第 15 卷 第 3 期
Vol. 15 No. 3

控 制 与 决 策
CONTROL AND DECISION

2000 年 5 月
May 2000

基于 Haar 小波变换的连续时间系统鲁棒参数辨识*

袁廷奇 刘文江
(西安交通大学自控系 710049)

摘 要 给出用 Haar 小波对连续时间系统的鲁棒辨识方法。该方法在用 Haar 小波对系统输入和输出展开时,通过极小化一个鲁棒指标来减少噪声对展开系数的影响,因此对连续时间系统可获得鲁棒参数估计。仿真结果表明了该算法的有效性。

关键词 Haar 小波变换,系统辨识,连续时间系统
分类号 TP 27

Continuous Time System Robust Identification Based on Haar Wavelet Method

Yuan Tingqi, *Liu Wenjiang*
(Xi'an Jiaotong University)

Abstract By introducing the Haar wavelet, the system input and output are first expanded Haar wavelet series. Then the continuous time model of the system can be got by means of least square method. Meanwhile considering the existence of perturbations, a robust identification method by minimizing a robust criterion to reduce the effect of noise is presented. So this method can obtain robust parameter estimation for continuous time system model and the simulation shows its effectiveness.

Key words Haar transform, identification, continuous time system

1 引 言

为了对系统进行分析和控制,必须确定系统的数学模型。为此,可根据系统的输入输出采样数据来辨识系统的模型参数。对于某些系统而言,辨识连续时间系统模型更为重要,因为这将直接影响控制系统所能达到的性能要求。

用正交函数组成操作矩阵对动态系统辨识和优化的方法,已取得了较好的效果[1,2]。其主要特点是将微分方程转化为代数方程,使求解辨识和优化的过程得以简化。然而在众多正交函数中,Haar 小波函数引起人们的普遍关注[3]。与其它正交函数相比,Haar 小波函数是最简单的正交函数,它具有构造简单、计算方便的特点。

本文以 Haar 小波函数为基向量,利用其小波分析特性,直接得到基向量的积分表达式,从而将系统的微分方程转化为代数方程。依据系统输入输出数据的小波变换,用最小二乘法可得到系统的模型参数。

由于测量噪声,特别是较强的随机干扰,会造成系统输出数据的污染;如果对其直接进行 Haar 小波变换后用来进行参数辨识,将严重影响参数辨识的精度。因此,文中给出一个极小化鲁棒指标,用来减少噪声对展开系数的影响,从而得到系统的鲁棒参数估计。

2 基于 Haar 小波变换的系统辨识方法

2.1 Haar 小波变换及其积分

Haar 函数的正交集是一些幅值为+ 1 或- 1 的

* 国家自然科学基金项目(69874030)
1999- 05- 31 收稿, 1999- 09- 06 修回

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

方波,而且在一段区间有值,其它区间为零。这使 Haar 小波变换比其它方波函数快。Haar 小波函数定义为

$$h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ +1, & 0\le t<1/2\\ -1, & 1/2\le t\le 1\\ 0, & t>1\end{cases} \qquad (2.1)$$

其多尺度规范基为

$$\begin{cases}H_1^0(t)=1, \quad t\in[0,1]\\ H_i^l(t)=(\sqrt{2})^{l-1}h[2^{l-1}(t-\dfrac{i-1}{2^{i-1}})]\\ i=1,2,\cdots,2^{l-1}, \quad l=1,2,\cdots,L\end{cases} \qquad (2.2)$$

将上式写成规范基向量形式

$$\begin{aligned}R_N(t)&=[r_1(t),r_2(t),\cdots,r_N(t)]^{\mathrm{T}}=\\ &[H_1^0(t),H_1^1(t),H_1^2(t),\cdots,H_{2^{L-1}}^L]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \qquad (2.3)$$

式中 N 为基向量的维数,且有

$$N=1+\sum_{l=1}^{L}2^{l-1}, \quad L\ge 2 \qquad (2.4)$$

对于任何函数 $y(t)$,只要它在 $[0,1]$ 上是平方可积的,则可展成

$$y(t)\approx\sum_{i=1}^{N}a_i r_i(t)=aR_N(t) \qquad (2.5)$$

其中

$$\begin{cases}a=[a_1,a_2,\cdots,a_N]\\ a_i=\int y(t)r_i(t)\,\mathrm{d}t, \quad i=1,2,\cdots,N\end{cases} \qquad (2.6)$$

