

多通道 Wiener 滤波器设计新方法*

邓自立 郭金柱 孙书利

(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080)

摘 要 应用现代时间序列分析方法,提出了多通道 Wiener 滤波器设计的一种新的时域方法。它可统一处理滤波、平滑和预报问题,且可处理非平稳信号和噪声。仿真例子说明了该方法的有效性。

关键词 多通道递推 Wiener 滤波器,时域方法,现代时间序列分析

分类号 O 211.64

New Approach to Multichannel Wiener Filter Design

Deng Zili, Guo Jinzhu, Sun Shuli

(Heilongjiang University)

Abstract Using the modern time series analysis method, a new time-domain approach to multichannel Wiener filter design is presented. The computational burden is reduced. It can handle the filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework, and can handle nonstationary signals and noises. A simulation example shows its effectiveness.

Key words multichannel recursive Wiener filters, time-domain approach, modern time series analysis.

1 引 言

Wiener 滤波器在通讯、信号处理、控制等领域具有广泛的应用,例如可用于解决冷轧带钢厚度估计、动态船舶定位、语音增强、雷达跟踪等问题。用流行的频域上的多项式方法^[1-3]设计多通道 Wiener 滤波器要求解 Diophantine 方程,因而增加了计算负担。用时域上的现代时间序列分析方法^[4]设计多通道 Wiener 滤波器^[5]也要求解 Diophantine 方程。

本文把多通道 Wiener 滤波器设计问题归结为对一类带多重观测滞后和滑动平均(MA)有色观测噪声系统的状态估计问题,首次提出了该类系统的 Wiener 状态滤波器,进而提出了多通道 Wiener 滤波器设计的一种新的时域方法。它可避免求解 Diophantine 方程。

2 问题阐述和引理

考虑多通道 Wiener 滤波问题^[1-3,5]

$$y(t) = s(t) + \eta(t) + \xi(t) \quad (2.1)$$

$$As(t) = Ce(t), \quad P\eta(t) = Rv(t) \quad (2.2)$$

其中,观测 $y(t) \in R^m$, $s(t)$ 为被估信号, $\eta(t)$ 为有色观测噪声; $\xi(t) \in R^m$, $e(t) \in R^p$ 和 $v(t) \in R^r$ 是零均值、方差阵各为 $O_\xi > 0$, $O_e > 0$ 和 $O_v > 0$ 的独立白噪声; A, C, P, R 为单位滞后算子 q^{-1} ($q^{-1}s(t) = s(t-1)$) 的多项式矩阵,形如 $X = X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_nq^{-n}$, X_i 为系数阵, $n_x = \text{deg}(X)$ 为阶次。

设 $A_0 = I_m, P_0 = I_m, I_m$ 为 $m \times m$ 单位阵。问题是基于观测 $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$ 求信号 $s(t)$ 的递推 Wiener 滤波器 $s(d|t+N)$,它具有以观测 $y(t+N)$ 作为输入的 ARMA 递推滤波器形式。对于 $N = 0, N > 0$ 或 $N < 0$,各称其为 Wiener 滤波器、平滑器或预报器。

设 (P, A) 右素,引入左素分解

$$PA^{-1} = \bar{A}^{-1}\bar{P} \quad (2.3)$$

其中, $\bar{A}_0 = I_m, \bar{P}_0 = I_m$, 且设 $(\bar{A}P, \bar{P}C, \bar{A}R)$ 左素。引入新的等价于 $y(t)$ 的观测过程 $z(t)$ 为

$$z(t) = Py(t) \quad (2.4)$$

* 国家自然科学基金项目(69774019)

1998-12-18 收稿, 1999-04-01 修回

由(2.1) ~ (2.4) 可得 ARMA 新息模型^[5]

$$\bar{A}z(t) = D\epsilon(t) \quad (2.5)$$

其中, $D\epsilon(t) = PCe(t) + ARv(t) + AP\xi(t)$, D 是稳定的, $D_0 = I_m$, 新息 $\epsilon(t) \quad R^m$ 是零均值、方差阵为 Q_ϵ 的白噪声。 D 和 Q_ϵ 可用 Gevers 和 Wouters^[6] 算法求得。

