

# 连续多项式混沌系统的全局控制\*

王 杰                      田 沛                      陈 陈  
(上海交通大学电力学院 200030)    (华北电力大学)    (上海交通大学)

**摘 要** 提出一种新方法来控制一类连续多项式混沌。该方法利用开环控制作用和适当的非线性闭环控制作用,将系统的解传递到任意给定的目标集合,并且证明该控制的传递域是全局稳定的。

**关键词** 控制,混沌系统,传递,目标

**分类号** TP 13

## Global Control of Continuous Polynomial Chaotic Systems

Wang Jie                      Tian Pei                      Chen Chen  
(Shanghai Jiaotong University) (North China Electric Power University) (Shanghai Jiaotong University)

**Abstract** A new method of controlling a class of continuous polynomial chaotic systems is presented. For arbitrary given goal dynamics, the solution of system can be entrained to goal, through the use of an additive controlling action which is the sum of the open loop controlling action and a suitable nonlinear closed loop controlling action, and it is proved that the basins of entrainment of the control are global stable.

**Key words** control, chaotic systems, entrainment, goal

### 1 引 言

Jackson 和 Hubler 等人<sup>[1-8]</sup>提出一种称为传递(entrainment)和迁移(migration)的控制方法来控制混沌。这种控制方法已成功地应用于许多复杂的非线性系统,例如多重吸引子系统<sup>[2]</sup>,一维 Logistic 映射的多重周期力控制<sup>[1]</sup>, Gaussian 相关映射<sup>[2]</sup>及其二维 Henon 和 Ikeda 映射的控制<sup>[8]</sup>。

本文在 OPCL 控制方法的基础上<sup>[9]</sup>,针对任意  $m$  次多项式的复杂系统(包括混沌系统),提出一种新的控制方法,即采用开环加非线性闭环(OPNCL)组合的控制方法。该方法避免了开环控制和线性闭环控制的一些限制因素,对于任何目标,所控制混沌系统的传递域(basins of entrainment)是全局的,这样就避免了有关确定传递域范围的繁琐计算。

### 2 传递控制方法的基本概念和定义

传递控制方法首先由 Hubler<sup>[3]</sup>提出;随后,Hubler 和 Luscher 利用该方法对 Logistic 映射和非

线性阻尼振荡进行研究<sup>[5]</sup>,得到了许多结果。基于多重吸引子系统的相空间一定存在着收敛域。Jackson<sup>[2]</sup>提出在这些收敛域中,所有邻近的轨道局部地相互收敛,进而推测在每一个多重吸引子系统中,每一个吸引域中至少有一个收敛域;并利用 Routh-Hurwitz 定理<sup>[10]</sup>,提出确定这样的收敛域的解析方法,该技术已成功地应用于 Lorenz 和 Rossler 系统。

在连续情况下,当 $\lim_t |x(t) - g(t)| = 0$ 时,系统的解  $x(t)$  趋于所要达到的目标  $g(t)$ 。换言之,系统被传递(entrain)到目标  $g(t)$ 。这里,  $g(t)$  可以是任何具有拓扑特性的类集合,比如平衡点、周期轨道、拟周期轨道和混沌等。另一种控制方法是在不同收敛域之间的迁移(migration)方法,该方法允许系统的轨道从一个吸引子转移到另一个吸引子。进一步说,该方法对于一定程度的动态模型误差和噪声扰动是稳定的。

对于连续非线性系统

$$\dot{x} = F(x, t), \quad x \in R^n \quad (2.1)$$

设目标  $g(t) \in R^n, S(t)$  是适当选定的开关函数,  $S(t) = 0(t < 0), 0 \leq S(t) \leq 1(t \geq 0)$ 。  $S(t)$  的作用

是缓和系统的剧烈反应。对(2.1)加上开环形式的控制项后,可得具有控制项的系统<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} dx/dt &= F(x, t) + S(t)K(g, t) = \\ &F(x, t) + S(t)(dg/dt - F(g, t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