研究动态系统微分方程的模型时,为了获得动态问题的解,常要完成积分运算。对 $R_N(t)$ 的积分可表示为

$$\begin{aligned}W(t)&=\int R_N(x)\,\mathrm{d}x=\\ &[w_1(t),w_2(t),\cdots,w_N(t)]^{\mathrm{T}}=\\ &[t,s(t),\cdots,(\sqrt{2})^{L-1}s[2^{L-1}(t-\frac{2^{L-1}-1}{2^{L-1}})]]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \qquad (2.7)$$

其中 $s(t)$ 为 Haar 小波函数 $h(t)$ 的积分。用 Haar 小波规范基表示 $W(t)$,有

$$W(t)=P_N R_N(t) \qquad (2.8)$$

这里,P_N 为 $N\times N$ 的常数矩阵。因此函数 $y(t)$ 的积分可写成

$$\int y(x)\,\mathrm{d}x=a\int R_N(x)\,\mathrm{d}x=aP_N R_N \qquad (2.9)$$

2.2 模型参数辨识方法

考虑一个线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \quad x(0)=x_0\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases} \qquad (2.10)$$

其中,$x(t)$ 是 n 维状态向量,$u(t)$ 是 p 维输入向量,$y(t)$ 是 q 维输出向量;A,B,C,D 是相应维数的常数矩阵。假定状态可由观测得到。

矩阵 (A,B) 确定如下:1) 把所得测量数据及输入激励信号展成小波序列;2) 用小波的积分矩阵将动态系统的积分方程化为代数方程;3) 用最小二乘法估计参数。

对状态方程(2.10)积分,得

$$\begin{aligned}&x(t)-x(0)=\\ &A\int x(\eta)\,\mathrm{d}\eta+B\int u(\eta)\,\mathrm{d}\eta\end{aligned} \qquad (2.11)$$

用 Haar 小波近似产生

$$\begin{aligned}&ZR_N(t)-FR_N(t)=\\ &AZP_N R_N(t)+BGP_N R_N(t)\end{aligned} \qquad (2.12)$$

其中 Z,F 和 G 分别为 $x(t),x(0),u(t)$ 的展开系数,且

$$\begin{cases}\int x(\eta)\,\mathrm{d}\eta=ZP_N R_N(t)\\ \int u(\eta)\,\mathrm{d}\eta=GP_N R_N(t)\end{cases} \qquad (2.13)$$

方程(2.12)两边删除 $R_N(t)$,得

$$Z-F=AZP_N+BGP_N=\Theta V \qquad (2.14)$$

式中

$$\Theta=[A \quad B]$$
$$V^{\mathrm{T}}=[(ZP_N)^{\mathrm{T}} \quad (GP_N)^{\mathrm{T}}]$$

因此,最小二乘参数估计为

$$\hat{\Theta}=(Z-F)V^{\mathrm{T}}(VV^{\mathrm{T}})^{-1} \qquad (2.15)$$

用相似的过程可以求得 (C,D)。

3 Haar 小波变换展开系数的鲁棒估计

通常情况下,系统的输出数据含有噪声。对方程(2.12)而言,直接用噪声污染的测量数据进行小波变换,将严重影响模型参数的辨识,特别是有较大干扰时,参数的估计将严重偏离其真值。因此,需要对这些测量数据进行鲁棒小波变换,以求得展开系数。

3.1 鲁棒系数估计算法

当测量的输出数据含有随机噪声时,(2.5)式可写成

$$y(t)=g(t)+e(t) \qquad (3.1)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中

$$g(t) \approx \sum_{i=1}^{N} a_i r_i(t) = aR_N(t) \qquad (3.2)$$

为无噪声干扰的输出; $e(t)$ 为随机噪声或测量误差。

基于 HUBER 的极小化原理, 引入下列指标处理噪化数据

$$J(a,c) = \int \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{y(t) - aR_N(t)}{c}\right]^2 + b \right\} c\mathrm{d}t \qquad (3.3)$$

