下定理:

定理3 考虑具有执行机构扇区非线性的线性时变系统(4), 如果存在正实数 $T, \epsilon > 0$, 使如下微分 Riccati 方程有解

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, t+T) = & \\ & A P(\tau, t+T) + P(\tau, t+T)A^T + \\ & P(\tau, t+T)(Q + \epsilon^2 F^T F)P(\tau, t+T) + \\ & \epsilon^2 B_2 B_2^T + Y^2 B_1 (\tau) B_1^T (\tau) + \epsilon^2 E E^T - \\ & \frac{(1 + \alpha)^2}{4} B_2 \left[R + \frac{(1 - \alpha)^2 \epsilon^2}{4} I \right]^{-1} B_2^T \quad (22) \end{aligned}$$

其中 $P(\tau, t+T)$ ($t \leq \tau \leq t+T$) 性质同引理1. 若采用如下控制律

$$\begin{aligned} u(t) = & K(t)x(t) = \\ & - \frac{1 + \alpha}{2} \left[R + \frac{(1 - \alpha)^2 \epsilon^2}{4} I \right]^{-1} \times \\ & B_2^T P^{-1}(t, t+T)x(t) \quad (23) \end{aligned}$$

则系统(21) 稳定, 且扰动闭环增益满足

$$\Gamma_{zw} = Y$$

证明 将系统(21) 进一步写成

$$\dot{x}(t) = (A + E \Sigma F)x(t) + \left[\frac{1 + \alpha}{2} B_2 + \frac{1 - \alpha}{2} B_2 M \right] u + B_1 w \quad (24)$$

令 $w_1 = \Sigma z_1, w_2 = M z_2$
 $w_1 = w_1/Y, w_2 = w_2/Y$

$$\bar{B}_1 = [B_1 \quad \frac{Y E}{\epsilon} \quad \frac{Y B_2}{\epsilon}], \quad \bar{B}_2 = \frac{(1 + \alpha)B_2}{2}$$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} z \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ \epsilon F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ \epsilon(1 - \alpha)I/2 \end{bmatrix}$$

于是系统(24) 可改写为(11) 的形式, 类似于定理1 的证明思路, 本定理可证得.

5 仿真例子

考虑式(1) 所描述的系统, 其系统矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} r \mathcal{Q}(t) & r \mathcal{Q}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1], \quad D = 1$$

其中 $|\mathcal{Q}(t)| < 1$. 选取不确定性参数形式为

$$\Delta A = E \Sigma(t) F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{Q}(t) [r \quad r], \quad r = 0.1$$

令 $Y = 1, T = 1, w(t) = 0.1 \sin(t)$. 由定理1 中公式, 当 $\epsilon = 1$ 时求得

$$P(t, t+T) = \begin{bmatrix} 15.8605 & -13.2885 \\ -13.2885 & 21.8928 \end{bmatrix}$$

进而得到滚动时域 H 控制律 $u = -1.1591x_1 - 0.9320x_2$. 当 $\epsilon = 10$ 时求得

$$P(t, t+T) = \begin{bmatrix} 25.2824 & -24.0840 \\ -24.0840 & 33.8063 \end{bmatrix}$$

得到滚动时域 H 控制律

$$u = -1.1769x_1 - 0.9863x_2$$

由闭环系统轨迹可知, 上述控制器使系统稳定, 且有 $z(t) = Y w(t)$.

6 结 语

本文首先针对存在状态矩阵和输入矩阵结构化摄动的不确定系统, 通过LFT 变换, 将摄动和扰动共存的问题转换为扰动问题形式, 结合现有滚动时域 H 控制方法, 得到稳定控制方案; 然后针对存在执行机构非线性摄动的情形, 进一步研究上述不确定性系统的滚动时域 H 控制器的设计方法, 并给出解的充分条件. 这些工作对滚动时域控制或预测控制在不确定系统中的发展有着重要意义.

(下转第157页)

经验证可知系统 (20) 满足定理 4 的条件。并且易知当 $v(x, y) = 0, x(0) = 0, y(0) < 0$ 时, 该系统不稳定。利用本文方法, 选择输入 $v(x, y) = y^2 + y^3$, 此时系统 (20) 的扩展零动态为 $\dot{y} = y^3$, 易知其为 3 阶鲁棒稳定。故输入 $v(x, y) = y^2 + y^3$ 使系统 (20) 渐近稳定。

6 结 论

针对零动态非渐稳的单输入单输出控制系统, 从关于零动态渐稳系统判稳的命题出发, 结合本文提出的鲁棒稳定的概念, 给出了一个更一般的判断系统渐近稳定性质的引理, 并利用该引理得到零动态非渐稳的系统局部渐近镇定的一个充分条件。在此基础上, 利用静态分叉控制的引理, 对一类满足条件 (S) 的系统提供了使系统局部渐近镇定的反馈函数存在的充分条件定理, 并给出该反馈函数的具体形式及约束条件公式。这使本文结果易于应用于实际工程问题。

另一方面, 本文也是对静态分叉控制理论的一种简化。由于零动态的维数小于系统维数, 仅对系统零动态应用静态分叉控制的方法必然比对原系统应用该方法简洁。

参 考 文 献

- 1 陈彭年, 韩正之, 张钟俊 非线性控制系统镇定的若干进展 控制理论与应用, 1995, 12(4): 401- 409
- 2 A Isidori Nonlinear control systems Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 3 E H Abed, J H Fu Local feedback stabilization and bifurcation control- Part II. Systems & Control Letters, 1987, 8(31): 467- 473
- 4 J H Fu Smooth feedback stabilizability of nonlinear systems Contr Theory & Advanced Tech, 1990, 6(4): 559 - 571
- 5 J Guckenheimer, P Holmes Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields Berlin: Springer-Verlag, 1983

作 者 简 介

李春文 男, 1958 年生。清华大学自动化系教授, 博士。研究领域为非线性控制, 稳定性分析等。

唐 云 男, 1941 年生。1965 年毕业于北京大学数学系, 现为清华大学应用数学系教授, 博士生导师。主要研究方向为动力系统及应用。

胡世文 男, 1972 年生。1996 年毕业于清华大学自动化系, 现为清华大学应用数学系硕士研究生。主要研究方向为动力系统及其稳定性。

(上接第 152 页)

参 考 文 献

- 1 Kwon W H, A E Pearson A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. IEEE Trans on Autom Contr, 1977, 22(6): 838- 842
- 2 Tadmor G Receding horizon revisited: An easy way to robustly stabilize an LTV system. Systems & Control Letters, 1992, 18(2): 285- 294
- 3 吴玮琦 鲁棒预测控制研究 上海交通大学博士学位论文, 1998
- 4 顾永如 不确定系统的鲁棒稳定与控制 浙江大学博士学位论文, 1997

位论文, 1997

作 者 简 介

耿晓军 女, 1972 年生。1996 年在西北工业大学获工学硕士学位, 现为上海交通大学自动化系博士研究生。主要从事非线性预测控制的研究。

席裕庚 男, 1946 年生。1968 年毕业于哈尔滨军事工程学院, 1984 年在慕尼黑工业大学获工学博士学位, 现为上海交通大学教授, 博士生导师。目前主要研究方向为复杂工业过程和智能机器人控制的理论和方法。