当  $S(t) = 1$  时,所要达到的目标  $g(t)$  须满足条件

$$\lim_t K(g, t) = dg/dt - F(g, t) \quad (2.3)$$

一般说,这种开环控制方法对于确定系统的吸引域和收敛域是相当困难的<sup>[2,7]</sup>。

另一种方法是采用反馈控制方法,该线性反馈形式为

$$dx/dt = F(x, t) + S(t)D(g - x) \quad (2.4)$$

其中  $D$  是适当选定的矩阵。此时  $g(t)$  须限制为方程  $dg/dt = F(g, t)$  的某个解。为了满足关系式  $\lim_t (x(t) - g(t)) = 0$ , 在混沌吸引子中,通常取  $g(t)$  作为系统(2.1)中某一嵌入不稳定周期解。

考虑到混沌的开环控制和线性闭环反馈控制各有利弊, Jackson 等人将以上开环和线性反馈控制作用有机地结合起来<sup>[9]</sup>, 即开环加闭环控制(OPCL)。他证明在任意目标  $g(t)$  的邻域内,可通过复合控制作用

$$\begin{aligned} K(g, x, t) &= H(dg/dt, g) + \\ &C(g, t)(g(t) - x(t)) \end{aligned}$$

将系统(2.1)的解  $x(t)$  传递到  $g(t)$ 。Jackson 给出几个例子用于说明该方法的优越性,并证明这些例子所控制的传递域对所有指数有界的目标是全局的(Chua 系统除外)。其主要结果是对于系统

$$dx/dt = F(x, t) + S(t)K(g, x, t), \quad x \in R^n \quad (2.5)$$

其中,  $K(g, x, t)$  是控制项,  $F(x, t)$  满足 Lipschitz 条件,则存在关于  $x(t)$  是线性函数  $K(g, x, t)$ , 使得以下传递域

$$\begin{aligned} BE(g|t_0) &= \\ \{x(t_0) | \lim_t |x(t) - g(t)| = 0\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

不是空集。

虽然 Jackson 等人提出的 OPCL 控制方法对于(2.1)右端是  $m$  次多项式( $m \geq 2$ )的系统极为有效,然而当  $m > 2$  时,确定(2.5)的传递域会随着  $m$  的增加而变得极其复杂。因此需要改进 OPCL 控制方法,使得控制混沌的传递能力得到进一步提高。

### 3 开环加非线性闭环(OPNCL)控制方法

考虑右端是  $m$  次多项式系统

$$dx/dt = F(x, t), \quad x \in R^n \quad (3.1)$$

其中  $F_i(x, t) = \sum_{j_1 + \dots + j_n = m} a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(i)}(t) x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} (i = 1, 2, \dots, n)$ 。假定至少有一个系数  $a_{j_1 j_2 \dots j_n}^{(i)}(t) \neq 0$

( $i = 1, 2, \dots, n, \sum_{k=1}^n j_k = m$ )。对系统(3.1)进行 OPNCL 控制,控制项设为

$$\begin{aligned} K(g, x, t) &= dg/dt - F(g, t) + \\ &D(g, x, t)(g(t) - x(t)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中  $D(g, x, t)$  是  $g(t) - x(t)$  的非线性函数。将(3.2)加到(3.1)的右端,可得具有 OPNCL 控制的系统

$$dx/dt = F(x, t) + S(t)K(g, x, t) \quad (3.3)$$

我们将证明,对于任意给定的目标函数,系统(3.1)的传递域不空,并且是全局的。

对系统(3.3),设  $S(t) = 1$ , 并做变量代换  $x(t) = g(t) + u(t) (u(t) \in R^n)$ 。代入(3.3),得

$$\begin{aligned} dg/dt + du/dt &= \\ &F(g + u, t) + K(g, g + u, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

将(3.2)代入(3.4),注意到  $F(x, t)$  是关于  $x$  的  $m$  次多项式,可得

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \sum_{k=1}^m \sum_{j_1, \dots, j_k}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F_i(g, t)}{\partial g_{j_1} \partial g_{j_2} \dots \partial g_{j_k}} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_k} - \\ &\sum_{j=1}^n D_{ij}(g, x, t) u_j \end{aligned} \quad (3.5)$$