这里 c 是残差, b 是一个正常数, 用来获得的 c 一致估计。

对系数和残差的估计, 可通过极小化方程(3.3)来获得。将(3.3) 分别对 a 和 c 求偏导, 并令其为零, 得

$$\int \left[\frac{y(t) - aR_N(t)}{c}\right] R_N(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (3.4a)$$

$$\int \frac{1}{2}\left[\frac{y(t) - aR_N(t)}{c}\right]^2 \mathrm{d}t = b \qquad (3.4b)$$

常数 b 有下列形式

$$b = \frac{P - M}{P} E_N\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (3.5)$$

其中, P 是数据的个数, M 是被估计变换系数的个数, 而

$$E_N\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x \qquad (3.6)$$

表示具有高斯概率密度函数的期望。

可用不同的方法求解式(3.4), 以获得鲁棒估计。其中较有效的方法是高斯 — 牛顿迭代方法。类似于文献[2] 对块脉冲函数的讨论, 现给出如下算法:

记

$$r(t,a) = y(t) - aR_N(t) \qquad (3.7)$$

定义

$$r_*(t,a) = \left[\frac{r(t,a)}{c^{(k)}}\right] c^{(k)} \qquad (3.8)$$

其中 $c^{(k)}$ 是在第 k 步 c 的估计。由(3.8) 式, 有

$$\partial r_*(t,a)/\partial a = -R_N(t) \qquad (3.9)$$

将(3.8) 式展成一阶泰勒级数

$$r_*(t,a) \approx r_*[t,a^{(k)}] - \Delta a R_N(t) \qquad (3.10)$$

$$\Delta a = a - a^{(k)} \qquad (3.11)$$

则方程(3.4) 可写成

$$\int \{ r_*[t,a^{(k)}] - \Delta a R_N(t) \} R_N(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (3.12)$$

上式解可简化为下列均方误差指标的最优解

$$\mathrm{MSE}(r_*, \Delta a) = \int [r_*(t,a^{(k)}) - \Delta a R_N(t)]^2 \mathrm{d}t \qquad (3.13)$$

由 $H(t)$ 的正交性, 有

$$\Delta a = \int R_N^{\mathrm{T}}(t) r_*(t,a^{(k)})\mathrm{d}t \qquad (3.14)$$

则系数矢量的鲁棒估计变为

$$a^{(k+1)} = a^{(k)} + q\Delta a \qquad (3.15)$$

其中 $0 < q < 2$ 为任意的收敛因子。

此外, 还要对残差进行估计。通过解(3.4b) 式, 可给出如下递推公式

$$[c^{(k+1)}]^2 = \frac{1}{b}\int \frac{1}{2}\left[\frac{r(t,a^{(k)})}{c^{(k)}}\right]^2 \mathrm{d}t [c^{(k)}]^2 \qquad (3.16)$$

鲁棒系数估计算法的步骤为:

Step1: 设定 a, c 的初值;

Step2: 由(3.8) 式计算 $r_*(t,a^{(k)})$;

Step3: 由(3.11) 式求 Δa;

Step4: 由(3.15) 式计算新的估计值;

Step5: 如果系数的变化小于残差估计的 δ 倍, 即

$$|\Delta a_n| < \delta[c^{(k+1)}], \quad n = 1,2,\cdots,N$$

则停止迭代, 得到系数; 否则, 令 $a^{(k)} = a^{(k+1)}, c^{(k)} = c^{(k+1)}$, 返回 Step2。

3.2　鲁棒系数估计的收敛性

对于收敛性, 文献[1,2] 针对块脉冲函数和 Walsh 函数进行了详细讨论。对于 Haar 小波系数鲁棒估计的收敛性, 可用相似的方法来讨论。这里只给出一些主要结论。

结论 1　如果

$$[c^{(k+1)}]^2 = \frac{1}{b}\int \frac{1}{2}\left[\frac{r(t,a^{(k)})}{c^{(k)}}\right]^2 \mathrm{d}t [c^{(k)}]^2$$