引理 1^[7] 对任意整数 N , 有白噪声估值器

$$\begin{cases} \hat{e}(t|t+N) = L_N \bar{A} \bar{D}^{-1} z(t+N) \\ \hat{v}(t|t+N) = M_N \bar{A} \bar{D}^{-1} z(t+N) \\ \hat{\xi}(t|t+N) = \Gamma_N \bar{A} \bar{D}^{-1} z(t+N) \end{cases} \quad (2.6)$$

其中多项式矩阵 \bar{A} 和 \bar{D} 由如下右素分解决定。

$$D^{-1}\bar{A} = \bar{A}\bar{D}^{-1} \quad (2.7)$$

带 $\bar{A}_0 = I_m, \bar{D}_0 = I_m$, 且

$$\begin{cases} L_N = Q_N \Pi_N^* Q_\epsilon^{-1} q^{-N} \\ M_N = Q_N F_N^* Q_\epsilon^{-1} q^{-N} \\ \Gamma_N = Q_N G_N^* Q_\epsilon^{-1} q^{-N} \end{cases} \quad (2.8)$$

其中定义 $\Pi_N^* = \mathbf{0}, F_N^* = \mathbf{0}, G_N^* = \mathbf{0} (N < 0)$ 。对于 $N \geq 0$, 定义

$$\begin{cases} \Pi_N^* = \sum_{i=0}^N \Pi_i^T q^i \\ F_N^* = \sum_{i=0}^N F_i^T q^i \\ G_N^* = \sum_{i=0}^N G_i^T q^i \end{cases} \quad (2.9)$$

其中, q 为单位前进算子($qy(t) = y(t+1)$), Π_i, F_i 和 G_i 可递推计算为

$$\begin{aligned} \Pi_i &= -D_1 \Pi_{i-1} - \dots - D_{n_d} \Pi_{i-n_d} + \check{C}_i \\ \Pi_i &= \mathbf{0}, i < 0, \quad \check{C}_i = \mathbf{0}, i > n_c \\ F_i &= -D_1 F_{i-1} - \dots - D_{n_d} F_{i-n_d} + \check{R}_i \\ F_i &= \mathbf{0}, i < 0, \quad \check{R}_i = \mathbf{0}, i > n_r \\ G_i &= -D_1 G_{i-1} - \dots - D_{n_d} G_{i-n_d} + \check{P}_i \\ G_i &= \mathbf{0}, i < 0, \quad \check{P}_i = \mathbf{0}, i > n_p \end{aligned}$$

其中定义 $\check{C} = PC, \check{R} = AR, \check{P} = AP$ 。

引理 2^[8] $\hat{z}(t)$ 有 Astrom 预报器

$$\hat{z}(t+i|t) = J_i \bar{D}^{-1} z(t) \quad (2.10)$$

其中 \bar{A}, \bar{D} 由(2.7) 决定, J_i 由

$$\begin{cases} \bar{D} = E_i \bar{A} + q^{-i} J_i, i > 0 \\ J_i = \bar{D} q^i, i = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

决定。其中 $\deg(E_i) = i-1, \deg(J_i) = \max(n\bar{a}-1, n\bar{a}-i)$ 。

由式(2.2), 信号 $s(t)$ 有状态空间模型^[4]

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma e(t) \quad (3.1)$$

$$s(t) = H^0 x(t) + C_0 e(t) \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \Phi = \begin{bmatrix} -A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{(n-1)m} & \\ -A_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Gamma = \begin{bmatrix} C_1 - A_1 C_0 \\ \vdots \\ C_n - A_n C_0 \end{bmatrix} \\ H^0 = [I_m \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 $n = \max(n_a, n_c)$, 规定 $C_i = \mathbf{0} (i > n_c), A_i = \mathbf{0} (i > n_a)$ 。