为了将系统(3.1)的解  $x(t)$  传递到目标  $g(t)$ , 要求  $\lim_t u(t) = 0$  成立。因此可设

$$\begin{aligned} D_{ij}(g, x, t) &= \\ \frac{\partial F_i}{\partial g_j} + \sum_{k=2}^m \sum_{j_2, \dots, j_k=1}^n \frac{1}{k!} \times \\ &\frac{\partial^k F_i(g, t)}{\partial g_{j_1} \partial g_{j_2} \dots \partial g_{j_k}} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_k} - a_{ij} \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中  $A = (a_{ij})$  是任意  $n \times n$  实常矩阵,它的所有特征值都具有负实部。将(3.6)代入(3.5),可得关于  $u$  的线性方程组

$$du(t)/dt = Au(t) \quad (3.7)$$

它的零解是渐近稳定的,所以(3.3)的解也是渐近稳定的。由(2.6)的定义知  $BE(g)$  不为空集,再注意到  $u(t)$  的渐近稳定性与初始点无关,则知  $BE(g)$  是全局的。

从以上讨论可得如下定理:

**定理1** 设  $g(t) \in C(r-1)$ ,  $x(t)$  是系统(3.3)的解,  $F(x, t)$  关于  $x$  是  $m$  次多项式,则存在

OPNCL 控制项  $K(g, x, t)$ , 关于  $x(t)$  是非线性的, 使得以下传递域

$$BE(g|t_0) = \{x(t_0) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - g(t)| = 0\} \quad (3.8)$$

不为空集, 并且是全局的(即与初始点的选择无关)。

注 1 一般而言, 为使系统(3.3)的解(当  $S(t) = 1$  时)不引起剧烈响应, 可取  $S(t)$  为从 0 到 1 的某一光滑上升函数, 起到缓冲的作用。

## 4 OPNCL 控制的传递能力

本节研究开环、线性闭环、OPCL 控制以及本文提出的 OPNCL 控制的传递能力, 并将这几种传递能力进行比较, 从而说明 OPNCL 控制的优越性。

仍考虑右端是  $m$  次多项式系统(3.1), 为了研究方便, 对系统

$$dx/dt = F(x, t) + S(t)K(g, x, t), \quad x \in R^n \quad (4.1)$$

进行变量代换。设  $x(t) = g(t) + u(t)$ , 其中  $g(t)$  是  $x(t)$  所要达到的目标, 且设  $S(t) = 1$ 。

1)  $K(g, x, t)$  是开环作用: 此时  $K(g, x, t) = H(dg/dt, g, t) = dg/dt - F(g, t)$ , 代入(4.1), 得

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{k=1}^m \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F_i(g, t)}{\partial g_{j_1} \partial g_{j_2} \dots \partial g_{j_k}} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_k} \quad (4.2)$$

上式是非自治复杂方程组, 它的零解稳定性判别相当复杂, 即使存在不空的传递域, 一般也是在  $u = 0$  的有限邻域范围内。

2)  $K(g, x, t)$  是线性反馈作用: 此时  $K(g, x, t) = -A(g(t) - x(t))$ , 其中  $A$  是负定的对角常矩阵, 代入(4.1), 得

$$du/dt = Au + F(u + g, t) - dg/dt \quad (4.3)$$

注意到  $F(u + g, t)$  是  $m$  次多项式, 如果目标  $g(t)$  是系统(3.1)的某个解, 则(4.3)可化为

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j + \sum_{k=1}^m \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \frac{1}{k!} \times \frac{\partial^k F_i(g, t)}{\partial g_{j_1} \partial g_{j_2} \dots \partial g_{j_k}} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_k} \quad (4.4)$$

方程(4.4)关于  $u = 0$  时零解稳定性的讨论与情况 1) 类似。然而当目标  $g(t)$  不是系统(3.1)的某个解时, 欲使方程(4.3)中  $u = 0$  (当  $t \rightarrow \infty$  时), 须有  $dg/dt - F(g, t) = 0$ , 即  $g(t)$  限制为系统(3.1)的某个解, 因而线性反馈控制方法的应用受到很大的限制。因此采用线性反馈控制方法时, 通常的做法是取

系统(3.1)的某个嵌入不稳定周期解作为目标  $g(t)$ 。

3)  $K(g, x, t)$  是 OPCL 作用: 此时  $K(g, x, t) = dg/dt - F(g, t) + C(g, t)(g(t) - x(t))$ , 其中矩阵  $C(g, t) = \partial F(g, t) / \partial g - B$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  是所有特征值均具有负实部的任意常矩阵。易知这里的  $K(g, x, t)$  实际上是开环和线性闭环的组合。代入(4.1), 得