则有

$$J(a^{(k)},c^{(k)}) - J(a^{(k)},c^{(k+1)}) \geq b\frac{[c^{(k+1)} - c^{(k)}]^2}{c^{(k)}}$$

即 J 是严格递减的。

结论 2　如果 $a^{(k+1)} = a^{(k)} + q\Delta\hat{a}$, 其中 $\Delta\hat{a}$ 由(3.14) 式确定, 则

$$J(a^{(k)},c^{(k)}) - J(a^{(k+1)},c^{(k)}) \geq \frac{q(2-q)}{2c^{(k)}}\|\Delta\hat{a}\|^2 = \frac{(2-q)}{2c^{(k)}q}\|a^{(k+1)} - a^{(k)}\|^2$$

即 J 是严格递减的。

结论 3　对于如下形式的紧凑集

$$\mathscr{R} = \{(a,c) \mid c \geq 0,\ J(a,c) \leq l \leq \infty\}$$

假设 $g(t)$ 是绝对可积的, 则: 1) 序列 $(a^{(k)}, c^{(k)})$ 在 $\mathscr{R}$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

上至少有一个聚集点; 2) 每一个聚集点$(\hat{a}, \hat{c}), \hat{c} > 0$是方程(3.4) 的解。且能极小化方程(3.3)。

4 仿真结果

考虑下列线性时不变系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.4 & -0.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

这里$\{e_i(t), i = 1, 2\}$是均值为零,方差为0.2的附加噪声。

假设系统状态可观测, 输入信号为 $u(t) = e^{-0.5t}, t \in [0, 1]$, 采样间隔为0.01, 取小波基的维数 $N = 16$, 给出 $\delta = 1.0 \times 10^{-6}$。

可用3.1节给出的算法, 对系统的输入输出数据进行鲁棒系数估计。初值可按下式选取, 即

$$a_i^{(0)} = \int y(t) r_i(t) \mathrm{d}t, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

$$c^{(0)} = \mathrm{med}\{|r[t, a^{(0)}]|\}$$

将得到的Haar小波系数代入(2.14) 式, 得到系统模型的参数估计值。仿真结果如表1所示。其中, NHF是非鲁棒的Haar函数方法, RHF是鲁棒的Haar函数方法。

表1 两种方法参数辨识结果

参数	参数估计		参数真值
	NHF 方法	RHF 方法	
a_{11}	0.023 4	0.024 7	0.0
a_{12}	1.303 6	1.040 1	1.0
a_{21}	-1.191 7	-1.380 1	-1.4
a_{22}	-0.312 7	-0.719 1	-0.7
b_1	0.876 1	0.961 1	1.0
b_2	1.571 2	1.907 2	2.0

从表1明显看出, 鲁棒参数估计较非鲁棒参数估计更精确。用这种方法对连续时间系统参数辨识具有较强的可靠性和实用性。

5 结 语

针对基于Haar小波对连续时间系统辨识时对测量数据的强依赖性, 以及噪声污染的测量数据对系统辨识时带来的严重影响, 本文给出一种鲁棒性的参数估计方法, 减少了各种噪声或测量误差对参数估计的影响。仿真结果表明了该方法的有效性。

参考文献

1 H Dai, N K Sinha. Robust identification of systems using block-pulse functions. IEEE Proc-D, 1992, 139(3): 308_316

2 H Dai, N K Sinha. Robust coefficient estimation of Walshfunctions. IEE Proc-D, 1990, 137(6): 357_363

3 王钦友, 朱筠. 基于H函数的分布参数系统辨识. 信息与控制, 1998, 27(5): 326—330

4 Puthenpura S C, N K Sinha. Modified maximum likelihood method for robust estimation of system parameters from very noisy data. Automatica, 1986, 22: 231_235

作者简介

袁廷奇 男, 1966年生。1993年于西安交通大学电气学院获硕士学位, 现为西安交大电信学院博士生。主要研究方向为最优控制, 系统辨识, 鲁棒控制等。

刘文江 男, 1935年生。上海交通大学电机系研究生毕业, 现为西安交通大学自控系教授, 博士生导师。主要研究方向为系统辨识, 动态优化, 过程控制, 鲁棒控制等。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net