将(2.1) 左乘以 P , 并利用(2.2), (2.4) 和(3.2), 有观测方程

$$z(t) = H(q^{-1})x(t) + \alpha(t) \quad (3.4)$$

其中 $H(q^{-1})$ 和 MA 有色观测噪声 $\alpha(t)$ 定义为

$$H(q^{-1}) = PH^0 = H_0 + H_1 q^{-1} + \dots + H_{n_h} q^{-n_h}$$

$$\alpha(t) = PC_0 e(t) + Rv(t) + P\xi(t)$$

$$H_i = P_i H^0$$

(3.1) 和(3.4) 构成带多重观测滞后和 MA 有色观测噪声系统。由(3.2) 和射影性质有如下关系

$$\begin{aligned} \hat{s}(t|t+N) &= \\ &H^0 \hat{x}(t|t+N) + C_0 e(t|t+N) \end{aligned} \quad (3.5)$$

因此问题归结为求 Wiener 状态滤波器 $\hat{x}(t|t+N)$ 。

由(3.1) 和(3.4) 迭代可得单滞后观测方程

$$z(t+\tau) = \bar{H}x(t) + \delta(t+\tau) \quad (3.6)$$

其中时滞 $\tau = n_h = n_p$, 矩阵 \bar{H} 和观测噪声 $\delta(t+\tau)$ 为

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \sum_{i=0}^{\tau} H_i \Phi^{\tau-i} \\ \delta(t+\tau) &= \alpha(t+\tau) + \\ &\sum_{s=0}^{\tau-1} \sum_{k=0}^{\tau-1-s} H_s \Phi^{\tau-1-s-k} \Gamma e(t+k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

假设 (Φ, H) 为完全可观对, 可观性指数为 β , 即如下矩阵 Ω 为列满秩阵。

$$\Omega = [H^T, (H\Phi)^T, \dots, (H\Phi^{\beta-1})^T]^T \quad (3.8)$$

将伪逆 $\Omega^\# = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T$ 分块表示为

$$\Omega^\# = [\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{\beta-1}] \quad (3.9)$$

定理 1 带多重观测滞后和 MA 有色观测噪声系统(3.1) 和(3.4) 有渐近稳定的 Wiener 状态滤波器

$$\hat{x}(t|t+N) = KND^{-1}z(t+N) \quad (3.10)$$

其中 \tilde{A}, \tilde{D} 由(2.7)定义, 多项式矩阵 K_N 为

$$K_N = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega [J^{\tau+i-N} - \sum_{j=0}^{i-1} H \Phi^{i-1-j} \Gamma L_{N-j} \tilde{A} - \Delta_i^N \tilde{A}] \quad (3.11)$$

其中规定 $\Phi = 0 (i < 0)$ 且 $j \geq 0$, 同时

$$\Delta_i^N = \sum_{j=0}^{n_p} P_j C_0 L_{N-\tau-i+j} + \sum_{j=0}^{n_r} R_j M_{N-\tau-i+j} + \sum_{j=0}^{n_p} P_j \Gamma_{N-\tau-i+j} + \sum_{s=0}^{\tau-1} \sum_{k=0}^{\tau-1-s} H_s \Phi^{\tau-1-s-k} \Gamma L_{N-i-k} \quad (3.12)$$

证明 类似于文献[7]的推导, 由(3.1)和(3.6)迭代并应用射影性质, 可得非递推最优状态估值器

$$\hat{x}(t|t+N) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega [z(t+\tau+i|t+N) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Phi^{i-1-j} \Gamma \hat{e}(t+j|t+N) - \hat{\delta}(t+\tau+i|t+N)] \quad (3.13)$$

将(2.6)和(2.10)代入(3.13)得(3.10)~(3.12)。由 D 的稳定性和(2.7)引出 \tilde{D} 是稳定的, 因而(3.10)是渐近稳定的。(证毕)

