第15卷第3期 控制与决策 2000年5月
Vol 15 No. 3 CONTROL AND DECISION May 2000

AR型非线性时间序列模型的稳定性分析*

吴少敏
(宝钢技术中心自动化研究所 上海 201900)

摘 要 在工程中, 振幅依赖指数自回归模型、门限自回归模型和多项式自回归模型等一类具有AR型的非线性时间序列模型具有广泛的应用。为此给出了AR型非线性时间序列模型的稳定性条件及极限环存在条件, 并对一些特殊模型进行了讨论。

关键词 AR型非线性时间序列模型, 稳定性, 极限环
分类号 O 211.61

Stability Analysis of AR- type Nonlinear Time Series Models

Wu Shaomin
(Automation Institute of Technology Centre, Baosteel Group Company)

Abstract Amplitude- dependent exponential autoregressive models, threshold autoregressive models and polynomal autoregressive models which are AR- type nonlinear time series models are widely used in engineering. The stability conditions and the existing conditions of limit cycle of AR- type nonlinear time series models are given. Some special models are discussed.

Key words AR- type nonlinear time series models, stability, limit cycle

1 引 言

在时间序列分析中, 线性模型的研究日趋成熟, 并在工程中得到有效应用。然而实际工程中存在大量的非线性问题, 用线性模型去逼近容易丢失信息。为了更确切地描述实际系统特性, 往往需要采用非线性时间序列, 但由于非线性数学发展缓慢, 因而对非线性时间序列的研究还存在一定困难。

在工程领域, AR模型的应用比MA模型和ARMA模型更为广泛, 这是因为AR模型参数辨识比较简单, 实时性较好, 且已证明MA模型和ARMA模型可由AR模型逼近。而在非线性时间序列中, 非线性模型种类繁多, 其参数辨识比ARMA模型还复杂, 工程应用更为困难。相对而言, 振幅依赖指数自回归模型(EXPAR模型), 门限自回归模型(TAR模型)和多项式自回归模型(PNAR模型)都是具有AR型的非线性模型, 在参数辨识上比其他非线性模型更为简单, 在工程中的应用较多。如文献[1]研究了振幅依赖指数自回归模型在机械颤振及循环冷却水处理中的应用; 文献[2]把二阶多项式AR(PNAR)模型应用于循环冷却水的预报; 文献[3]把门限自回归模型应用于人口预测的研究中。

AR型非线性时间序列模型的定义如下:

给定一个系统, 其输入为白噪声序列$\{a_t, t=1, 2, \cdots\}$, 设该白噪声序列的均值为0, 方差为σ_a^2, 输出为时间序列$\{x_t, t=1, 2, \cdots\}$, 则该系统的输入输出关系为

$$x_t = \mu(X_{t-1}, \theta) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i(X_{t-1}, \theta) x_{t-i} + a_t \tag{1.1}$$

其中$X_{t-1} = (x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-p})$为系统的一个状态; $\mu(X_{t-1}, \theta)$, $\phi_i(X_{t-1}, \theta)$为$R^p \to R$上的光滑函数; 参数$\theta = (\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_p) \in \Theta = \Theta_0 \times \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_p$, $\Theta_i (i=0, 1, \cdots, p)$是$R$中的开子集, 是一个参数空间。

模型(1.1)是一个AR型非线性时间序列模型(NAR模型), 也称AR型状态依赖时间序列模型。

1) 当$\mu(X_{t-1}, \theta) = 0$, $\phi_i(X_{t-1}, \theta) = \alpha_i$(常数)时, NAR模型即为$p$阶AR模型。此时

* 1999-06-22收稿, 1999-09-13修回

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i} + a_t \tag{1.2}$$

2) 当 $\mu(X_{t-1}, \theta) = 0$, $\phi_i(X_{t-1}, \theta) = (\alpha_i + \beta_i \exp(-\gamma x_{t-1}^2))$ 时, NAR 模型即为振幅依赖指数自回归模型(EXPAR)。此时

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i \exp(-\gamma x_{t-1}^2)) x_{t-i} + a_t \tag{1.3}$$

3) 当 $\mu(X_{t-1}, \theta) = 0$, $\phi_i(X_{t-1}, \theta) = (\alpha_i + \beta_i \exp(-\gamma x_{t-i}^2))$ 时, NAR 模型即为振幅依赖指数自回归模型的扩展模型(EEXPAR 扩展模型)。此时

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i \exp(-\gamma x_{t-i}^2)) x_{t-i} + a_t \tag{1.4}$$