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j + \sum_{k=2}^m \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \frac{1}{k!} \times \frac{\partial^k F_i(g, t)}{\partial g_{j_1} \partial g_{j_2} \dots \partial g_{j_k}} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_k} \quad (4.5)$$

该方程零解稳定性判别比(4.2)和(4.4)容易, 这是因为(4.5)的线性部分的系数是常数。

对于系统(4.5), 当  $m = 2$  时, (4.5)与目标  $g(t)$  的选择无关。为清楚起见, 考虑系统(3.1)在  $m = 2$  时的情况, 此时系统(3.1)形如

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk}(t)x_j x_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

对上式施加 OPCL 控制作用后, (4.6)可转化为关于  $u$  的方程

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)u_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk}(t)u_j u_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

(4.7)式与目标  $g(t)$  的选择无关, Rossler 和 Lorenz 混沌系统就属于方程(4.6)的情况, 且关于  $x$  的系数是常数。利用 Lyapunov 直接法可讨论方程(4.7)零解的渐近稳定性。

然而对于系统(3.1), 当  $m = 3$  时, 其传递域的确定要比  $m = 2$  时的情况复杂得多。这是因为  $m = 3$  时, 关于系统(4.5)的右端可能含有目标  $g(t)$  作为它的系数, 这使(4.5)关于  $u = 0$  时零解的稳定性判别变得复杂化<sup>[9]</sup>。

从以上讨论可以看到 OPNCL 作用的优越性。首先, OPNCL 对系统(3.1)的控制作用与目标  $g(t)$  的选择无关; 其次, OPNCL 控制作用关于  $u$  的方程(3.8)是渐近稳定的, 即它与选取  $x(t_0)$  初始点无关, 亦即它的传递是全局的。

## 5 仿真研究

为说明 OPNCL 控制作用的有效性, 现以 Chua 电路<sup>[10]</sup>为例。Chua 电路是具有典型的分歧和混沌

现象的电子线路,比如具有双涡卷、对偶双涡卷及双钩状现象。该电路由一个电感 $L$ ,两个电容 $C_1, C_2$ ,一个线性电阻 $G$ 和一个分段线性电阻 $g$ 构成,即

$$\begin{cases} C_1 \dot{V}_{c_1} = G(V_{c_2} - V_{c_1}) - g(V_{c_1}) \\ C_2 \dot{V}_{c_2} = G(V_{c_1} - V_{c_2}) + i_L \\ L \dot{i}_L = -V_{c_2} \end{cases} \quad (5.1)$$

这里 $V_{c_1}$ 和 $V_{c_2}$ 分别是 $C_1$ 和 $C_2$ 上的电压, $i_L$ 是通过电感 $L$ 的电流,非线性电阻关于 $V-i$ 的特征是

$$g(V_{c_1}) = g(V_{c_1}; m_0, m_1) = m_0 V_{c_1} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|V_{c_1} + 1| - |V_{c_1} - 1|)$$

其中参数 $m_0 < 0, m_1 < 0$ 。

为讨论方便,将(5.1)式改写成如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = px_2 + r(x_1 - 2x_1^3) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = qx_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

这里取 $p = 10, r = 10/7, q = -100/7$ ,分段线性项在此已用三次非线性项代替。

现要求系统的解趋于目标 $g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ 。对系统(5.2)施行OPCL控制作用,可得关于 $u$ 的方程组

$$\begin{cases} du_1/dt = b_{11}u_1 - 6rg_1(t)u_1^2 - 2ru_1^3 \\ du_2/dt = b_{22}u_2 \\ du_3/dt = b_{33}u_3 \end{cases} \quad (5.3)$$

这里取 $(b_{ij})_{3 \times 3}$ 为负定常对角阵。按照文献[9]的记号,(5.3)的第一式可写成如下形式

$$du_1/dt = -(a + b(t)u_1 + cu_1^2)u_1 \quad (5.4)$$

式中 $a = -b_{11}, b(t) = 6rg_1(t), c = 2r$ 。文献[9]给出如下结果:如果 $b^2(t) < 4ac$ (对所有 $t > t_0$ ),则Chua系统(5.2)的传递域 $BE(g)$ 是全局的;对于 $b^2(t) > 4ac$ 的情况,需要分别考虑 $dg_1/dt = 0$ 及 $dg_1/dt \neq 0$