4 多通道递推 Wiener 信号滤波器

定理2 系统(2.1),(2.2)有渐近稳定的多通道递推 Wiener 滤波器

$$D_N \hat{s}(t|t+N) = \tilde{K}_N P y(t+N) \quad (4.1)$$

其中多项式矩阵 D_N 和 \tilde{K}_N 由如下左素分解决定。

$$D_N^{-1} \tilde{K}_N = \tilde{K}_N \tilde{D}^{-1} \quad (4.2)$$

式中 $D_{N0} = I_m, \tilde{K}_N$ 由(3.11)给出的 K_N 定义为

$$\tilde{K}_N = H^0 K_N + C_0 L_N \tilde{A} \quad (4.3)$$

证明 将(2.6)和(3.10)代入(3.5)并应用(2.4)有 Wiener 滤波器

$$\hat{s}(t|t+N) = \tilde{K}_N \tilde{D}^{-1} P y(t+N) \quad (4.4)$$

将(4.2)代入(4.4)得(4.1)。由 \tilde{D} 的稳定性和(4.2)引出 D_N 是稳定的。故(4.1)是渐近稳定的。(证毕)

推论1 在定理2中, 多通道递推 Wiener 滤波器也可表示为

$$\det \tilde{D}_s(t|t+N) =$$

$$\tilde{K}_N \text{adj} \tilde{D} P y(t+N) \quad (4.5)$$

证明 将 $\tilde{D}^{-1} = \text{adj} \tilde{D} / \det \tilde{D}$ 代入(4.4)即得(4.5)。

注意, (4.5)的优点是避免了左素分解(4.2), 但缺点是增加了滤波器的阶次。

推论2 对单通道 Wiener 滤波问题(2.1),(2.2), 有渐近稳定的递推 Wiener 滤波器

$$D s(t|t+N) = \tilde{K}_N P y(t+N) \quad (4.6)$$

其中 \tilde{K}_N 由(3.11)和(4.3)计算, 但应置 $\tilde{A} = A, \beta = n$ 。

5 仿真例子

考虑两通道系统(2.1),(2.2), 其中 $s(t) = [s_1(t), s_2(t)]^T, e(t), v(t)$ 和 $\xi(t)$ 是零均值、方差阵各为 $Q_e = \text{diag}(1, 2), Q_v = \text{diag}(4, 4)$ 和 $Q_\xi = \text{diag}(2, 2)$ 的独立高斯白噪声。

$$A = I_2 + A_1 q^{-1}, \quad C = C_1 q^{-1}$$

$$P = I_2 + P_1 q^{-1}, \quad R = R_1 q^{-1}$$

且

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.9 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.95 & -1.1 \\ -1.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.89 & 0 \\ -0.35 & -0.78 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & -0.25 \end{bmatrix}$$

取 $N = -1$, 用本文方法由(4.1)有递推 Wiener 预报器

$$\tilde{D}_{-1} \hat{s}(t|t-1) = \tilde{K}_{-1} P y(t-1)$$

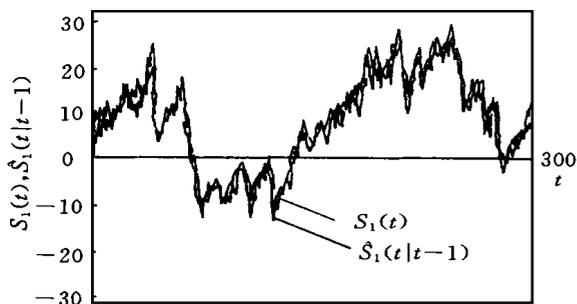
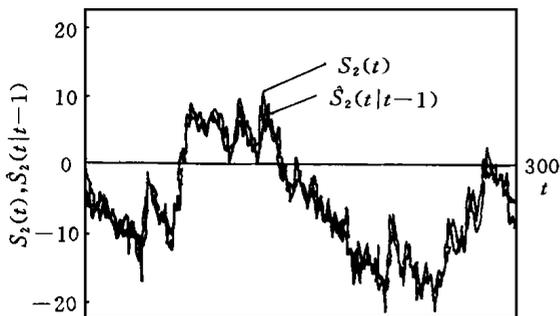
经计算可求得

$$D_{-1} = I_2 + \begin{bmatrix} -7.376538 & -9.729315 \\ 5.414045 & 7.125943 \end{bmatrix} q^{-1} +$$

$$\begin{bmatrix} -1.381203 & -1.608316 \\ 0.990659 & 1.150492 \end{bmatrix} q^{-2}$$

$$\tilde{K}_{-1} = \begin{bmatrix} 0.300582 & -0.344433 \\ -0.227136 & 0.239485 \end{bmatrix}$$