4) 当 $\mu(X_{t-1}, \theta) = \alpha_0^{(j)}$, $\phi_i(X_{t-1}, \theta) = \beta_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, q)$ 时, NAR 模型即为 p 阶门限自回归模型(TAR 模型)。此时

$$x_t = \alpha_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} \beta_i^{(j)} x_{t-i} + a_t \tag{1.5}$$

5) 当 $\mu(X_{t-1}, \theta) = 0$, $\phi_i(X_{t-1}, \theta) = \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_{ji} x_{t-j}$ 时, NAR 模型即为 p 阶多项式AR 模型(PNAR 模型)。此时

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} x_{t-j} x_{t-i} + a_t \tag{1.6}$$

NAR 是 Priestley[4] 提出的一种非线性时间序列模型, 许多时间序列模型都可认为是NAR 模型的特殊形式。由于对NAR 模型的稳定性分析尚未见报导, 故本文将围绕NAR 模型的稳定性展开讨论。

2 NAR 模型的稳定性

在工程应用中, 模型的稳定性能是衡量模型优劣的一个重要指标。随机系统稳定性的研究具有十分丰富的内涵, 不同类型的随机系统, 其稳定性的讨论可以在不同意义下进行[5]。对于由随机差分方程描述的非线性时间序列模型, 当模型为Harris 遍历时, 模型不仅存在平稳解, 而且在任意分布下模型所确定的总体分布将以一定的速度收敛于不变概率测度。相反, 模型在非遍历时, 则不存在平稳解, 且模型所确定系统的总体分布也不会收敛于任何分布函数。因此, 模型的Harris遍历性反映了模型所确定离散随机系统本身的一些强稳定性质, 而模型的非遍历性则可看作是相应系统的非稳定性。

定义1(Harris 遍历) 称马尔可夫链$\{X_t\}$ 是Harris 遍历的, 如果存在$\{X_t\}$ 的状态空间$\{X, F\}$ 上的一个概率测度π, 使得

$$\lim_{t\to\infty} \| P^t(x, \cdot) - \pi \| = 0 \tag{2.1}$$

对任意的 $x \in X$。

定义2(ϕ-不可约链) 称马尔可夫链$\{X_t\}$是ϕ-不可约链, 若对(R, B) 上的σ-有限测度 ϕ_B 是R 上的Borel 代数, 对任意的$x \in R$, 有

$$\sum_{t=0} P(X_t \in A \mid X_0 = x) > 0 \tag{2.2}$$

其中$\phi(A) > 0$, 且$A \in B$。

引理1[6] 设$\{X_t\}$ 为一个 ϕ-不可约链, 如果存在非负可测函数$g(x): X \to R_+$, 集合$B \in F$, 以及常数$\epsilon > 0$, $r > 1$, 使得

$$E[g(X_{n+1}) \mid X_n = x] \le r^{-1} g(x) - \epsilon \tag{2.3}$$

B 是$\{X_t\}$ 的s-集, 且

$$\sup \int_B P(x, \mathrm{d}y) g(y) < +\infty \tag{2.4}$$

则$\{X_t\}$ 为Harris 遍历。

将NAR(p) 模型(1.1) 重写为

$$x_t = \mu(X_{t-1}, \theta) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i(X_{t-1}, \theta) x_{t-i} + a_t \tag{2.5}$$

其中$\{a_t, t = 1, 2, \cdots\}$是一个独立同分布的随机变量序列, 且关于Lebesgue 测度具有指数型的正密度函数; $\mu(\cdot, \cdot)$, $\phi_i(\cdot, \cdot)$ 皆为可测函数。

定理1 设$E(|a_t|^r) < +\infty (r \ge 1)$, $\mu(\cdot, \cdot)$, $\phi_i(\cdot, \cdot)$ 在有界集上有上界, 且:

1) 存在$K > 0$, 使得当 $|x| > K$ 时, 有 $|\mu(\cdot, \theta)| \le h_0(\theta)|x|$, 且 $|\phi_i(\cdot, \theta)| \le h_i(\theta)$, 而$0 \le h_i(\theta) < 1 (i = 0, 1, \cdots, p)$, 对任意 $\theta \in \Theta$;

2) $\sup \sum_{i=0}^{p} h_i(\theta) \le c < 1$, c 为常数。

则由模型(2.5) 所决定的$\{X_t\}$ 为Harris 遍历, 并对其平稳分布π, 有r 阶绝对矩存在。

证明 令$g(x) = |x|^r$, 其中$r > 1$, 利用Minkovski 不等式, 当$a_k, b_k > 0$, $r > 1$时, 有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^r\right)^{1/r} \tag{2.6}$$