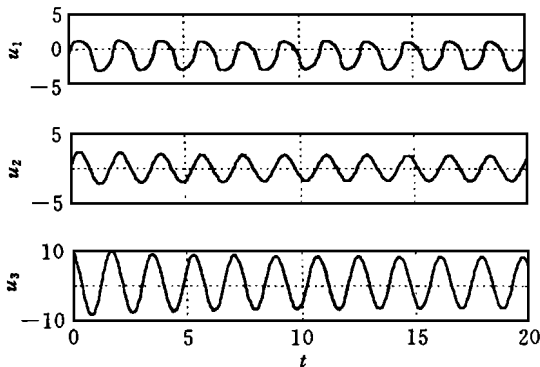


图1 开环(Hubler)控制

两种情况才能确定传递域的大小,但对于某些目标 $g(t)$ 的选择,会使 $b^2(t) - 4ac$ 的符号变得不定,使得确定传递域的大小变得更加困难<sup>[9]</sup>。

不妨取目标 $g(t)$ 为

$$g_c(t) = (g_1, g_2, g_3) = (1 + 0.1 \sin t, t \cos t, -10) \quad (5.5)$$

要使传递Chua系统的解为目标 $g_c(t)$ ,若采用OPCL控制作用(见(5.3)和(5.4)式),可得 $a = -b_{11}, b(t) = 6r(1 + 0.1 \sin t), c = 2r$ 。因此关于 $u_1$ 的传递域的确定变得极为复杂。

现将本文的OPNCL控制方法应用于(5.2),目标仍是(5.5)式,控制项为

$$K(g, x, t) = \begin{bmatrix} dg_1/dt - F_1(g, t) \\ dg_2/dt - F_2(g, t) \\ dg_3/dt - F_3(g, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r(1 - 6g_1^2)(x_1 - g_1) + p(x_2 - g_2) \\ (x_1 - g_1) - (x_2 - g_2) + (x_3 - g_3) \\ -q(x_2 - g_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6rg_1u_1^2 - 2ru_1^3 + b_{11}u_1 \\ b_{22}u_2 \\ b_{33}u_3 \end{bmatrix}$$

将上式加入(5.2),并设 $x(t) = g(t) + u(t)$ ,可得

$$du_i/dt = b_{ii}u_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.6)$$

这里取 $b_{ii} = -1, i = 1, 2, 3$ 。易知当Chua混沌系统加入OPNCL控制作用后, $u$ 很快收敛趋于零,这说明OPNCL作用对Chua电路控制的传递域是全局的。

同样的问题,若用开环、线性闭环和OPCL控制则困难得多,甚至是不可能的。4种控制方法的比较如图1—图4所示,其中 $u$ 分别对应(4.2),(4.3),(4.5)和(5.6)的解。从图中的仿真结果可知,开环