注意到 $\det A(q^{-1})$ 有在单位圆上的零点 $q^{-1} = 1$, 故 $s(t)$ 为非平稳信号。仿真结果如图1和图2所示。可以看到, Wiener 预报器 $\hat{s}(t|t-1)$ 跟踪 $s(t)$ 的变化具有较高的精度。

图 1 $s_1(t)$ 和 Wiener 预报器 $\hat{s}_1(t|t-1)$ 图 2 $s_2(t)$ 和 Wiener 预报器 $\hat{s}_2(t|t-1)$

6 结 论

本文提出了新的时域 Wiener 滤波方法,可解决状态和信号二者的 Wiener 滤波器设计问题,具有方法论意义。新方法原理是将信号 Wiener 滤波器设计问题,转化为一类带多重观测滞后和 MA 有色观测噪声系统的 Wiener 状态滤波器设计问题。利用在 Wiener 滤波器形式下的白噪声估值器和观测预报器,由非递推状态估值器的递推变形,可得到 Wiener 状态滤波器,从而得到 Wiener 信号滤波器。同频域 Wiener 滤波方法(即多项式方法)相比,新方法的优点是避免了求解 Diophantine 方程,因而减

小了计算负担,且可处理广义系统^[7]。

参 考 文 献

- 1 Ahlen A, Sternad M. Wiener filter design using polynomial equations. IEEE Trans on Signal Processing, 1991, 39(11): 2387- 2399
- 2 Roberts A P, Newmann M M. Polynomial approach to Wiener filtering. Int J Control, 1988, 47(3): 681_ 696
- 3 Grimble M J. H_2 inferential filtering, prediction and smoothing with application to rolling mill gauge estimation. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(8): 2079_ 2093
- 4 邓自立,郭一新.现代时间序列分析及其应用.北京:知识出版社,1989
- 5 邓自立,刘伟华,石莹.解决多通道 Wiener 滤波问题的 ARMA 新息滤波器.控制与决策,1998,13(2): 169—172
- 6 Gevers M, Wouters W R E. An innovation approach to the discrete- time stochastic realization problem. Journal A, 1978, 19(2): 90_ 109
- 7 邓自立,许燕.一类统一的 Wiener 状态估值器.信息与控制,1998,27(5): 336—341
- 8 奥斯特隆姆 K J 著.潘裕焕译.随机控制理论导论.北京:科学出版社,1983

作 者 简 介

邓自立 见本刊第 12 卷第 5 期第 601 页。

郭金柱 男,1955 年生。1980 年毕业于黑龙江大学数学系,现为黑龙江大学自动化系副教授。主要研究领域为信号处理,最优滤波,系统仿真,计算机应用等。

孙书利 男,1972 年生。1996 年毕业于黑龙江大学数学系,1999 年获该校控制理论与控制工程专业硕士学位。主要研究领域为 Wiener 滤波,反卷积等。

(上接第 292 页)

参 考 文 献

- 1 Bose B K. Expert system: Fuzzy logic and neural network application in power electronics and motion control. Proc of the IEEE, 1994, 82(8): 1303_ 1323
- 2 王耀南.基于高斯势函数网络的自适应 PID 控制系统.控制与决策,1997,12(5): 548—553
- 3 王耀南.智能控制系统——模糊控制·专家系统·神经网络控制.长沙:湖南大学出版社,1996,240—243
- 4 许大中.交流电机调速理论.杭州:浙江大学出版社,1994,209—222

作 者 简 介

孙 炜 男,1975 年生。湖南大学控制理论与控制工程专业博士研究生。研究领域为智能控制,电力电子技术等。

王耀南 男,1957 年生。湖南大学电气与信息工程学院教授,博士生导师。研究领域为人工智能,智能控制,电力电子技术等。

毛建旭 男,1974 年生。湖南大学控制理论与控制工程专业博士研究生。研究领域为智能控制,图象处理等。