可得

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{aligned}&(E[g(X_{t+1})\,|X_t = X\,])^{1/r} = \\ &(E[\,|\mu(X,\theta) + \phi_1(X,\theta)x + \\ &\cdots + \phi_p(X,\theta)x + a_t|^r])^{1/r} \le \\ &(E[\,|\mu(X,\theta) + \phi_1(X,\theta)x + \cdots + \\ &\phi_p(X,\theta)x\,|^r])^{1/r} + (E\,|a_t|^r)^{1/r} \le \\ &c\,|x\,| + (E\,|a_t|^r)^{1/r}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&(E[g(X_{t+1})\,|X_t = X\,]) \le \\ &(c\,|x\,| + (E\,|a_t|^r)^{1/r})^r \le \\ &|x\,|^r(c + (E\,|a_t|^r)^{1/r}/|x\,|)^r\end{aligned}$$

由于 $E\,|a_t|^r$ 存在且有界, 则存在 K 及 $\delta > c(\delta < 1)$, 当 $|x\,| > K$ 时, 有

$$(E\,|a_t|^r)^{1/r}/|x\,| < (\delta - c)/2 < 1 \qquad (2.7)$$

则

$$\begin{aligned}&(E[g(X_{t+1})\,|X_t = X\,]) \le \\ &|x\,|^r[(c + \delta)/2] = \\ &|x\,|^r[\delta - (\delta - c)/2] \le \\ &\delta|x\,|^r - (\delta - c)/2\end{aligned}$$

由引理 1 可知, 结论成立。(证毕)

定理 1 给出了NAR 模型的一个稳定性条件。

在以上的AR 型非线性模型中, TAR 模型的稳定性已有研究[6, 7], PNAR 模型的稳定性可按定理 1 进行初步研究, 但对更为具体的稳定性条件尚有待讨论。文献[7] 就 EEXPAR 模型的稳定性进行了讨论, 但 EXPAR 模型的稳定性条件至今还是一个悬而未决的问题。

按定理 1 给出的稳定性条件, 对模型进行稳定性初步分析。如模型

$$x_t = (-0.9 - \exp(-x_{t-1}^2))x_{t-2} + a_t \qquad (2.8)$$

利用定理 1, 由于

$$\phi_i(X_{t-1},\theta) = -0.9 - \exp(-x_{t-1}^2) \qquad (2.9)$$

且 $\sup|-0.9 - \exp(-x_{t-1}^2)| > 1$, 即模型(2.8) 不满足定理 1 的条件, 因而初步分析结果为模型(2.8) 不一定稳定。实际上, Chan[8] 已证明该模型确实是不稳定的。

EEXPAR 模型

$$x_t = \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i + \beta_i\exp(-\gamma x_{t-i}^2))x_{t-i} + a_t \qquad (2.10)$$

的稳定性已由 Tong[7] 给出如下定理:

定理 2[7]　对模型(2.10), 若

$$x_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_{t-i} + a_t \qquad (2.11)$$

稳定, 即其特征方程

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\lambda^{p-i} = 0 \qquad (2.12)$$

的根在单位圆内, 则 EEXPAR 模型(2.10) 也是稳定的。

3　NAR 模型的极限环

非线性时间序列模型可以描述许多非线性现象, 如幅频依赖现象, 共振跳跃现象, 极限环和混沌等。Ozaki[9] 给出了 EXPAR 模型的极限环存在条件, Tong[7, 10] 讨论了 TAR 模型的极限环。以下就 NAR 模型的极限环存在条件进行讨论。

一个时间序列$\{x_t, t = 1, 2, \cdots\}$, 若当 $t\to\infty$ 时, x_t 在一个按顺序的数集$\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(T)}\}$ 中循环取值, 则称$\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(T)}\}$ 为$\{x_t, t = 1, 2, \cdots\}$ 的极限环, 亦即$\{x_t, t = 1, 2, \cdots\}$ 具有极限环。考虑以下模型

$$x_t = \sum_{i=1}^{p}\phi_i(X_{t-1},\theta)x_{t-i} + a_t \qquad (3.1)$$

其中 $X_{t-1} = (x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-p})$。定义 $|X_{t-1}| = (|x_{t-1}|, |x_{t-2}|, \cdots, |x_{t-p}|)$。模型(3.1) 具有极限环的必要条件是: 当 $|x_{t-1}|, |x_{t-2}|, \cdots, |x_{t-p}|$ 都充分小时, 模型自回归部分不稳定, 以保证 x_t 不会衰减到零; 而当 $|x_{t-1}|, |x_{t-2}|, \cdots, |x_{t-p}|$ 都充分大时, 模型自回归部分稳定, 以保证 x_t 不会继续增大。