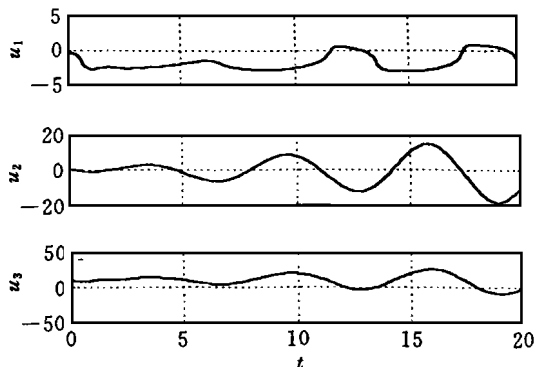


图2 线性闭环(反馈)控制

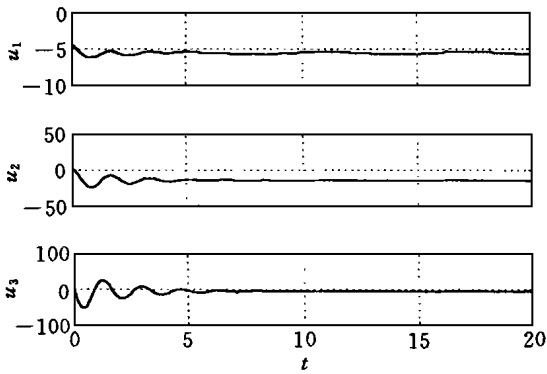


图 3 OPCL 控制

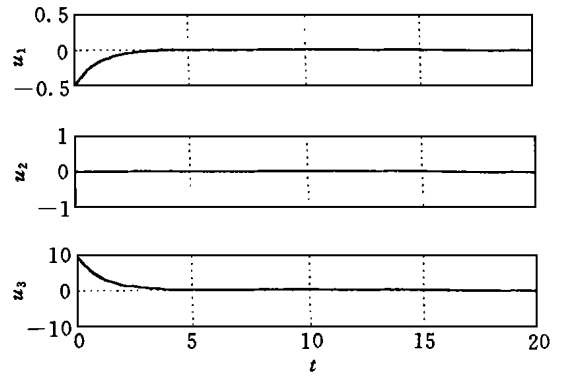


图 4 OPNCL 控制

和线性闭环的控制呈现不稳定状态(图 1, 图 2)。OPCL 控制不是全局的, 而是局部分段收敛的(图 3), OPNCL 控制是全局的(图 4)。

## 6 结 语

本文详细讨论了 OPNCL 控制方法。该方法对于任何光滑有界或无界的目标均有全相空间的传递域, 即传递域是全局的, 且不受目标变动的影响。当 OPNCL 应用于较复杂的 Chua 混沌系统的控制时, 由于许多混沌系统都属于右端是  $m$  次多项式的形式, 为把系统的解传递到选定的目标, OPNCL 无疑是一种成功的控制方法。尤其在工业系统中, 由于工艺过程的限制, 常使 (3. 6) 中的矩阵  $A$  不能充分负定。此时 OPNCL 控制技术显示出其优越性, 仅仅使  $A$  矩阵的特征值实部小于零, 即可保证控制系统的解稳定地传递到目标。

## 参 考 文 献

- 1 Jackson E A. The entrainment and migration controls of multiple - attractor systems. *Phys Lett*, 1991, A151 (9): 478\_ 484
- 2 Jackson E A. On the control of complex dynamic systems. *Physica*, 1991, D50(3): 341\_ 366
- 3 Jackson E A. Controls of dynamic flows with attractors. *Phys Rev*, 1991, A44: 4839\_ 4953
- 4 Hubler A W. Adaptive control of chaotic systems. *Helvetica Physica Acta*, 1989, 62: 343\_ 346
- 5 Hubler A W, Luscher E. Resonant stimulation and control of nonlinear oscillators. *Naturwissenschaften* 76,

1989, 67

- 6 Plapp B B, Hubler A W. Nonlinear resonance and suppression of chaos in the rf - biased Josephson junction. *Phys Rev Lett*, 1990, 65: 2302\_ 2305
- 7 Jackson E A, Hubler A. Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics. *Physica*, 1990, D44(3): 407\_ 420
- 8 Jackson E A, Kodogeorgiou A. Entrainment and migration controls of two - dimensional maps. *Physica*, 1991, D54: 253\_ 265
- 9 Jackson E A, Grosu I. An open - plus - closed loop (OPCL) control of complex dynamic systems. *Physica*, 1995, D85: 1\_ 9
- 10 Dong X, Chen G. Controlling chaotic continuous - time systems via feedback. In: *IEEE Proc of Dec Contr Conf Tucson*, 1992. 2502\_ 2503
- 11 Chen G R, Dong X N. From chaos to order - perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1993, 3: 1363\_ 1409

## 作 者 简 介

王 杰 男, 1960 年生。1998 年在东北大学获博士学位, 现为上海交通大学博士后。研究方向为非线性动力学, 复杂动力系统的混沌控制, 复杂工业大系统的控制与稳定。

田 沛 男, 1957 年生。1989 年在华北电力大学获硕士学位, 现为华北电力大学教授。研究方向为容错控制, 复杂系统的混沌控制。

陈 陈 男, 1938 年生。上海交通大学教授, 博士生导师。目前的研究方向为非线性大系统稳定分析, 复杂系统的分歧、混沌现象及非线性控制。