假设

$$\lim_{|X_{t-1}|\to 0}\phi_i(X_{t-1},\theta) = \beta_i \qquad (3.2)$$

$$\lim_{|X_{t-1}|\to\infty}\phi_i(X_{t-1},\theta) = \alpha_i \qquad (3.3)$$

于是有如下定理:

定理 3　模型(3.1) 存在极限环的必要条件为:

1) 方程

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p}\beta_i\lambda^{p-i} = 0 \qquad (3.4)$$

的根都在单位圆内;

2) 方程

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\lambda^{p-i} = 0 \qquad (3.5)$$

的根都在单位圆外;

3) 不存在 Y, 使

$$\sum_{i=1}^{p}\phi_i(Y,\theta) = 1 \qquad (3.6)$$

其中 $Y = (y, \cdots, y)_{1\times p}$。

极限环存在的一个充分条件是上述条件 1) 和

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

条件 2) 同时成立。

证明　当 $|x_{t-1}|, |x_{t-2}|, \cdots, |x_{t-p}|$ 都充分大时, 由(3.2) 式, 如果条件 1) 不成立, 则对充分大的初值, 模型(3.1) 的零激励响应将趋向无穷大, 从而不能形成稳定的极限环; 而当 $|x_{t-1}|, |x_{t-2}|, \cdots, |x_{t-p}|$ 都充分小时, 由(3.3) 式, 如果条件 2) 不成立, 则对充分小的初值, 模型(3.1) 的零激励响应将趋向于零, 因而不能形成极限环。

若模型(3.1) 满足条件 1) 及条件 2), 而又不具有极限环, 则在无白噪声激励的情况下, 响应必然趋于一个稳定点。设其稳定点为 y, 则有

$$\sum_{i=1}^{p} \phi_i(Y, \theta) y = y \tag{3.7}$$

于是可得: $y = 0$ 为式(3.7) 的一个解。但由条件 2), $y = 0$ 不是稳定点, 因而式(3.7) 的解应满足

$$\sum_{i=1}^{p} \phi_i(Y, \theta) = 1 \tag{3.8}$$

因此, 要使模型不具有稳定点, 条件 3) 必须成立。(证毕)

现讨论模型(1.3) 和(1.4) 的极限环。

推论 1　模型(1.3) 和(1.4) 存在极限环的必要条件皆为:

1) 方程

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda^{p-i} = 0 \tag{3.9}$$

的根都在单位圆内;

2) 方程

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \beta_i) \lambda^{p-i} = 0 \tag{3.10}$$

的根都在单位圆外。

极限环存在的一个充分条件为上述条件 1) 及条件 2) 同时成立, 且

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{p} \beta_i > 1 \text{ 或 } < 1 \tag{3.11}$$

不难发现, 推论 1 就是文献[9] 中关于 EXPAR 模型的极限环存在的充分条件和必要条件, 因此定理 3 扩展了文献[9] 的结论。

4　结　　语

本文主要讨论了AR 型非线性时间序列模型的稳定性及极限环存在的问题。首先给出模型的Harris 遍历条件, 并应用该条件讨论 EXPAR 模型的稳定性问题; 然后给出模型的极限环存在条件, 并运用该条件讨论了 EXPAR 模型及 EEXPAR 模型的极限环现象。

参 考 文 献

1　朱向阳. 指数自回归模型及双线性模型在工程应用中的研究. 东南大学博士学位论文, 1992

2　施招云. 一类适用于陀螺随机漂移的非线性模型. 中国惯性技术学报, 1993, 1

3　杨叔子, 吴雅, 等. 时间序列分析在工程中的应用. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992

4　Priestley M B. Non-linear and non-stationary time series analysis. London: Academic Press, 1988

5　Szpankowski W. Stability conditions for multi-dimensional queuing systems with computer applications. Opns Res, 1988, 36(6): 944-957

6　盛昭翰, 王涛, 刘德林. 非线性时间序列分析模型的稳定性分析. 北京: 科学技术出版社, 1993

7　Tong H. Nonlinear time series analysis. London: Academic Press, 1991

8　Chan K S. Topics in nonlinear time series analysis. Doctoral Thesis of Princeton University, 1986

9　Ozaki T. Nonlinear time series models for nonlinear random vibrations. J Appl Prob, 1980, 17(1): 84-93

10　Tong H, Lim K S. Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. J R Stat Soc, 1991, B42: 245-292

作 者 简 介

吴少敏　男, 1965 年生。1995 年于东南大学获博士学位, 1998 年至 1999 年在香港城市大学和香港大学从事可靠性和统计过程控制研究, 现在宝钢自动化研究所工作。研究领域有: 时间序列分析, 可靠性数学, 统计过程控制及人工神经网络。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net